数理解析研究所講究録
第 82 巻 1970 年 99-107

Combinatorial System について

日大 生産工 中村 昭

§1 Combinatorial system

Computability に関する問題の中から，組合せ数学と関連がある言語理論の unsolvability の話題について報告する。

Combinatorial system とは，M. Davis [1] によれば次の様に定義される。

いま，$a_0, a_1, a_2 \cdots$ を symbols (objects) の無限系列とし，これらの symbols の有限個ならんだものを word (string) という。P, Q を words を表わすとし，g, h, k; $\bar{g}, \bar{h}, \bar{k}$ をある words とする．このとき

$$g P h Q k \longrightarrow \bar{g} P \bar{h} Q \bar{k}$$

を g, h, k; $\bar{g}, \bar{h}, \bar{k}$ に関係する production という。又

$$\bar{g} P \bar{h} Q \bar{k} \longrightarrow g P h Q k$$

を，先きの production の逆 production という。

次に　$\wedge P g Q \wedge \longrightarrow \wedge P \bar{g} Q \wedge$　（但し $\wedge$ は empty word)

を $g, \bar{g}$ に関係する semi-Thue production という。又

$$g\, P_\wedge Q_\wedge \rightarrow {}_\wedge P_\wedge Q \bar{g}$$

を $g, \bar{g}$ に関係する normal production という。そしてこれを $gP \rightarrow P\bar{g}$ とかく。

さて, combinatorial system Γ は Γ の axiom と呼ばれる一つの non-empty word と Γ の production と呼ばれる production の有限集合からなる。その production が semi-Thue production である combinatorial system を semi-Thue system といい, その production が normal production である combinatorial system を normal system という。更に又 normal production とその逆 production の有限集合からなる combinatorial system を Post system という。

Combinatorial system の証明, 定理は, production を rule と考えた代入法則, Modus Ponens による logic のそれと類似した方法で定義される。

Turing machine, 述語論理 等の決定問題と関連して, その decision problem が recursively unsolvable である combinatorial system の存在する事は, よく知られている。ここでは, その決定問題が unsolvable で

ある一つの combinatorial system として，Post canonical language を考えてみる。

§2 Post canonical language

Post canonical language とは，次のように定義される formal system である。

(1) $\mathcal{A}$ を一つの有限集合とし，これを alphabet という。$\mathcal{V}$ を $\mathcal{A}$ における記号を有限個ならべてできる系列のすべての集合とする。そしてこれを vocabulary という。いま，$\alpha_1, \alpha_2 \cdots$ を $\mathcal{V}$ にない記号とし，次の形を string schema という。

$$\alpha_{i_1}\ s_1\ \alpha_{i_2}\ s_2 \cdots \alpha_{i_{n-1}}\ s_{n-1}\ \alpha_{i_n}$$

ただし，各 s_i は $\mathcal{V}$ の元であり，α のすくなくとも一つは実際に表われなくてはならない。

又，次の形を grammar という。

$$S_1, S_2, \cdots, S_m \rightarrow T$$

ただし，m は正整数であって，$S_1, \cdots, S_m$，T は string schemata である。又 $T = \alpha_1 t_1 \alpha_2 t_2 \cdots \alpha_{n-1} t_{n-1} \alpha_n$ ならば，t_i のすくなくとも一つは null string でない。T における各 α_i は S_j のすくなくとも一つに表われる。

(2) Post canonical language とは，alphabet と

有限個の grammar の集合と，公理と呼ばれる vocabulary の有限部分集合からなる形式体系である。

(3) 次の二つの法則 R_1, R_2 を用いて axioms と grammar から得られる言語を Post canonical language の定理という。

R_1 : α_i に対する代入法則

R_2 : Modus Ponens

ところで，この Post language は Post's normal form theorem [2] によれば，Post system に reduce される。即ち一つの combinatorial system と考えてよい。

§3 Language $\mathbb{L}$

目的を達するため，いま次の Post canonical language $\mathbb{L}$ を考える。

Alphabet : { 1, o, ▵, *, #, W, O, ⊢ }

Axioms : W1, O0

Grammar :

G1. $W\alpha \rightarrow W\alpha\triangle$

G2. $O\alpha \rightarrow O\alpha\triangle$

G3. $W\alpha,\ O\beta\triangle \longrightarrow W\#\beta\triangle\#\alpha$

G4. $W\alpha,\ W\beta \longrightarrow W\circ\alpha\beta$

G5. $W\alpha,\ O\beta \longrightarrow W*\beta*\alpha$

G6. $W\alpha,\ W\beta,\ W\gamma,\ W\delta,\ W\epsilon$

$$\longrightarrow \vdash\circ\circ\circ\circ\circ\alpha\beta\circ\#\circ\triangle\#\gamma\#\circ\triangle\#\delta\gamma\epsilon\circ\circ\epsilon\alpha\circ\delta\alpha$$

G7 $W\alpha,\ W\beta,\ O\gamma \longrightarrow \vdash\circ*\gamma*\circ\alpha\beta\circ*\gamma*\alpha*\gamma*\beta$

G8 $W\alpha,\ O\beta \longrightarrow \vdash\circ*\beta*\alpha\alpha$

G9 $\vdash\alpha,\ \vdash\circ\alpha\beta \longrightarrow \vdash\beta$

G10 $\vdash\alpha,\ O\beta \longrightarrow \vdash*\beta*\alpha$

ここで，われわれは，任意に与えられた記号の系列が言語系 $\mathbb{L}$ の定理になっているかどうかを決める問題（決定問題）を考える。そしてこの問題は一般的に解決されない事を証明しよう。即ち次節以下でこの問題を解く finite な effective な procedure は存在しない事を示そう。

§4 Predicate calculus $\mathbb{F}$ と language $\mathbb{L}$

述語論理（第一階）$\mathbb{F}$ と language $\mathbb{L}$ の関係をのべておく。そのためにある命題論理（無限多値）$\mathfrak{M}$ を媒介として考える。

まず，$\mathbb{F}$ は individual variable として $x_1, x_2, \cdots$ のみを含むものと仮定する。これは常に可能である。さて $\mathbb{F}$

における論理式$\mathfrak{A}$に対して$h(\mathfrak{A})$を次のようにして得られる式とする。

(i) $\mathfrak{A}$が$F(x_i)$ならば、$h(F(x_i)) = X_i\ F$

ただし、Fは$\mathfrak{M}$のpropositional variableであり、X_iは$\mathfrak{M}$のlogical operationである。

(ii) $\mathfrak{A}$が$G(x_i, x_j, \cdots, x_k)$ならば

$$h(G(x_i, x_j, \cdots, x_k)) = \Diamond(X_i G^1_\wedge X_j G^2_\wedge \cdots {}_\wedge X_k G^n)$$

ただし、$G^1, G^2, \cdots, G^n$は$\mathfrak{M}$のpropositional variableであり、$X_i, X_j, \cdots, X_k, \Diamond, \wedge$は$\mathfrak{M}$のlogical operationである。

(iii) $\mathfrak{A}$がlogical operation又はquantifierを含むならば

$$h(\neg \mathfrak{A}_1) = \neg h(\mathfrak{A}_1)$$

$$h(\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2) = h(\mathfrak{A}_1) \vee h(\mathfrak{A}_2)$$

$$h((\exists x_i)\mathfrak{A}_1) = \exists_i\ h(\mathfrak{A}_1)$$

次にlanguage $\mathbb{L}$を$\mathfrak{M}$によって次の様に解釈する。即ちlanguage $\mathbb{L}$における記号系列と$\mathfrak{M}$における記号の間に次の対応関係をあたえる。

$$1 \longrightarrow P_0$$

$$1\Delta \longrightarrow P_1$$

$$1\Delta\Delta \longrightarrow P_2$$

$$\circ \longrightarrow \supset$$

$$\# \circ \triangle \# \longrightarrow \neg$$

$$\# \circ \triangle \triangle \# \longrightarrow \Diamond$$

$$\# \circ \triangle \triangle \triangle \# \longrightarrow X_1$$

$$\# \circ \triangle \triangle \triangle \triangle \# \longrightarrow X_2$$

$$\vdots$$

$$* \circ * \longrightarrow \forall_1$$

$$* \triangle \circ * \longrightarrow \forall_2$$

$$\vdots$$

ここで language $\mathbb{L}$ の上記の解釈にもとづく logical system $\mathbb{P}$ を次の様に構成する。

$\mathbb{P}$ の wff は，$\mathbb{L}$ における定理 Ws の s として定義される。

$\mathbb{P}$ の axioms は G_6, G_7, G_8 からえられる wff である。

$\mathbb{P}$ の rules は G_9, G_{10} からえられる。

この解釈にもとづけば，$\vdash s$ が $\mathbb{L}$ の定理であれば，s は $\mathbb{P}$ で証明可能である。　　又その逆が容易にわかる。

さて，われわれの問題は，任意に与えられた記号の系列 s が $\mathbb{L}$ の定理であるかどうかを決めることであった。そして，この問題の不可能性は，上述した事から s が $\mathbb{P}$ で provable であるかどうか決める問題は不可能である事を示せばよい事がわかる。

§5 諸定理

前節で述べた事を示すには，次の諸定理を証明すればよい。

定理5.1 $\mathfrak{A}$が first-order predicate calculus で valid ならば，$\mathfrak{A}$は$\mathbb{F}$で provable である。

定理5.2 $\mathfrak{A}$が$\mathbb{F}$で provable ならば，$\widehat{\mathfrak{A}}$の少なくとも一つは$\mathbb{P}$で provable である。ただし$\widehat{\mathfrak{A}}$は$\mathfrak{A}$からある規則でつくられる$\mathbb{P}$の wff の有限集合である。

定理5.3 $\widehat{\mathfrak{A}}$の少なくとも一つが$\mathbb{P}$で provable ならば，それは$\mathfrak{M}$で valid である。

定理5.4 $\widehat{\mathfrak{A}}$の少なくとも一つの wff が$\mathfrak{M}$で valid ならば，$\mathfrak{A}$は first-order predicate calculus で valid である。

これらの定理の証明は，ここでは省略するが，[1] 系として次をうる。

系 $\mathfrak{A}$が与えられたとき$\widehat{\mathfrak{A}}$の少なくとも一つが，$\mathbb{P}$で provable であるとき，そしてそのときにのみ$\mathfrak{A}$は$\mathbb{F}$で provable である。

この系から，容易に$\mathbb{P}$に対する undecidability がえられる。なぜならば，もし$\mathbb{P}$における決定問題が solvable で

1) $\mathfrak{M}$を用いて，かなり面倒な証明を必要とする。

あれば，Fのそれがsolvableになり，よく知られているFのundecidabilityに矛盾するからである。

§6 注意

さて，Pは一つのaxiomatic propositional calculusと考えられるからPのundecidabilityからPのrefutable wffの集合はrecursively enumerableでない事がわかる。したがってそれはaxiomatizableでない。即ちcombinatorial systemとして形式化できない事がわかる。この場合，このrefutable wffがsemanticの方法で定義されるであろうか。この問題は別の機会に論ずる事として，計算機械等による数学のconstructiveな方法とtranscendentalな方法とをめぐって興味ある議論が展開されるであろう。

References

[1] M. Davis: Computability and Unsolvability, 1958
[2] E. L. Post: Formal reductions of the general combinatorial decision problem, Am. Jour. of Math. 65 (197—268)