

回帰符号系に於ける *Balanced Incomplete*  
*Block Design* の応用にフツて

日本電気株式会社 岩垂好裕

1. 序

閾値復号が可能なブロック符号系の構成に *Balanced Incomplete Block Design* が用いられる事は、Rudolph (1), Weldon (2), Joethals et al (3), Weldon 等により示されている。回帰符号系に於ても閾値復号法が一部用いられるが、現段階に於ては、少くも組織符号に限定する限りでは、パリティチェックマトリクス構成上の制限がブロック符号よりも大まかである。その応用の範囲は、Perfect Difference Set によって自己直交符号を導入、Robinson & Bernstein の手法に限られている。(5)

本稿に於ては先ず Robinson & Bernstein の自己直交符号を構成する手法を簡単に紹介し、次に同じく Perfect Difference Set から構成される Weldon の符号 (2) 等のブロック符号と比較して回帰符号構成上の問題を挙げて、更

に数学的に未解決のいくつかの回帰符号構成法を列举する事とする。

## 2. Robinson & Bernstein の自己直交符号 (5)

回帰符号は又置み=み符号ともいわれ、その符号構成はブロック符号の場合と同じくパリティチェックマトリクスHによって定められる。Massey の記法 (6) に従えば、伝送速度  $R = 1/l$  又は  $l^{-1}/l$  の符号は、 $l-1$  個のパリティ三角

$$\begin{array}{c}
 H_2 = \begin{array}{ccc}
 g_0^{(2)} & & \\
 g_1^{(2)} & g_0^{(2)} & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 g_{n-1}^{(2)} & g_{n-2}^{(2)} & g_0^{(2)} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 g_0^{(2)} & & \\
 g_1^{(2)} & g_0^{(2)} & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 g_{n-1}^{(2)} & g_{n-2}^{(2)} & g_0^{(2)}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 I_{n_1} \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 I_{n_2}
 \end{array}
 \quad (1)$$

によって定められる。伝送符号を半無限列ベクトル  $X_2, \dots, X_l$  で表す時、 $H_2 X_2 = 0, \dots, H_l X_l = 0$  の関係を満たし、従って伝送路上の誤りを表す列ベクトル  $E_i, i=2, 3, \dots, l$  に対して、

$$H_2(X_i + E_i) = H_2 E_i = S_i \quad (2)$$

$$i = 2, 3, \dots, k$$

がシンドローム系列  $S_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$  を与える。

雑音ビット  $e_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$  について直交する畳みこみ自己直交符号とは、どの二つのパリティチェックの式も、 $e_i^{(k)}$  以外の同じ二つの雑音ビットを含まない畳みこみ符号の事である。

例 I. (Kugelberger) [7],

$$H_2 = \begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad I_7 \quad (3)$$

は  $R = 1/2$  の自己直交符号である。

(1)式及び(3)式で示されているように、自己直交符号の構成は、パリティ三角の Design に帰結される。これはブロック符号の構成が正方マトリクスの Design に帰結されるのに対して、回帰符号構成法の一つの特徴である。Robinson & Bernatein は Perfect Difference Set によってパリティ三角を構成する方法を与えた。

Perfect Difference Set は次の性質を持つ  $q+1$  個の整数の組  $(d_1, d_2, \dots, d_{q+1})$  である。即ちその  $q^2+q$  個の差

$d_i - d_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, q+1$  が modulo  $q^2 + q + 1$  で整数  $1, 2, \dots, q^2 + q + 1$  に合同である。

例2.  $(2, 4, 8)$  は mod 7 を持つ Perfect Difference Set である。即ち,  $2 - 8 \equiv 1, 4 - 2 \equiv 2, 4 - 8 \equiv 3, 8 - 4 \equiv 4, 2 - 4 \equiv 5, 8 - 2 \equiv 6 \pmod{7}$

一つの Difference Set が与えられた時. これから Regular Array を構成する。即ち Regular Array の第 1 行  $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1, q+1})$  は Difference Set の連続する元の差

$$a_{1i} = d_{i+1} - d_i, i = 1, 2, \dots, q$$

$$a_{1, q+1} = q^2 + q + 1 + d_1 - d_{q+1}$$

残りの元は

$$a_{i,j} = \sum_{k=j}^{i+j-1} a_{1,k}$$

で与えられ.  $i > 0$  で  $k > q+1$  に対しては  $a_{1,k} = a_{1, k-q-1}, 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq q+1$  である。

例3. Difference Set  $(1, 2, 4, 10)$  は. Regular Array

1 2 6 4      を構成する。  
3 8 10 5  
9 12 11 7

次にこの Regular Array の第 1 行から  $q$  又はそれ以下の連続する元をとって Difference Triangle の第 1 行とする事により. Difference Triangle を構成する。

例4. 例3で元  $(2, 6), (4, 1)$  は二つの三角

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ & 4 & 1 \end{array} \quad \text{を構成する.}$$

$$\begin{array}{cc} & 8 \\ & & 5 \end{array}$$

この Difference Triangle のオ1行をHマトリクスのオ1列の1の元の間の間隔とする事により自己直交符号が得られる。

例5. 例4の三角に7つ2.

$$[g_0^{(2)}, g_1^{(2)}, \dots, g_8^{(2)}]^T = 101000001$$

$$[g_0^{(3)}, g_1^{(3)}, \dots, g_8^{(3)}]^T = 100110000$$

とすれば  $R = 1/3$  又は  $2/3$  の符号が得られ.

$$[g_0^{(4)}, g_1^{(4)}, \dots, g_{10}^{(4)}]^T = 10100000100011$$

とすれば  $R = 1/2$  の符号が得られる。

Robinson & Bernstein は30以下の素数のすべての中に対する Regular Arrayの組から Difference Triangle のオ1行の元の和が最小となる符号を構成し、文献[5]に示している。オ1行の元の和を最小とする事により、与えられた伝送速度  $R$ , 距離  $d = J + 1$  に対して最短の相束長を持つ符号が得られ、回帰符号の場合に重要である。

### 3. ブロック符号との比較

(i) Weldon [1] は Difference Set Cyclic Code とし

Difference Set を  $\lambda$  の中として持つ多項式の Reciprocal Polynomial が H マトリクスを与える巡回符号を求めた。この符号は巡回性質を用いる事から正整数  $S$  に対して  $n = 2^{2^S} + 2^S + 1$  なる符号長を持つ。これに対して回帰符号の符号長は、符号を定める Difference Set の最大元で定められ、符号を定めるのに用いられる Difference Set の modulus には無関係となる点は大なる相異である。然し同じ距離  $d = J+1$  を持つ符号は、同じ Difference Set 又は同じ最大元を有する Difference Set から構成されている。

オ 1 表

Weldon の符号と Robinson の符号 ( $W, R$  で示す)

$d$		$n$ 又は $n_A$	$R$	Difference Set
4	W	7	$3/7$	0, 2, 3,
	R	8	$4/8$	同上
6	W	21	$11/21$	0, 2, 7, 8, 11
	R	24	$12/24$	0, 2, 7, 10, 11
10	W	73	$45/73$	0, 2, 10, 24, 25, 29, 36, 42, 45,
	R	92	$46/92$	0, 3, 9, 16, 20, 21, 35, 43, 45
18	W	273	$191/273$	0, 18, 24, 46, 50, 67, 103, 112
	R	402	$201/402$	115, 126, 128, 159, 166, 167, 186, 196, 201 (両者共通)

(ii) Weldow の Self-Orthogonal Quasi Cyclic Codes

[4] は Robinson & Bernstein の符号と殆んど同じようにして構成されるが、Quasi Cyclic Property を得るために modulus  $m$  として Difference Set が重複を持たず、且 disjoint である最小の整数  $m$  を定める必要がある。この為同じ  $R, J$  を持つ符号でも其等の符号を生成する Difference Set は相異なるものである場合が多い。

(iii) Goethals et. al. [3] は有限射影幾何学符号として、

Balanced Incomplete Block Design  $(b, v, k, r, \lambda)$  を持つ符号を構成した。回帰符号の場合には、Massey によつて  $R = 1/k$  の符号の場合に示されてゐる如く [6],  $L$  step orthogonal の符号は One step orthogonal となるから、Goethals et. al. の符号を直接畳みこみ符号に拡張するわけにはいかならぬ。然レ、符号生成多項式

$$W(x) = x^{d_0} + x^{d_1} + \dots + x^{d_s}$$

$$d_0 = 1 < d_1 < \dots < d_s$$

を H マトリクスの第一列に取る事により、Rudolph [1] によつて提案された  $(\frac{v}{k})$  個の誤りを訂正する符号に対応する符号を求める事は出来る。このようにして構成される符号の能率は、然レ乍ら、一般的によくならず。

#### 4. 試行錯誤法による回帰符号の構成法

以上に論じて来た様に、回帰符号系の *Design* に *Balanced Incomplete Block Design* を応用出来る範囲はごく限られてゐる。現在迄にいくつかの有用な回帰符号系は試行錯誤法により導かれた。その数学的な導き方は未だ知られてゐない。ブロック符号系が種々の数学的性質を組み込んで構成されて来たのに対し、多くの回帰符号系が試行錯誤法によって求められて来た事自身、回帰符号構成法の特徴の一つと考えられる。その二、三の例を以下に挙げる事とする。

(i) 直交可能符号 (Massey (1)), 直交可能符号は、パリテイチェックマトリクスの行を加之あわせる事により  $e_i$  に直交するパリテイチェックを得るものであり、一般に自己直交符号と同じ  $R$ ,  $J$  に対して、抱束長さを短かくする事が出来る。例えば  $R = \frac{1}{2}$ ,  $J = 6$  の自己直交符号は、 $n_A = 36$  を持つのに対し、直交可能符号は  $n_A = 24$  を持つ。これ等の直交可能符号は試行錯誤法によって構成され、その数学的構成法は1962年以來未解決の問題である。

(ii) バースト訂正回帰符号 (岩垂 (8), Massey (9))

バースト訂正回帰符号で任意の整数  $n$  につき  $R = \frac{n-1}{2}$  を持つ符号は、閾値復号法による単一誤り訂正符号を交錯する事により得られるとも考えられる。そのシンドローム系列と



して

$$S_I = E_b \underbrace{00 \cdots 0}_{r+b-2} E_{b-1} E_{b-1} E_{b-2} 0 E_{b-2} \cdots \cdots E_1 \underbrace{00 \cdots 0}_{b-2} E_1$$

$$S_{II} = E_b E_{b-1} 0 E_{b-2} 0 \cdots \cdots 0 E_1 \underbrace{00 \cdots 0}_{r+b-1} E_{b-1} E_{b-2} \cdots \cdots E_1$$

等が知られてゐる。此等の符号も試行錯誤法によつて求められた。組織的構成法は未だ知られてゐない。

(iii) バースト及バラングラム誤り訂正符号 (Massey [10], 岩垂 [11])。Massey は次の  $b$ -diffuse 符号を定義した。

$b$ -diffuse 符号: (i) 直交数  $J$  の自己直交符号または直交可能符号が復号される前情報ビットから始まる長さ  $b$  又はそれ以下のバーストは  $J/2 - 1$  個以上のシンδροームビットに影響をなす。(ii) その他の場所から始まるバーストは高々  $J/2$  個のシンδροームビットに影響する。

この  $b$ -diffuse 符号は修正交錯法による  $R=1/2$ ,  $J=4$ ,  $b$  の符号を Massey [10] [12] が求め、普通の交錯法による符号が文献 [11] に求められてゐる。現在迄のとらう  $R=1/2$ ,  $J=4$ ,  $R=1/2$ ,  $J=6$  (Massey [10], [12]),  $R=1/2$ ,  $J=4$ ,  $R=1/3$ ,  $J=6$ ,  $R=1/3$ ,  $J=8$  [11] の符号は単一バースト訂正符号としてガードスペースの下限を満す。一般に此等の符号は試行錯誤法によつて求められ、数学的 Design に基づく組織的な構成法

は知られていない。

### 5. 結論

以上のように回帰符号の Design はブロック符号の Design より拘束が多く、いくつかの未解決の問題をかかえながら、符号の組織的構成法を求める事が難しい。組合せ数学の一層の応用により、回帰符号の組織的構成法を求める事は、回帰符号の今後の発展の重要な鍵となると考えられる。

### 文献

1. L.D. Rudolph, "A class of majority logic decodable codes," IEEE Trans. Information Theory, vol. IT-13, pp. 305-307 April 1967.
2. E.J. Weldon, Jr. "Difference-set cyclic codes," B.S.T.J. vol. 45, pp. 1045-1055, September 1966.
3. J.M. Goethals & P. Delsarte, "On a class of majority-logic decodable cyclic codes." IEEE Trans. Information Theory, vol. IT-14, pp. 182-188. March 1968.
4. R.L. Townsend & E.J. Weldon, Jr. "Self-orthogonal quasi-cyclic codes", IEEE Trans. Information Theory, vol. IT-13, pp. 183-195, April 1967.

5. J. P. Robinson & A. J. Bernstein, "a class of recurrent codes with limited error propagation," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. IT-13, pp. 106-113, January 1967.
6. J. L. Massey, "Threshold decoding", M. I. T. Press, Cambridge Mass. 1963.
7. D. W. Hagelbarger, "Recurrent codes for the binary symmetric channel", lecture notes for the course Theory of Codes, University of Michigan Summer Conference, Ann Arbor, June 18-29, 1962.
8. 岩垂好裕 "バースト訂正回帰符号系の理論" 電子通信学会論文誌 51-C pp. 549-556, 昭和43年12月.
9. J. L. Massey, Unpublished memorandum.
10. J. L. Massey, "Advances in threshold decoding" in "Advances in communication systems", A. V. Balakrishnan ed. Academic Press, New York 1968.
11. 岩垂好裕 "閾値復号法によるバースト及バラランダム誤り訂正符号系" 電子通信学会インホメーション理論研究会資料 IT68-40, 1968年11月
12. P. Kocher, Private Communication, April 1969.