

## Korteweg-de Vries 方程式の Riemann 問題

航 技 研 山本稀義

### §1 序 論

ここでは, Korteweg-de Vries 方程式 (以後 KdV 方程式と呼ぶ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (1.1)$$

について, 次の様に非周期的で無限遠で  $u(x, 0)$  が零でない様な初期値問題 (一般に Riemann 問題と呼ばれる。) について述べる。

$$(I) \quad u^I(x, 0) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$(II) \quad u^{II}(x, 0) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

この様な問題の解の存在についての証明はいまだ与えられていないが, (1.2), (1.3) に含まれる不連続が分散の効果によりある時刻の後に再調整されて連続 (あるいは不連続) な解に移行すると考え, その際の分散項のはたす効果に注目する。通常の流体力学においては, この様な分散の効果より

むしろ粘性による散逸の効果が卓越する。この場合は(1.1)とよく似た Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

を考える事が出来るが、(1.4) についてはその初期値問題の厳密解が陽に与えられているので<sup>1)</sup>、これを KdV 方程式の場合と比較する事は興味がある。今(1.1)、(1.4)で  $\delta=0$ ,  $\nu=0$  の極限を考えれば

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

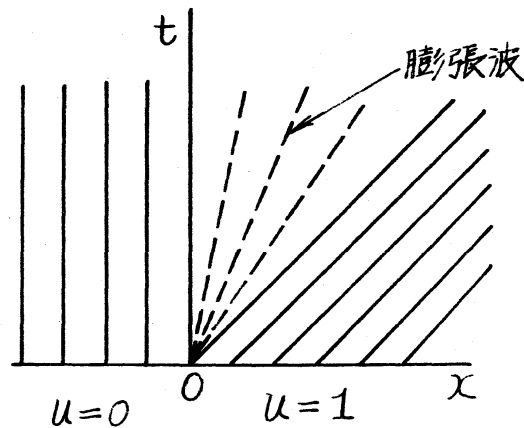
となるが、この厳密解は任意関数  $f$  を用いて

$$u = f(x - ut) \quad (1.6)$$

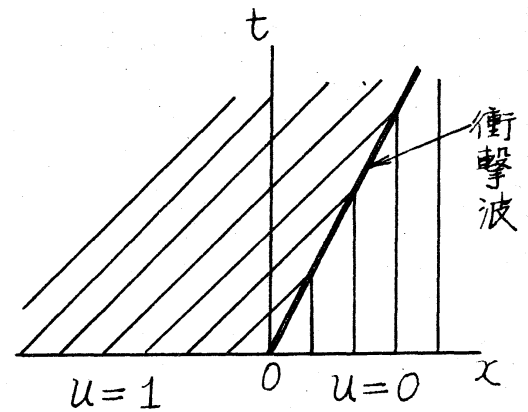
と与えられる。今初期条件を(1.2)とすれば(1.6)は

$$u^I(x, t) = \begin{cases} 1 & x > t \\ x/t & 0 < x < t \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

となる。これは領域  $0 < x < t$  において流体の膨張を意味する。一方(1.3)を考えればこの領域で圧縮が生じ、今(1.4)の  $\nu \rightarrow 0$  の漸近解を考えれば第1図の様に流体力学でよく知られた衝撃波が生ずる。



(a) 初期条件 (1.2)



(b) 初期条件 (1.3)

### 第1図 Burgers 方程式 (1.4) の $\nu \rightarrow 0$ の漸近解

以下においては KdV 方程式 (1.1) の代りに

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (1.8)$$

Burgers 方程式 (1.4) の代りに

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

を取扱う。また初期条件 (1.2), (1.3) を平行して考えるので (1.2) に対応するものには例えば  $u^{\pm}(x, t)$ , (1.3) に対応するものには  $u^{\mp}(x, t)$  のように書いて区別する。

## §2 KdV 方程式の初期値問題

今変数  $t, x$  の代りに新しい変数  $\xi, \tau$  を

$$\begin{cases} \xi = \lambda x / t^n \\ t = t \end{cases} \quad (2.1)$$

のように導入すれば (1.8) より

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3t \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\lambda^2} t^{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u^2}{2} \right) \quad (2.2)$$

ただし  $n = \frac{1}{3}$ ,  $\lambda = -n^{\frac{1}{3}}$  とした。ここで  $u$  を  $t^{\frac{2}{3}}$  の中で

$$u(\xi, t) = \lambda^2 \sum_n t^{\frac{2}{3}n} \varphi_{2n}(\xi) \quad (2.3)$$

と展開して (2.2) に代入し, 両辺の  $t$  の中を比較すれば次の微分方程式系が得られる。

$$n=0 \quad \mathcal{L}_0[\varphi_0] = 0 \quad (2.4)$$

$$n=1 \quad \mathcal{L}_2[\varphi_2] = \frac{1}{2}(\varphi_0^2)' \quad (2.5)$$

-----

$$\text{一般に } n=n \quad \mathcal{L}_{2n}[\varphi_{2n}] = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \xi} [\varphi_{(2n-2m-2)} \varphi_{2m}] \quad (2.6)$$

ここでオペレーター  $\mathcal{L}_{2n}$  は

$$\mathcal{L}_{2n} = \frac{d^3}{d\xi^3} - \xi \frac{d}{d\xi} + 2n \quad (2.7)$$

である。したがってこれらの方程式系が解かれれば (2.3) より解が求まる。

1)  $\varphi_0$  の解法

(2.4) 式は

$$\frac{d^3\varphi_0}{d\xi^3} - \xi \frac{d\varphi_0}{d\xi} = 0 \quad (2.8)$$

であるから  $\frac{d\varphi_0}{d\xi} = w$  とすれば

$$w'' - \xi w = 0 \quad (2.9)$$

となる。この方程式の独立な2つの解は Airy 関数と呼ばれる。おなじくそれを通例にならって  $Ai(\xi)$ ,  $Bi(\xi)$  とかけば

$$w \text{ は } w = C_1 Ai(\xi) + C_2 Bi(\xi) \quad (2.10)$$

となる。ここで  $C_1, C_2$  は任意定数である。今  $\varphi_0$  の満たすべき境界条件を考えると (2.3) で  $t=0$  とすれば

$$u(\xi, 0) = \lambda^2 \varphi_0(\xi) \quad (2.11)$$

となつて (1.2), (1.3) を考慮して

$$\begin{cases} \varphi_0^I(\infty, 0) = 0 \\ \varphi_0^I(-\infty, 0) = 1/\lambda^2 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \varphi_0^{II}(\infty, 0) = 1/\lambda^2 \\ \varphi_0^{II}(-\infty, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

が得られる。したがつて (2.10) より  $\varphi_0$  は

$$\varphi_0 = \int w dw = C_1 \int Ai(\xi) d\xi + C_2 \int Bi(\xi) d\xi \quad (2.14)$$

であるが、 $B_i(\xi)$ の方は $\xi$ の無限遠で指数関数的増大を示すので(2.12), (2.13)の境界条件を考慮して $C_2=0$ とおく。  
今 $A_i(\xi)$ の積分を $A_1$ として(以後 $A_i$ を $A$ と書く。)

$$A_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} A(t) dt \quad (2.15)$$

を導入すれば、 $A_1$ は $|\xi|$ の $\pm\infty$ で

$$A_1(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi = +\infty \\ -1 & \xi = -\infty \end{cases} \quad (2.16)$$

となる。(11頁参照) したがって(2.12), (2.13)を満

たす $\varphi_0$ としては

$$\varphi_0^I = -\frac{1}{\lambda^2} A_1 \quad (2.17)$$

$$\varphi_0^{II} = \frac{1}{\lambda^2} (1 + A_1) \quad (2.18)$$

が得られる。

## 2) $\varphi_2$ の解法

(2.5)は(2.17), (2.18)を考慮すれば

$$\mathcal{L}_2[\varphi_2^I] = \frac{d^3 \varphi_2^I}{d\xi^3} - \xi \frac{d\varphi_2^I}{d\xi} + 2\varphi_2^I = \frac{1}{2\lambda^2} (A_1^2) \quad (2.19)$$

$$\mathcal{L}_2[\varphi_2^{II}] = \frac{d^3 \varphi_2^{II}}{d\xi^3} - \xi \frac{d\varphi_2^{II}}{d\xi} + 2\varphi_2^{II} = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ A + \frac{1}{2} (A_1^2) \right\} \quad (2.20)$$

となる。これらの線型で非斉次な微分方程式の解を求めるためにここでオペレーター $\mathcal{L}_m$ について調べてみる。今関数

$f(\xi)$  について

$$\mathcal{L}_m[f] = 0 \quad (2.21)$$

を考えるとこの方程式をそれぞれ一回微分すれば

$$\frac{d}{d\xi} \mathcal{L}_m[f] = \mathcal{L}_{(m-1)} \left[ \frac{df}{d\xi} \right] = 0 \quad (2.22)$$

さらに  $\frac{d^m}{d\xi^m} \mathcal{L}_m[f] = \mathcal{L}_0 \left[ \frac{d^m f}{d\xi^m} \right] = 0 \quad (2.23)$

となり, (2.15) で述べた  $A_1$  を用いれば

$$\frac{d^m f}{d\xi^m} = A_1 \quad (2.24)$$

が得られる。ここで  $A_1$  の積分  $A_2, A_3$ , 一般に  $A_n$  を次の様に導入する。

$$A_2 = \int_{\infty}^{\xi} A_1(t) dt \quad (2.25)$$

$$A_3 = \int_{\infty}^{\xi} A_2(t) dt \quad (2.26)$$

---


$$A_n = \int_{\infty}^{\xi} A_{n-1}(t) dt \quad (2.27)$$

したがって (2.24) から  $f$  は

$$f = A_{m+1}(\xi) \quad (2.28)$$

となる。すなわち

$$\mathcal{L}_m[A_{m+1}] = 0 \quad (2.29)$$

となり,  $\mathcal{L}_2 = 0$  の斉次解は  $A_3$  である事がわかる。

また次の式が容易に証明される。

$$\mathcal{L}_m\left[\frac{A_n}{m-n+1}\right] = A_n \quad (2.30)$$

$$\mathcal{L}_{(m+n)}\left[\frac{1}{3}A_{m+1}A_{n+1}\right] = (A_m A_n)' \quad (2.31)$$

したがってこれより (2.19), (2.20) の特解として

$$\varphi_2^I = \frac{1}{6\lambda^2} A_2^2 \quad (2.32)$$

$$\varphi_2^{II} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}A_2^2 \right) \quad (2.33)$$

が得られる。ここで  $\varphi_2$  の満たすべき境界条件を考えると

$t=0$  で (2.11) が成り立つためには (2.3) の  $\varphi_2$  以上に

$$\text{して } |\varphi_{2n}(\xi)|_{\xi=\pm\infty} < \infty \quad (2.34)$$

であればよい。今  $A, A_1, A_2, A_3$  の  $\xi = \pm\infty$  のふるまいを調べると

$\xi \rightarrow \infty$  の時

$$A \rightarrow 0, A_1 \rightarrow 0, A_2 \rightarrow 0, A_3 \rightarrow 0$$

$\xi \rightarrow -\infty$  の時

$$A \rightarrow 0, A_1 \rightarrow -1, A_2 \rightarrow -\xi, A_3 \rightarrow -\frac{1}{2}\xi^2$$

} (2.35)

となるので、したがって  $\mathcal{L}_2$  の齊次解  $A_3$  を使って (2.34)

を満足する  $\varphi_2$  として

$$\varphi_2^I = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{1}{3}A_3 + \frac{1}{6}A_2^2 \right) \quad (2.36)$$

$$\varphi_2^{II} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{1}{3}A_3 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}A_2^2 \right) \quad (2.37)$$



が得られる。

これ以上の  $\varphi_4, \varphi_6, \dots$  についての解法は複雑となるので  
 ここでは  $\varphi_2$  までの結果を<sup>値</sup>数的に見てみる。ここで計算の便宜  
 のため  $A_2, A_3$  さらに一般に  $A_n$  を  $A_1, A, A' = \frac{dA}{d\xi}$  で表  
 わす式を求めておく。(2.29)より

$$A_n = \frac{1}{n-1} (\xi A_{n-1} - A_{n-3}) \quad (2.38)$$

したがって

$$A_2 = \xi A_1 - A' \quad (2.39)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} (\xi^2 A_1 - \xi A' - A) \quad (2.40)$$

となる。上式を(2.36), (2.37)に代入すれば

$$\varphi_2^I = \frac{1}{6\xi^4} (\xi^2 A_1 - \xi A' - A + \xi^2 A_1^2 - 2\xi A' A_1 + A'^2) \quad (2.41)$$

$$\varphi_2^{II} = \frac{1}{6\xi^4} (\xi^2 A_1 - \xi A' + A + \xi^2 A_1^2 - 2\xi A' A_1 + A'^2) \quad (2.42)$$

が得られる。結局これまでの結果を使用すれば  $u(\xi, \tau)$  は  
 次の様になる。

$$u^I(\xi, \tau) = -A_1 + \frac{1}{6\xi^2} (\xi^2 A_1 - \xi A' - A + \xi^2 A_1^2 - 2\xi A' A_1 + A'^2) \tau^{\frac{2}{3}} + O(\tau^{\frac{4}{3}}) \quad (2.43)$$

$$u^{II}(\xi, \tau) = 1 + A_1 + \frac{1}{6\xi^2} (\xi^2 A_1 - \xi A' + A + \xi^2 A_1^2 - 2\xi A' A_1 + A'^2) \tau^{\frac{2}{3}} + O(\tau^{\frac{4}{3}})$$

$$+A'^2)t^{\frac{2}{3}} + O(t^{\frac{4}{3}}) \quad (2.44)$$

さらにこれまで使用された Airy 関数  $A(\xi)$  は次の式で与えられる。

$$A(\xi) = C_1 f(\xi) - C_2 g(\xi) \quad (2.45)$$

$$C_1 = 3^{-\frac{2}{3}} / \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$C_2 = 3^{-\frac{1}{3}} / \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} f(\xi) &= 1 + \frac{1}{3!} \xi^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} \xi^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} \xi^9 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{\xi^{3k}}{(3k)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \xi + \frac{2}{4!} \xi^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} \xi^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} \xi^{10} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{\xi^{3k+1}}{(3k+1)!} \end{aligned}$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)_0 = 1$$

$$3^k \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)_k = (3\alpha+1)(3\alpha+4)\dots(3\alpha+3k-2)$$

ここで  $\alpha$  は任意定数

### 3) $|\xi| \gg 1$ における漸近解

前に与えられた様に  $A$  ならびに  $A'$ ,  $A_1$  は級数形で与えられるので  $|\xi|$  の大きい場合の漸近形がわかっていると解の遠方での様子を知らるために便利であるので以下に記す。

$\xi < 0$  の場合

$$A_1(\xi) \sim -1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\xi|^{-\frac{3}{4}} \left\{ \cos \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_{2k} \zeta^{-2k} + \sin \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_{2k+1} \zeta^{-2k-1} \right\} \quad (2.46)$$

$$A(\xi) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\xi|^{-\frac{1}{4}} \left\{ \sin \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k} \zeta^{-2k} - \cos \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1} \zeta^{-2k-1} \right\} \quad (2.47)$$

$$A'(\xi) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi}} |\xi|^{\frac{1}{4}} \left\{ \cos \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{2k} \zeta^{-2k} + \sin \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{2k+1} \zeta^{-2k-1} \right\} \quad (2.48)$$

$\xi > 0$  の場合

$$A_1(\xi) \sim -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^{-\frac{3}{4}} e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \zeta^{-k} \quad (2.49)$$

$$A(\xi) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^{-\frac{1}{4}} e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \zeta^{-k} \quad (2.50)$$

$$A'(\xi) \sim -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^{\frac{1}{4}} e^{-\xi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_k \zeta^{-k} \quad (2.51)$$

ここで  $\zeta$ ,  $\theta$ ,  $c_k$ ,  $d_k$ ,  $b_k$  は次の様な関数である。

$$\zeta = \frac{2}{3} |\xi|^{\frac{3}{2}}, \quad \theta = \zeta + \frac{\pi}{4}$$

$$c_0 = 1, \quad c_k = \frac{(2k+1)(2k+3)\cdots(6k-1)}{(216)^k k!}$$

$$d_0 = 1, \quad d_k = -\frac{6k+1}{6k-1} c_k$$

$$b_0 = 1, \quad b_k = \frac{2k-1}{2} b_{k-1} + c_k$$

上の式をこれまでに求められた  $\varphi_0, \varphi_2$  に代入してその leading term を求めると次の様になっている。

$\xi < 0$  の場合

$$\varphi_0^I \sim \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\xi|^{-\frac{3}{4}} \cos \theta\right) \quad (2.52)$$

$$\varphi_0^{II} \sim \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\xi|^{-\frac{3}{4}} \cos \theta \quad (2.53)$$

$$\varphi_2^I \sim -\frac{1}{6\lambda^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} |\xi|^{-\frac{1}{4}} \sin \theta \quad (2.54)$$

$$\varphi_2^{II} \sim -\frac{1}{6\lambda^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} |\xi|^{-\frac{3}{4}} \cos \theta \quad (2.55)$$

$\xi > 0$  の場合

$$\varphi_0^I \sim \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^{-\frac{3}{4}} e^{-\xi} \quad (2.56)$$

$$\varphi_0^{II} \sim \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^{-\frac{3}{4}} e^{-\xi}\right) \quad (2.57)$$

$$\varphi_2^I \sim -\frac{1}{6\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \xi^{-\frac{1}{4}} e^{-\xi} \quad (2.58)$$

$$\varphi_2^{II} \sim \frac{1}{6\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \xi^{-\frac{1}{4}} e^{-\xi} \quad (2.59)$$

### §3 Burgers 方程式の初期値問題

Burgers 方程式 (1.9) をこれまでに得られた KdV 方程式の結果と比較するため、§2 と同様に  $\tau$  の中級数展開形の解を求める。すなわち前と同様に  $\xi, \tau$  を

$$\begin{cases} \xi = \lambda x / \tau^2 \\ \tau = \tau \end{cases} \quad (3.1)$$

とおいて (1.9) に代入して整理すれば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - 2t \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\lambda} t^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{u^2}{2} \right) \quad (3.2)$$

が得られる。この場合は (2.2) に対応させるために  $n = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = n^{\frac{1}{2}}$  とおいた。 (2.3) に対応する  $u$  の展開としては

$$u(\xi, t) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} t^{\frac{1}{2}n} \varphi_n(\xi) \quad (3.3)$$

が適当となる。 (3.3) を (3.2) に代入して  $\varphi_n$  を求めればよいが、しかし Burgers 方程式についてはその厳密解が与えられているので<sup>1)</sup> それを使用して (3.3) を求める。すなわち (1.9) の解は初期条件 (1.2), (1.3) を考慮して  $\theta(x, t)$  が

$$\theta^I(x, t) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + e^{\frac{t-2x}{4}} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{t-x}{2\sqrt{t}} \right) \right\} \right] \quad (3.4)$$

$$\theta^{II}(x, t) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + e^{\frac{t-2x}{4}} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{t-x}{2\sqrt{t}} \right) \right\} \right] \quad (3.5)$$

と与えられると

$$u(x, t) = -2 \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (3.6)$$

から得られる。ここで  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$  である。したがって (3.3) は KdV 方程式の場合と同様に展開の第2項までをとれば

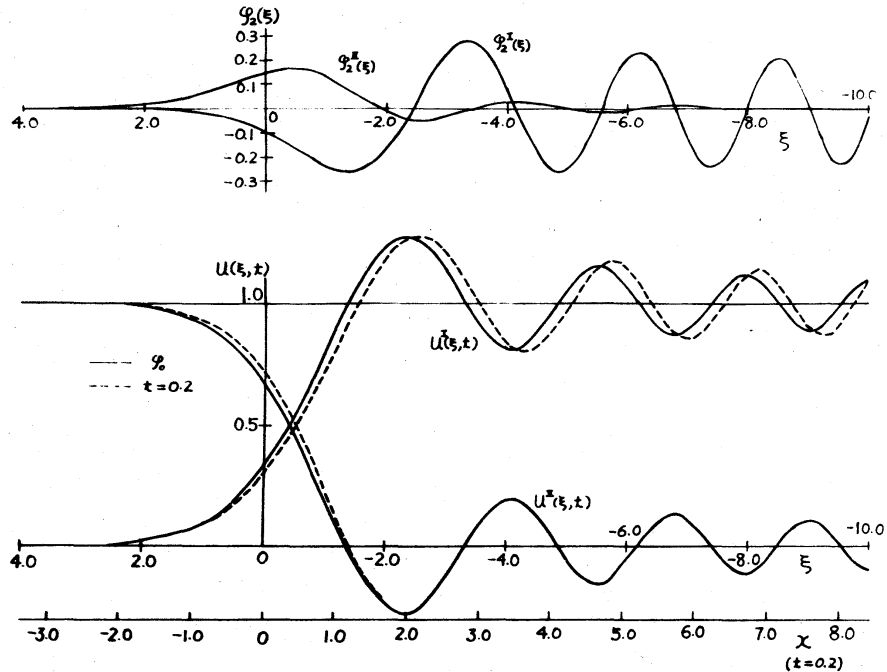
$$u^I(\xi, t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right\} - \frac{1}{4} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ \times \left[ \frac{\xi}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right\} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right] t^{\frac{1}{2}} + O(t) \quad (3.7)$$

$$u^{II}(\xi, t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right\} + \frac{1}{4} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ \times \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2}} \right) \right\} \right] t^{\frac{1}{2}} + O(t) \quad (3.8)$$

となる。

#### §4 結果と検討

これまでに得られた結果を計算し図に示す。第2図に KdV 方程式の解 (2.43), (2.44) および  $\varphi_0, \varphi_2$  の結果を示す。図で実線は  $\varphi_0, \varphi_2$  であり、下の図の破線は  $t=0.2$  における  $u^I, u^{II}$  で、その場合の  $\xi$  に対応する  $x$  の座標 ((2.1) 参照) が下に書かれている。下図の実線と破線の差が  $t=0.2$  における展開の第2項  $\varphi_2$  の寄与を示す。この図から特徴的な事は  $\xi$  の負の領域に振動の現われる事であり、 $\xi$  の正の領域の単調な減衰に比べて非対称を成す。これは KdV 方程式に含まれる分散項のためで、Burgers 方程式の粘性項と著るしく異なる効果である。これらの振動の振幅は (2.52) から (2.55) に示される様に、遠方では  $\varphi_0^{I,II}, \varphi_2^{II}$  は  $|\xi|^{-\frac{3}{4}}$  に比例して減衰

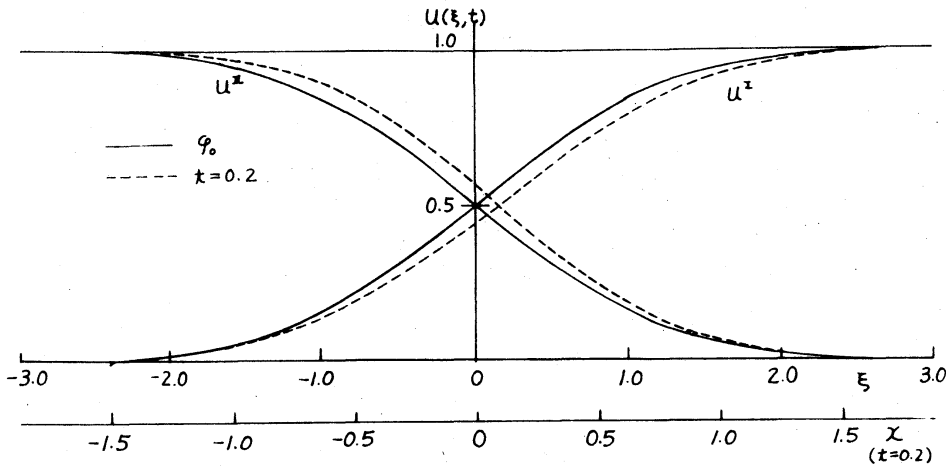


第2図 KdV方程式の解  $u(\xi, t)$  と  $\varphi_0(\xi)$

および  $\varphi_2(\xi)$

し、 $\varphi_2^I$  は  $|\xi|^{-1/2}$  に比例して減衰する。また  $\varphi_0$  が線型の効果しか含まないのに反して  $\varphi_2$  には非線型の効果が含まれているが、その際に初期条件 (1.2) の方が (1.3) に比べて  $\varphi_2$  の効果が強く現われる事は注目すべきである。 $u^I$  については非線型項の影響により現象の  $\xi$  の負の方向への広がりが著るしい。

第3図に Burgers 方程式について得られた結果を示す。実線は同様に展開の第1項を表わし、破線は  $t=0.2$  における



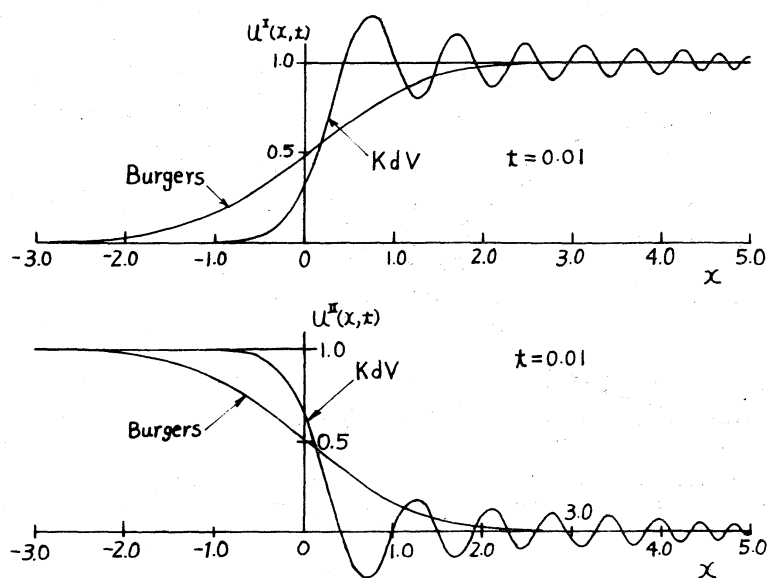
第3図 Burgers 方程式の解  $u(\xi, t)$

$u$ を示す。その場合の  $x$  の座標 (3.1) 参照) が下に書かれている。第2図と比べてこの場合は  $x$  の正負について対称的で、しかも単調に1から零に減衰する。また実線と破線の違いは非線形項による影響を表わすが KdV 方程式の場合と違って、2つの初期条件についてほぼ同程度の寄与を成す。

これまでは KdV 方程式の解と Burgers 方程式の解を別々に見てきたが、 $t=0.01$  の時刻で両者を比べた結果を第4図に示す。上の図は  $u^+$ 、下の図は  $u^-$  である。この図より粘性項  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  と分散項  $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  の違いは明らかである。

これまで KdV 方程式と Burgers 方程式の初期条件が (1.2), (1.3) で与えられる場合の初期値問題の解を求めた。そし





第4図 KdV 方程式と Burgers 方程式  
の比較

で得られた  $\epsilon$  の展開による解は展開の第2項まで解析的に求められた。したがって  $\epsilon$  が 1 に比べて比較的小さい場合に有効である。しかし求められた範囲内において分散項と粘性項の効果は明らかに異なり、またそれに加えて非線形項の効果の傾向を知る事ができた。最後に今後の問題としては、さらに  $\epsilon$  の適用範囲を広げる事で、そのためには  $\epsilon^4$  以上を解く事およびここで得られた連続な解析解を初期値として数値的に解く事が考えられる。

#### 文 献

- 1) E.Hopf: Commun. Pure Appl Math. 3 201 (1950)