数理解析研究所講究録
第 83 巻 1970 年 77-82

KdV方程式のソリトン

早大　理工　　武笠敏夫

§1.　非線型，分散型であるKdV方程式，すなわち

(1)　$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

は流体力学，プラズマ物理学，格子力学などに共通の型で現われる。特にこの方程式は solitary wave またはソリトンと呼ばれる特別の travelling wave；

(2)　$u(x,t) = S(x-ct)$，

$$S(x) = S(x,c) = 3c\,\mathrm{sech}^2\frac{1}{2}x\sqrt{c} \qquad c>0$$

を解に持つ。Zabusky と Kruskal は [1]，[2] で振幅の異なる２個のソリトンを初期値にとり数値実験を行なった結果ソリトンは相互作用しても，ある時刻の後にはそれぞれもとの形に復帰し，きわめて安定であることを発見した。また，彼らはソリトンに比べて波長の長い波を初期値とした実験である時刻でいくつかのソリトンに分解することを知り，$|x|\to\infty$ で０となる任意の初期条件でも，$t\to\infty$ ではやはりソリトン

が現われるであろうと予想されるに至った。

その後，これらの現象を説明する試みがいくつか為されたが，ソリトンの相互作用の問題は Lax [3] が2個のソリトンについて厳密に証明した。すなわち，任意の $c_1, c_2 > 0$ $(c_1 \neq c_2)$ に対して，一様に

(3) $$\left| d(x,t) - s(x - c_1 t - \theta_1^{\pm}; c_1) - s(x - c_2 t - \theta_2^{\pm}; c_2) \right| \to 0 \quad (t \to \pm\infty)$$

となる解 $u = d(x,t)$ が存在する。さらにこの解，すなわち double wave は任意の時刻 t に対して

(4) $$u_{xxxx} + \frac{5}{3} u u_x + \frac{5}{6} u_x^2 + \frac{5}{18} u^3 - (c_1 + c_2)\left(u_{xx} + \frac{1}{2} u^2\right) + c_1 c_2 u = 0$$

を満たす。逆に，u およびその derivatives が $\to 0$ $(|x| \to \infty)$ となるような (4) の解は double wave である。したがって，(4) の解で u およびその derivatives $\to 0$ $(|x| \to \infty)$ となるものを初期条件としたKdV方程式の解は double wave である。

この議論はN個のソリトンを扱う場合も形式的には可能である。実際，KdV方程式は可算無限個の t－不変な積分量 I_n が存在するのであって，その gradient G_n の一次結合；

(5) $$G_{N+1} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j G_j = 0$$

は係数を適当にとれば，N個のソリトンすなわち N－tuple wave を記述するであろう。

§2. 一方，Gardner, Greene, Kruskal, Miura らは

[4], [5] で Schrödinger operator ;

(6) $$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{6}u$$

は u が KdV 方程式に従うとき，その固有値は t ー不変であることを発見した。特に，u として 1 個のソリトンの解をとると，operator ;

$$L_s = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{6}s , \quad s = s(x-ct-\theta)$$

の固有函数は $\varphi = \mathrm{const.}\, s^{\frac{1}{2}}(x-ct-\theta)$ であり，その固有値は $\lambda = \frac{1}{4}c$ である (Lax [3])。

さらに，u として (3) で示された double wave をとり，

$$L_d = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{6}d , \quad d = d(x,t)$$

とすると，$\lambda = \frac{1}{4}c_1 , \frac{1}{4}c_2$ は L_d の固有値となっていることが厳密に証明できる。これはまた，次のように拡張される。すなわち，u が N 個のソリトンに分かれるような KdV 方程式の解とする； すべての x に対して一様に

(7) $$\left| u(x,t) - \sum_{j=1}^{N} s(x-c_jt-\theta_j^+ ; c_j) \right| \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_N$$

すると，operator $L_u = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{6}u$ は $\lambda = \frac{1}{4}c_1 , \frac{1}{4}c_2 , \cdots , \frac{1}{4}c_N$ を固有値に持つ。

興味があるのは，この逆の問題である。すなわち，任意の初期値 $u(x,0) = f$ に対する $L_f = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{6}f$ の固有値に対応するソリトンが $t \to \infty$ で (7) の意味で現われるかということを

考察する。ある場合には，これは肯定的に解ける。例えば，

(8) $$u(x,0) = 36\,\mathrm{sech}^2 x$$

に対する固有値は二つあって，$\lambda_0=4$, $\lambda_1=1$ がそれである。なぜならば，一般に

(9) $$L_f = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{6}f, \quad f = a\,\mathrm{sech}^2\frac{x}{b}$$

の固有値は $\lambda_n = \left(\frac{\varkappa - n}{b}\right)^2$, $0 \le n < \varkappa$ $\varkappa = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{2}{3}ab^2}\right)$

であって[6]，(8)に対しては $\varkappa = 2$ だからである。そこで，$\lambda_0=4$, $\lambda_1=1$ に対応する $t\to+\infty$ で期待されるソリトンは

$$s_0 = 48\,\mathrm{sech}^2 2(x-16t-\theta_0),$$

$$s_1 = 12\,\mathrm{sech}^2(x-4t-\theta_1)$$

となる。実際，(8)がこれらのソリトンに(7)の意味で分解するかどうかを調べるには，(8)が $c_1+c_2=20$, $c_1c_2=64$ とした double wave の式(4)を満たすことを確めるだけでよい。

一般に，次のことが予想される。すなわち，$\varkappa$ が整数ならば，$u(x,0)=f=a\,\mathrm{sech}^2\frac{x}{b}$ は $t\to\infty$ で(7)の意味でソリトンに完全に分解されるであろう。そのとき生成されるソリトンの個数は $\varkappa$ 個で，それぞれ speed $4\lambda_1, 4\lambda_2, \cdots, 4\lambda_\varkappa$ を持つであろう。その証明において，$\varkappa=1,2,3$ に対しては explicit な計算が可能である。さらに大きな $\varkappa$ に対しても，その f が $N=\varkappa$ とした(5)式を満たすことを確めることは，原理的に不可能なことではなかろう。

xが整数でないとき，例えば

(10) $\quad u(x,0) = f = \mathrm{sech}^2 x$

では $\quad \kappa = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{2}{3}}\right) \fallingdotseq 0.145$ ， $\quad \lambda_0 = \kappa^2$

したがって，$t\to\infty$ で期待されるソリトンはただ一つで

$$S_0 = 12\kappa^2 \mathrm{sech}^2 \kappa (x - 4\kappa^2 t - \theta_0)$$

である。そこで，large t を固定して $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u\,dx$ を作ってみると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,dx = 2 \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_0\,dx = 24\kappa \fallingdotseq 3.5$$

すなわち，t ー不変である I_0 に大きな食い違いが生ずる。

Zabusky [7] は，$\kappa = 0.8$ で数値実験を行なった。それによると，ただ一つの固有値 λ_0 に対応するソリトンが生成されると同時に，左方に振動状態が広がるということである。

参考文献

[1] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Letters 15 240 (1965).

[2] N. J. Zabusky, Nonlinear Partial Differential Equations Academic Press, New York, 223 (1967).

[3] P. D. Lax, Comm. Pure Appl. Math. XXI, 467 (1968).

[4] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, Phys. Rev. Letters 19, 1095 (1967).

[5] R. M. Miura, C. S. Gardner, and M. D. Kruskal, J. Mathematical Phys. 9, 1204 (1968).

[6] L. Landau and E. Lifschitz, Quantum Mechanics, Nonrelativistic Theory. (1958).

[7] N. J. Zabusky, Phys. Rev. 168, 124 (1968).