数理解析研究所講究録
第83巻 1970年 44-59

Korteweg-de Vries 方程式 Cauchy 問題の解の大域的存在定理

大阪市立大 工　　亀高 惟倫

Y. Kametaka : Korteweg-de Vries equation I, III, IV., Proc. Japan Acad. vol. 45 No. 7, 8 (1969) の結果を紹介する。dissipativeで線型な低階項及び非斉次項を付け加えたKdV方程式に対するCauchy問題を考える。

$$
(1)\quad \begin{cases} D_t u + uDu + D^3 u - \mu D^2 u + a(x,t)Du + b(x,t)u + g(x,t) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad (x,t) \in R^1 \times [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) \qquad\qquad x \in R^1 \end{cases} \qquad \left(D_t = \frac{\partial}{\partial t},\ D = \frac{\partial}{\partial x} \right)
$$

定義： $P_l^k = \mathcal{E}^k_{L^2_{loc}}(R^1) \cap \{\text{functions with period } l\}$

$Q_l^k = P_l^k + \mathcal{E}^k_{L^2}$ （直和） と記号を約束する。

仮定 1　$\mu \geq 0$ （定数）　$a(x,t),\ b(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{B}^\infty)$

仮定 2　$\mu \geq 0$ （定数）　$a(x,t),\ b(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(P_l^\infty)$

[主要定理]

①、$f(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^{\infty}$, $g(x,t) \in \mathcal{E}_t^{\infty}(\mathcal{E}_{L^2}^{\infty})$ とすると Cauchy 問題 (1) は $0 \leq t < \infty$ において $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^{\infty}(\mathcal{E}_{L^2}^{\infty})$ なる一意的な解を持つ。（仮定.1 の下で）

②、① において $\mathcal{E}_{L^2}^{\infty}$ を $\mathcal{P}_{\ell}^{\infty}$ で置きかえてよい。（仮定.2）

③、仮定.2 の下で $f(x) = f_0(x) + f_1(x) \in Q_{\ell}^{\infty}$

$g(x,t) = g_0(x,t) + g_1(x,t) \in \mathcal{E}_t^{\infty}(Q_{\ell}^{\infty})$ とすると Cauchy 問題 (1) は $0 \leq t < \infty$ において $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) \in \mathcal{E}_t^{\infty}(Q_{\ell}^{\infty})$ なる一意的な解を持つ。解 $u(x,t)$ の周期部分 $u_0(x,t)$ 及び decay する部分 $u_1(x,t)$ はそれぞれ次の Cauchy 問題 (2) 及び (3) の解である。

$$(2)\quad \begin{cases} D_t u_0 + u_0 D u_0 + D^3 u_0 - \mu D^2 u_0 + a(x,t) D u_0 + b(x,t) u_0 + g_0(x,t) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,t) \in R^1 \times [0,\infty) \\ u_0(x,0) = f_0(x) \qquad\qquad x \in R^1 \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} D_t u_1 + u_1 D u_1 + D^3 u_1 - \mu D^2 u_1 + D(u_0 u_1) + a(x,t) D u_1 + b(x,t) u_1 + g_1(x,t) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x,t) \in R^1 \times [0,\infty) \\ u_1(x,0) = f_1(x) \qquad\qquad x \in R^1 \end{cases}$$

この主要定理は次の存在定理の系である。

[存在定理]

仮定1の下で $f(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^{3(k+1)}$, $g(x,t) \in \mathcal{E}_t^{k+1}(L^2) \cap \left[\mathcal{E}_t^{k}(L^2) \cap \mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_{L^2}^{3}) \cap \cdots\cdots \cap \mathcal{E}_t^{0}(\mathcal{E}_{L^2}^{3k})\right]$ とすると Cauchy 問題 (1) は $0 \le t < \infty$ において $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^{k}(L^2) \cap \mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_{L^2}^{3}) \cap \cdots \cap \mathcal{E}_t^{0}(\mathcal{E}_{L^2}^{3k})$ なる一意的な解を持つ。 k は任意の自然数。

又上の存在定理において $\mathcal{E}_{L^2}^{k}$ を H_2^k で置きかえてよい

[存在定理証明]

以下存在定理の証明の概略を記す。 a priori estimate と局所存在定理を示せばよい。 a priori estimate を得るために Miura - Gardner - Kruskal による次の結果を使う。

[定理] (Miura - Gardner - Kruskal)

任意の自然数 k に対し KdV 方程式 $D_t u + uDu + D^3 u = 0$ は次の形の polynomial conserved density を持つ。

$$T_k(u) = (D^k u)^2 + c_k u (D^{k-1} u)^2 + Q_k(u, \cdots, D^{k-2} u)$$

$$T_0(u) = u^2$$

ここで c_k は u によらない定数、 Q_k は rank $k+2$ の多項式である。

定義： $D^k u$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ の多項式である T が $D_t T = DX$

なる X ($D^k u$ の多項式) を持つ時 T は polynomial conserved density という。

定義： 多項式 Q が有限個の rank m の単項式の和であるとき Q は rank m という。単項式に対しては

$$\operatorname{rank}\left[u^{\alpha_0}(Du)^{\alpha_1}\cdots(D^\ell u)^{\alpha_\ell}\right] = \sum_{j=0}^{\ell}\frac{1}{2}(j+2)\alpha_j$$

と定義する。

これらの conserved density を次々に全 x-軸上で積分する事により次の a priori estimate を得る。

[定理] (a priori estimate)

任意の自然数 k に対し、Cauchy 問題 (1) の解は次の形の a priori estimate を持つ。

$$|||D^k u|||_t \le U_k(t, |a|_t, \cdots, |D^k a|_t, |b|_t, \cdots, |D^k b|_t,$$
$$\|f\|, \cdots, \|D^k f\|, |||g|||_t, \cdots, |||D^k g|||_t)$$

ただし

$$|||u|||_t = \sup_{0\le s\le t}\|u(s)\|, \qquad \|u\| = \|u\|_{L^2(R^1)}$$

$$|a|_t = \sup_{0\le s\le t}|a(s)|, \qquad |a| = |a|_{\mathcal{B}^0}$$

U_k は各 argument について正値単調増大ななめらかな

函数、U_0 のみ例外的に $|Du|_t$ を含む。

U_k は $0 \le \mu \le \mu_0$ （$\mu_0 > 0$ 任意に固定）のはんいの μ には独立に取れる。

次に局所存在定理を得るために、次の様に近似解の列 u_n を構成する。

(4) $\qquad u_0(x,t) = f(x) \qquad (x,t) \in R^1 \times [0,\infty)$

(5)
$$\begin{cases} D_t u_n + u_{n-1} D u_n + D^3 u_n - \mu D^2 u_n + a(x,t) D u_n + b(x,t) u_n + g(x,t) = 0 \\ \qquad\qquad (x,t) \in R^1 \times [0,\infty) \\ u_n(x,0) = f(x) \qquad x \in R^1 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

n と k にかんする帰納法により次の様な u_n にかんする評価を得る。

［命題 1］

任意の自然数 k に対し $t_k = \min\left\{1, \dfrac{\log M}{C_1}, \dfrac{1}{C_k}\right\}$ $\left(t_0 = \min\left\{1, \dfrac{\log M}{C_1}\right\}\right)$ と置くと $i + j \le k$ なる任意の i, j に対し

$$|||D_t^i D^{3j} u_n|||_{t_k} \le c_{i,j} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

ただしここで次の様に約束する。

$$u(0) = f(x) ,$$

$$u^{(1)}(0) = -\Big[u(0) D u(0) + D^3 u(0) - \mu D^2 u(0)$$

$$+ a(x,0) D u(0) + b(x,0) u(0) + g(x,0) \Big]$$

$$u^{(k)}(0) = -\Big[\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} u^{(k-1-\ell)}(0) D u^{(\ell)}(0) + D^3 u^{(k-1)}(0)$$

$$- \mu D^2 u^{(k-1)}(0) + \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} D_t^{k-1-\ell} a(x,0) D u^{(\ell)}(0)$$

$$+ \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} D_t^{k-1-\ell} b(x,0) u^{(\ell)}(0) + D_t^{k-1} g(x,0) \Big]$$

$$c_{k,0}^2 = M \Big[\| u^{(k)}(0) \|^2 + ||| D_t^k g |||_1^2 + \cdots + ||| g |||_1^2 + 1 \Big] , \quad M > 1$$

$$c_{k-\ell-1,\ell+1} = c_{k-\ell,\ell} + C_{k-1} + ||| D_t^{k-\ell-1} D^{3\ell} g |||_1 \qquad (0 \le \ell \le k-1)$$

C_k は $c_{i,j}$, $|D_t^i D^{3j} a|_1$, $|D_t^i D^{3j} b|_1$ $(i + j \le k)$
の正係数多項式。

(5) より $\varphi_n = u_{n+1} - u_n$ に対する次の方程式を得る。

$$(6) \quad \begin{cases} D_t \varphi_n + u_n D \varphi_n + \varphi_{n-1} D u_n + D^3 \varphi_n - \mu D^2 \varphi_n \\ \quad + a(x,t) D \varphi_n + b(x,t) \varphi_n = 0 & (x,t) \in R^1 \times [0,\infty) \\ \varphi_n(x,0) = 0 & x \in R^1 \end{cases}$$

u_n にかんする評価（命題.1）を使い次の様な φ_n にかんする評価を得る。

[命題.2]

任意の自然数 k に対し $T_k = \min\{1, \frac{\log M}{C_{k+1}}, \frac{\rho}{(k+1)M}\}$ $(0<\rho<1)$ と置くと

$$|||D_t^k \varphi_n|||_{T_k}^2 + \cdots + |||\varphi_n|||_{T_k}^2 \le \rho\left[|||D_t^k \varphi_{n-1}|||_{T_k}^2 + \cdots + |||\varphi_{n-1}|||_{T_k}^2\right]$$

この評価よりただちに次の様に列 u_n の収束が従う。

$$D_t^i u_n \longrightarrow D_t^i u \quad \text{in } \mathcal{E}_t^0(L^2) \quad \text{as } n\to\infty \quad (0\le i\le k)$$

方程式(6)を見ると次の事も従う。

$$D_t^i D^{3j} u_n \longrightarrow D_t^i D^{3j} u \quad \text{in } \mathcal{E}_t^0(L^2) \quad \text{as } n\to\infty \quad (i+j\le k)$$

従って次の局所存在定理を得る。

[定理]（局所存在定理）

仮定.1の下で $f(x)\in \mathcal{E}_{L^2}^{3(k+1)}$

$$g(x,t)\in \mathcal{E}_t^{k+1}(L^2)\cap\left[\mathcal{E}_t^k(L^2)\cap\mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_{L^2}^3)\cap\cdots\cap\mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{3k})\right]$$

とすると Cauchy 問題(1)は $0\le t\le T_k$ において

$$u(x,t)\in\mathcal{E}_t^k(L^2)\cap\mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_{L^2}^3)\cap\cdots\cap\mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{3k})$$

なる一意的な解を持つ。

以上で存在定理の証明の概略を終るが最後に一意性の証明は通常の L^2 エネルギーの方法で得られる事を注意しておく。

次にKdV方程式と非常に近い関係にあると思われる次の方程式を考えよう。

(7) $$D_t v + v^2 Dv + D^3 v = 0.$$

(8) $$\sqrt{-6}\,Dv + v^2 = u$$

とおく(Miura の発見!)とKdV方程式との関係は次の様である。

(9) $$D_t u + uDu + D^3 u = (2v + \sqrt{-6}\,D)(D_t v + v^2 Dv + D^3 v)$$

次の様な例を考えると方程式(8)を u を与えて v についてとして解く時一意性は成り立たない。すなわち $\varphi(x) \in \mathcal{E}^{\infty}_{L^2}$ として $\varphi(x) > 0$ $\forall x \in R^1$, $\varphi(x) = \frac{1}{|x|}$ $|x| > R$ $(R > 0)$ なるものを取り

$$v = \frac{1}{2}\varphi - \frac{\sqrt{-6}}{2}\frac{D\varphi}{\varphi}, \quad w = v - \varphi, \quad u = \sqrt{-6}\,Dv + v^2$$

とおくとたがいに相異る v と w が同じ方程式(8)をみたす。

方程式(7)は KdV 方程式と(9)なる密接な関係を持つが(8)をvにかんして解く時一意性が成り立たないから(7)に対する Cauchy 問題の解の大域的存在定理は新たに作らなければならない。次の様に低階項も加えて Cauchy 問題を考える。

$$(10)\quad \begin{cases} D_t v + v^2 Dv + D^3 v + a(x,t)Dv + b(x,t)v + g(x,t) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x,t) \in R^1 \times [0,\infty) \\ v(x,0) = f(x) \qquad\qquad x \in R^1 \end{cases}$$

仮定.3 $\quad a(x,t),\ b(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{B}^\infty)$

[主要定理]

仮定.3の下で $f(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^\infty$, $g(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_{L^2}^\infty)$ とすると Cauchy 問題(10)は $0 \le t < \infty$ において $v(x,t) \in \mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{E}_{L^2}^\infty)$ なる一意的な解を持つ。 $\mathcal{E}_{L^2}^\infty$ は $\mathcal{D}_{L^2}^\infty$ で置きかえてもよい。

この主要定理は次の存在定理の系である。

[存在定理]

仮定.3の下で $f(x) \in \mathcal{E}_{L^2}^{3(k+1)+2}$

$$g(x,t) \in \mathcal{E}_t^{k+1}(\mathcal{E}_{L^2}^2) \cap \left[\mathcal{E}_t^k(\mathcal{E}_{L^2}^2) \cap \mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_{L^2}^5) \cap \cdots \cap \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{3k+2})\right]$$

とすると Cauchy 問題(10)は $0 \le t < \infty$ において

$$v(x,t) \in \mathcal{E}_t^k(\mathcal{E}_{L^2}^2) \cap \mathcal{E}_t^{k-1}(\mathcal{E}_{L^2}^5) \cap \cdots \cap \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}_{L^2}^{3k+2})$$

なる一意的な解を持つ。

KdV方程式のconserved densityに(8)を代入する事により方程式(7)は次の様なconserved densityを持つ事がわかる。

[定理] (conserved density)

方程式(7)は次の様なconserved densityを持つ。

$$\rho_0(v) = v^2$$

$$\rho_1(v) = (Dv)^2 - \frac{1}{6}v^4$$

$$\rho_2(v) = (D^2v)^2 - \frac{5}{3}v^2(Dv)^2 - \frac{1}{\sqrt{-6}}v^4 Dv + \frac{1}{18}v^6$$

$$\rho_k(v) = (D^k v)^2 + P_k(v, Dv)(D^{k-1}v)^2 + Q_k(v, \cdots, D^{k-2}v)D^{k-1}v$$

$$+ R_k(v, \cdots, D^{k-2}v) \qquad k = 3, 4, \cdots$$

ここで P_k, Q_k, R_k は多項式である。

このconserved densityを全x軸上で積分しkにかんする帰納法により次のa priori estimateを得る。

[定理] (a priori estimate)

任意の自然数kに対しCauchy問題(10)の解 $v(x,t)$ は次の

a priori estimate を持つ。

$$|||D^k v|||_t \leq V_k(t, |a|_t, \cdots, |D^k a|_t, |b|_t, \cdots, |D^k b|_t,$$

$$\|f\|, \cdots, \|D^k f\|, |||g|||_t, \cdots, |||D^k g|||_t)$$

ここで V_k は各 argument に対し正値単調増大なる如き函数であり V_0 は例外的に $|Da|_t$ を含む。

局所存在定理を得るために次の様に近似解の列 v_n を定義する。

$$(11) \qquad v_0(x,t) = f(x), \qquad (x,t) \in R^1 \times [0,\infty)$$

$$(12) \qquad \begin{cases} D_t v_n + v_{n-1}^2 D v_n + D^3 v_n + a(x,t) D v_n + b(x,t) v_n + g(x,t) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad (x,t) \in R^1 \times [0,\infty) \\ v_n(x,0) = f(x) \qquad x \in R^1 \end{cases}$$

n と k にかんする帰納法により v_n にかんする次の評価を得る。

[命題.3]

任意の自然数 k に対し $t_k = \min\{1, \frac{\log M}{C_k}\}$ $(M>1)$ とおくと.

$$\sup_{0\leq t\leq t_k} \|D_t^k v_n\|_{\mathcal{E}^2_{L^2}} \leq C_k, \quad \sup_{0\leq t\leq t_k} \|D_t^i D^{3j} v_n\|_{\mathcal{E}^2_{L^2}} \leq C_k \qquad (i+j\leq k)$$

ただし次の様に約束する。

$$v(0) = f(x)$$

$$v^{(1)}(0) = -\left[f^2(x)Df(x) + D^3f(x) + a(x,0)Df(x) + b(x,0)f(x) + g(x,0)\right]$$

$$v^{(k)}(0) = -\left[\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k-1} \frac{(k-1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!} v^{(\alpha_1)}(0)\, v^{(\alpha_2)}(0)\, Dv^{(\alpha_3)}(0) + D^3 v^{(k-1)}(0)\right.$$

$$\left. + \sum_{\beta=0}^{k-1} \binom{k-1}{\beta} D_t^{k-1-\beta} a(x,0)\, Dv^{(\beta)}(0) + \sum_{\beta=0}^{k-1} \binom{k-1}{\beta} D_t^{k-1-\beta} b(x,0)\, v^{(\beta)}(0) + D_t^{k-1} g(x,0)\right]$$

$$c_k^2 = M\left[\|v^{(k)}(0)\|^2_{\mathcal{E}^2_{L^2}} + 2\sum_{l=0}^{k-1} c_l^2 + \sup_{0\le t\le 1} \|D_t^k g\|^2_{\mathcal{E}^2_{L^2}}\right]$$

C_k は $c_0, \cdots, c_k$, $\sup_{0\le t\le 1} |D_t^i D^{3j} a|_{\mathcal{B}^2}$, $\sup_{0\le t\le 1} |D_t^i D^{3j} b|_{\mathcal{B}^2}$ $(i+j\le k)$

及び $\sup_{0\le t\le 1} \|D_t^i D^{3j} g\|_{\mathcal{E}^2_{L^2}}$ $(i+j\le k-1)$ の正係数多項式。

(12) より $\varphi_n = v_{n+1} - v_n$ にかんする次の方程式を得る。

$$(13)\quad \begin{cases} D_t\varphi_n + v_n^2 D\varphi_n + D^3\varphi_n + a(x,t)D\varphi_n + b(x,t)\varphi_n \\ \qquad + \varphi_{n-1}(v_n + v_{n-1})Dv_n = 0 \\ \varphi_n(x,0) = 0 \end{cases}$$

命題.3の評価を使って φ_n にかんする次の評価を得る。

[命題.4]

任意の自然数 k に対し $T_k = \dfrac{\rho}{C_{k+1}}$ $(0<\rho<1)$ とおくと、

$$\sup_{0\le t\le T_k} \sum_{i=0}^{k} \| D_t^i \varphi_n \|^2_{\mathcal{E}^2_{L^2}} \le \rho \sup_{0\le t\le T_k} \sum_{i=0}^{k} \| D_t^i \varphi_{n-1} \|^2_{\mathcal{E}^2_{L^2}}$$

この評価より

$$D_t^i v_n \longrightarrow D_t^i v \quad \text{in } \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}^2_{L^2}) \quad \text{as } n\to\infty \quad \text{for } 0\le i\le k$$

方程式(12)を見ると、

$$D_t^i D^{3j} v_n \to D_t^i D^{3j} v \quad \text{in } \mathcal{E}_t^0(\mathcal{E}^2_{L^2}) \quad \text{as } n\to\infty \quad \text{for } i+j\le k$$

したがって次の局所存在定理を得る。

[定理] (local existence)

$f(x)$, と $g(x,t)$ が[存在定理]で仮定したと同じ regularity を持てば Cauchy 問題(10)は $0\le t\le T_k$ において[存在定理]におけるのと同じ regularity を持つ一意的な解 $v(x,t)$ を持つ。

この局所存在定理と a priori estimate を合わせて[存在定理]を得る。一意性にかんする部分は KdV 方程式の場合と同じである。

Bibliography

[1] Korteweg, D. J., and de Vries, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave, Phlos. Mag., Vol.39, 1895, pp.422-443.

[2] Zabusky, N. J., and Kruskal, M. D., Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, Phys. Rev. Letters, Vol.15, 1965, pp.240-243.

[3] Zabusky, N. J., A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press, New York, 1967.

[4] Gardner, G. S., Greene, J. M., Kruskal? M. D., and Miura, R. M., A method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Letters, Vol.19, 1967, pp.1095-1097.

[5] Sjöberg, A., On the Korteweg-de Vries equation, Uppsala Univ., Dept. of Computer Sci., Report, 1967.

[6] Miura, R. M., Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, J. Math. Phys., Vol.9, 1968, pp.1202-1204.

[7] Miura, R. M., Gardner, C. S., and Kruskal, M. D., Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, J. Math. Phys., Vol.9, 1968, pp.1204-1209.

[8] Su, C. H., and Gardner, C. S., Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation, J. Math. Phys., Vol.1o, 1969, pp.536-539.

[9] Lax, P. D., Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Commun. Pure Appl. Math., Vol.21, 1968, pp.467-49o.

[1o] Mukasa, T., and Iino, R., On the global solution for the simplest generalized Korteweg-de Vries equation,

[11] Kametaka, Y., Korteweg-de Vries equation. I. Global existence of smooth solutions, Proc. Japan Acad., Vol.45, 1969,pp.552-555.

[12] Kametaka, Y., Korteweg-de Vries equation. II. Finite difference approximation, Proc. Japan Acad., Vol.45, 1969, pp.556-558.

[13] Kametaka, Y., Korteweg-de Vries equation. III. Global existence of asymptotically periodic solutions, Proc. Japan Acad., Vol.45, !969,

[14] Kametaka, Y., Korteweg-de Vries equation. IV. Simplest generalization, Proc. Japan Acad., Vol.45, 1969,

[訂正]

KdV方程式に対する a priori estimate の証明のために可算無限個の conserved density を使う様な書き方をしたが実際には最初の3個、すなわち u^2, $(Du)^2 - \frac{1}{3}u^3$, $(D^2u)^2 - \frac{5}{3}u(Du)^2 + \frac{5}{36}u^4$ を使うだけでいい様である。