数理解析研究所講究録
第 84 巻 1970 年 28-57

Goldbach − Rényi の定理について

信州大理　　内山三郎

§1. 序

1948 年に A. Rényi [15] は, Viggo Brun の sieve method と Ju. V. Linnik の創案にかかる the large sieve の精密化とによって, つぎの定理を証明した:

<u>定理</u>　すべての偶数 N は素数 p と概素数 P との和, $N = p + P$, として表わされる.

ここに, 概素数 P とは整数 $P > 1$ で P に含まれる素因数の総数 (重複度を数える) $V(P)$ が有界,

$$V(P) \leqq K ,$$

であるものをいう.

充分大きな偶数 N だけを対象とするならばこの K の値は具体的に定められる. この場合 K の値について現在知られてい

る最良の結果は 3 である．（陳景潤[6] は $K \leqq 2$ であることが証明できたという報告をしているけれども，詳しい証明はまだ発表されていないようである．） これは A. A. Buhštab [12,13] に負うもので，その証明は（それ自身たいへん興味あるものであるが）非常に複雑な sieve method とそれにともなう数値計算によっている．この Buhštab の証明は，H. Halberstam, W. Jurkat and H.-E. Richert [7] および筆者[11] らによってかなり簡易化され，とくに，数値計算は全く不要となった． 以下，われわれの方法にしたがって（充分大きな偶数 N に対して）

$$K \leqq 3$$

の証明を述べる．

Buhštab の証明においてもわれわれの証明においても the large sieve はきわめて重要であって，それはつぎの‘平均値定理’の形で用いられる．

整数 $k \geqq 1$, ℓ に対して，$p \equiv \ell \pmod{k}$, $p \leqq X$ をみたす素数 p の個数を $\pi(X, k, \ell)$ で表わし，

$$R(X, k) = \max_{\substack{\ell \\ (k,\ell)=1}} \left| \pi(X, k, \ell) - \frac{\mathrm{li}\, X}{\phi(k)} \right|$$

とおく． ここに $\mathrm{li}\, X$ は対数積分で $\phi(k)$ は Euler の函数である．このとき，定数 $A > 0$ がどんなに大きくても

$$\sum_{m \leqq X^{\nu}} \mu^2(m)\, 2^{v(m)} R(X, m) = O\left(\frac{X}{\log^A X}\right)$$

が成立する．ただし

$$\nu = \frac{1}{2} - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0,\ 任意)$$

とする（A. I. Vinogradov [14], E. Bombieri [1]）．

ここで，$\mu(m)$ は Möbius の函数を，$v(m)$ は m の相異なる素因数の個数をあらわす．記号 O に含まれる定数は A, ε に依存する．

猶，Buhštab [13] は，ここでもし $\nu = 0.531$ とすることができるならば $K \leqq 2$ が得られること，Halberstam-Jurkat-Richert [7] は，$\nu > \frac{4}{7}$ (>0.571) ならば同じく $K \leqq 2$ となること，を注意している．

注意 1　Bombieri [1] の平均値定理は上に記したものよりも稍々強い形に述べられている．ただし，そこでは因子 $2^{v(m)}$ がないけれども，この因子を挿入しても，容易にわかるように，Bombieri の定理はそのまま成り立つ．

注意 2　Rényi [15] はまた，素数の双子の問題に関連して，$P = p + 2$ が概素数であるような素数 p が無限に多く存在することを証明している．Rényi もそこで注意しているように，われわれはこの結果をつぎの形に拡張し精密化する

ことができる．　すなわち，任意の整数 $k \neq 0$ に対して $V(p+2k) \leqq 3$ をみたす無限に多くの素数 p が存在する．

§2.　函数 $\varrho(u)$, $\theta(u)$, $\omega(u)$

次節以下の計算で必要となる標記の3つの函数の各々について，その定義と性質を簡単に述べる．　これらの詳細については［2, 3, 4, 5］を参照．

<u>定義</u>　つぎの3条件により $u \geqq 0$ において一意的に定まる函数を $\varrho(u)$ とする：

(i)　$\varrho(u)$ は $u > 0$ において連続；

(ii)　$\varrho(u) = 1 \quad (0 \leqq u \leqq 1)$；

(iii)　$u\varrho'(u) = -\varrho(u-1) \quad (u > 1)$.

$\varrho(u)$ についてつぎのことが知られている．

$$\varrho(u) > 0 \quad (u \geqq 0), \qquad \varrho(u) \downarrow 0 \quad (u \uparrow \infty);$$

$$\varrho(u) = \exp\left(-u\log u - u\log\log u + O(u)\right) \qquad (u > 3).$$

とくに

$$\varrho(u) = O(e^{-2u}) \qquad (u \geqq 0).$$

定義 $$\theta(u) = \int_0^u \rho(v)\,dv \qquad (u \geqq 0).$$

$\theta(u)$ はつぎの3条件をみたす：

(i) $\theta(u)$ は $u > 0$ において連続；

(ii) $\theta(u) = u \qquad (0 \leqq u \leqq 1)$；

(iii) $u\theta'(u) = \theta(u) - \theta(u-1) \quad (u > 1)$.

これを用いて

$$\theta(u) = e^{C} + O(e^{-2u}) \qquad (u \geqq 0)$$

を示すことができる．ここに C は Euler の定数である．

定義 つぎの3条件により $u > 0$ において一意的に定まる函数を $\omega(u)$ とする：

(i) $\omega(u)$ は $u > 0$ において連続である；

(ii) $\omega(u) = 1/u \qquad (0 < u \leqq 2)$；

(iii) $u\,\omega'(u) = -\omega(u) + \omega(u-1) \quad (u > 2)$.

この函数 $\omega(u)$ については

$$\omega(u) > 0 \quad (u > 0), \quad \omega(u) = e^{-C} + O\left(\frac{1}{\Gamma(u+1)}\right) \ (u \geqq 1)$$

が成り立つ．

さて，$\varrho(u)=1 \ (-1<u<0)$ により $\varrho(u)$ の定義域を $u>-1$ に拡げて

$$\begin{cases} g(u) = e^{C}\left(\omega(u) - \dfrac{\varrho(u-1)}{u}\right) \\ G(u) = e^{C}\left(\omega(u) + \dfrac{\varrho(u-1)}{u}\right) \end{cases} \qquad (u>0)$$

とおく．このとき，

$$g(u)=0, \qquad G(u)=\frac{2e^{C}}{u} \qquad (0<u\leqq 2)$$

は明らかであるが，さらに

$$G(u)=\frac{2e^{C}}{u} \qquad (2\leqq u\leqq 3),$$

$$g(u)=\frac{2e^{C}\log(u-1)}{u} \qquad (2\leqq u\leqq 4);$$

$$g(u)=1+O(e^{-2u}), \quad G(u)=1+O(e^{-2u}) \qquad (u\geqq 1),$$

$$G(u)-g(u)=\frac{2e^{C}}{u}\varrho(u-1)>0 \qquad (u>0),$$

$$g(u)\uparrow 1, \quad G(u)\downarrow 1 \qquad (u\uparrow\infty)$$

であることがわかる（[8] 参照）．また

$$(uG(u))'=g(u-1), \quad (ug(u))'=G(u-1) \qquad (u>1)$$

は見やすい．よって

$$\begin{cases} \displaystyle\int_v^u g(t-1)\,dt = uG(u)-vG(v) \\ \displaystyle\int_v^u G(t-1)\,dt = ug(u)-vg(v) \end{cases} \qquad (2\leqq v\leqq u).$$

§ 3. Selbergの方法およびBrunの方法の応用

N は充分大きな偶数として，以後これを固定する．そしてつぎの記号を用いる．

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\phi\left(\frac{n}{d}\right) \qquad (\phi(n)\text{の整数論的導函数});$$

$y > 2$, $z > 2$ に対して

$$Z_k(y, z) = \sum_{\substack{n \leqq y \\ p(n) < z \\ (n,k)=1}} \frac{\mu^2(n)}{f(n)}, \quad Z(y, z) = Z_N(y, z)$$

ここに，$p(1) = 1$，$n > 1$ に対しては $p(n) = n$ の最大の素因数，とする；

$$\lambda_n = \mu(n) \frac{\phi(n)}{f(n)} \frac{Z(y/n, z)}{Z(y, z)};$$

$$S_d(z) = \sum_{\substack{p \leqq N \\ N-p \equiv 0\,(d) \\ (N-p, P_z)=1}} 1, \quad \text{ただし } P_z = P_{z,N} = \prod_{\substack{p<z \\ p \nmid N}} p.$$

<u>定理 1</u>　$(d, NP_z) = 1$ ならば

$$S_d(z) \leqq \frac{\mathrm{li}\, N}{\phi(d)} \frac{1}{Z(y, z)} + R_d,$$

$$|R_d| \leqq \sum_{\substack{n_i \leqq y \\ n_i | P_z \\ (i=1,2)}} \left| \lambda_{n_1} \lambda_{n_2} R(N, d[n_1, n_2]) \right|,$$

が成り立つ． ここに，$[n_1, n_2]$ は n_1, n_2 の最小公倍数を表わす．

（証） これは良く知られた Selberg の sieve method による評価である． 実際，$\lambda_1 = 1$ に注意すれば

$$S_d(z) \leqq \sum_{p \leqq N} \Bigl(\sum_{\substack{n \\ N-p \equiv 0\,(dn) \\ n \mid P_z}} \lambda_n \Bigr)^2$$

これから容易に上の結果をえる．

補題 1 $n \mid P_z$ ならば $|\lambda_n| \leqq |\mu(n)|$.

（証） 略

$$S_k(y, z) = \sum_{\substack{n \leqq y \\ p(n) < z \\ (n, k) = 1}} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}$$

とおくと，

補題 2 $S_1(y, z) = \theta(u) \log z + O(1)$,

ただし $u = (\log y)/\log z$.

（証） [10] 参照．

補題 3

$$\frac{\phi(k)}{k} S_1(y,z) \leqq S_k(y,z) \leqq \frac{\phi(k)}{k} S_1(y,z) + O(\log\log 3k).$$

(証) 略

<u>補題4</u>　kは偶数とする．　$\log z = O(y(\log\log y)^{-2})$ に対しては

$$Z_k(y,z) \geqq \frac{\phi(k)}{k} \prod_{p \nmid k} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \cdot \theta(u) \log z + O\left(\frac{\phi(k)}{k}\right)$$

が成立し，またつねに

$$Z_k(y,z) \leqq \frac{\phi(k)}{k} \prod_{p \nmid k} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} \cdot \theta(u) \log z + O(\log\log 2k)$$

が成立する．　ただし　$u = (\log y)/\log z$ ．

(証) 補題2，3による．

補題4の第二の不等式は以下において必要としない．

さて，

$$x = N^{1/(2+\varepsilon)},$$
$$d_0(c) = x \exp(-c(\log x)^{\alpha}),$$
$$z_0 = \exp(\log x)^{\beta}$$

とおく．　ただし

$$\varepsilon > 0, \quad c > 0, \quad \frac{1}{2} < \beta < \alpha < 1$$

とする．　さらに，偶数 k に対して

$$P_k(z) = \prod_{\substack{p < z \\ p \nmid k}} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

とおき，　$P(z) = P_N(z)$　とする．

定理 1 において　$y = (x/d)^{1/2}$　とおき補題4の第一の不等式を用いるとつぎの定理をえる．

定理 2　　$(d, NP_z) = 1$，　$1 \leqq d \leqq d_0(c)$　とする．　$z_0 < z < x/d$　ならば

$$S_d(z) \leqq \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z) \left(\frac{e^C}{\theta(u/2)} + O\left(\frac{1}{\log z}\right) \right) + R_d(z).$$

ここに　$u = (\log(x/d))/\log z$　で

$$R_d(z) = \sum_{\substack{n \leqq x/d \\ p(n) < z}} \mu^2(n)\, 2^{v(n)}\, R(N, dn).$$

注意　任意の定数 $A > 0$ に対して　$R_d(z) = O\left(\frac{N}{\log^A N}\right)$.

定理 3　　$(d, NP_z) = 1$，　$1 \leqq d \leqq d_0(c)$　とする．　$2 < z \leqq z_0$　ならば

$$S_d(z) = \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z) \left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right) \right) + r_d(z).$$

ここに

$$|r_d(z)| \leqq \sum_{\substack{n \leqq x/d \\ p(n) < z}} \mu^2(n)\, R(N, dn).$$

（証） これは Brun の sieve method により証明される．

先ず
$$u=\frac{\log(x/d)}{\log z} \geqq \frac{\log(x/d_0)}{\log z_0} \geqq c(\log x)^{\alpha-\beta}.$$

z より小で N をわらない素数が全部で r 個あるとして，

これを
$$p_1<p_2<\cdots<p_r$$

とする． l， $1\leqq l<\frac{u}{2}-1$，はあとで定める整数とし，
$$v=\frac{u-2l+1}{u-2l-1}$$

とおく．そして，整数列
$$r\geqq r_1\geqq r_2\geqq\cdots\geqq r_s\geqq 1$$
をつぎのように定める． 充分小さな $\varepsilon_1>0$ をとる． $\delta_1=\delta_1(\varepsilon_1)>1$ が存在して $\delta\geqq\delta_1$ ならば
$$\sum_{\substack{\delta<p\leqq\delta^v\\ p\nmid N}}\frac{1}{p-1}<\log(v+\varepsilon_1)=\tau,$$
$$\prod_{\substack{\delta<p\leqq\delta^v\\ p\nmid N}}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)^{-1}<v+\varepsilon_1=\lambda.$$

そこで $r=r_1=\cdots=r_l$ とし， $l<i\leqq t+1$ に対して r_i は $p_j\leqq p_r^{1/v^{i-l}}$ をみたす最大の j とする．ここに $p_{r_{t+1}}^{1/v}<\delta_1\leqq p_{r_{t+1}}$． $2(s-t)>r_{t+1}$ をみたす s をとって $r_{t+1}=r_{t+2}=\cdots=r_s$ とおく．

このようにすると

$$p_r p_{r_1}^2 p_{r_2}^2 \cdots p_{r_s}^2 \ll p_r^{2l+1+\sum_{i=l+1}^{\infty} 1/v^{i-l}}$$
$$= p_r^{2l+1+2/(v-1)} = p_r^{u}$$
$$< z^u = \frac{x}{d}$$

であるから（記号 $\ll$ に含まれる定数は ε_1 に依存する），

$$S_d(z) \geqq (1-c)\frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z) + r_d(z),$$
$$c = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^\nu (\nu\tau)^{2l+\nu}}{(2l+2\nu)!},$$

をえる．容易に分るように，$\lambda\tau^2 < 4e^{-2}$ ならば

$$(0<)\, c < \frac{e^2\lambda\tau}{2\sqrt{\pi}\,(4-e^2\lambda\tau^2)}\left(\frac{e\sqrt{\lambda}\,\tau}{2}\right)^{2l}.$$

そこで $l=[u/4]$ とすれば適当な定数 $c_1>0$ に対して

$$0 < \frac{e\sqrt{\lambda}\,\tau}{2} < \frac{1}{2}, \quad c = O\left(\exp\left(-c_1(\log x)^{\alpha-\beta}\right)\right).$$

これにより $S_d(z)$ の下からの評価が得られる．上からの評価の仕方は下からの場合と殆ど同様である．

<u>定理 4</u>　$(d, NP_z)=1$ とする．$1 \leqq d \leqq d_0(c)$ ならば $1 \leqq \log z \leqq \log(x/d)$ に対して

$$S_d(z) \leqq \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z)\left(1 + O(e^{-u}) + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right) + R_d(z).$$

ここに $u = (\log(x/d))/\log z$．さらに，$1 \leqq d \leqq d_0(2c)$

ならば $\log z \leqq (\log(x/d))/2\log\log(x/d)$ に対して

$$S_d(z) = \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z)\left(1 + O\left(\frac{1}{\log^{\gamma} x}\right)\right) + O(R_d(z)).$$

ただし $\gamma = 2\beta - 1 > 0$.

（証）第一の不等式は

$$e^{C}/\theta(u/2) = 1 + O(e^{-u}) \qquad (u \geqq 1)$$

に注意すれば定理2より直ちに出る．第二の不等式は

$$\begin{aligned} S_d(z) &- \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z) \\ &= S_d(z_0) - \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z_0) - \sum_{\substack{z_0 \leqq p < z \\ p \nmid N}} \left(S_{dp}(p) - \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(dp)} P(p)\right) \end{aligned}$$

において右辺に定理2，3を適用し左辺に対する下からの評価をえて，これと第一の不等式とを組合せれば導かれる．

§4. Buhštab の方法

<u>補題</u> 5　　$2 < z_1 \leqq z \leqq \sqrt{y}$ とし

$$y_j = \frac{y}{p_1 \cdots p_j} \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

とおく．$(d, NP_z) = 1$ ならば，任意の正整数 r に対してつぎの式が成り立つ：

$$S_d(z) = S_d(z_1) + \sum_{1 \leqq i \leqq r-1} (-1)^i \sum_{\substack{z_1 \leqq p_i < \cdots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j},\ p_j \nmid N \\ (j=1,\cdots,i)}} S_{dp_1\cdots p_i}(z_1)$$

$$+ (-1)^r \sum_{\substack{z_1 \leqq p_r < \cdots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j},\ p_j \nmid N \\ (j=1,\cdots,r)}} S_{dp_1\cdots p_r}(p_r)$$

$$+ \sum_{1 \leqq i \leqq r} (-1)^i \sum_{\substack{z_1 \leqq p_i < \cdots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j},\ p_j \nmid N \ (j=1,\cdots,i-1) \\ \sqrt{y_i} \leqq p_i < y_i,\ p_i \nmid N}} S_{dp_1\cdots p_i}(p_i) .$$

（証） r についての帰納法による．詳細は［8, Theorem 1］を参照．

<u>補題</u> 6　　$2 < w \leqq z$ に対して

$$\frac{P_k(w)}{P_k(z)} = O\left(\frac{\log z}{\log w}\right), \quad \frac{1}{P_k(z)} = O(\log z),$$

$$\frac{P_k(w)}{P_k(z)} = \frac{\log z}{\log w} + O\left(\frac{(\log z)\log\log 2k}{\log^2 w}\right).$$

ただし，O-定数は k に無関係．

（証）略

$$h_\nu(u) = \begin{cases} g(u) & \nu \equiv 1 \pmod 2 \text{ のとき}, \\ \\ G(u) & \nu \equiv 0 \pmod 2 \text{ のとき}, \end{cases}$$

とおく.

<u>補題</u> 7　$2 < z_1 \leqq z \leqq \sqrt{y}$ および任意の ν の値に対して

$$P_k(z)\,h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z}\right)$$

$$= P_k(z_1)\,h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z_1}\right) - \sum_{\substack{z_1 \leqq p < z \\ p \nmid k}} \frac{P_k(p)}{p-1}\,h_{\nu+1}\left(\frac{\log(y/p)}{\log p}\right)$$

$$+ O\left(\frac{P_k(z)(\log z)\log\log 2k}{\log^2 z_1}\right).$$

(証)　$z_1 \leqq w \leqq z$ ならば, 補題 6 により

$$\sigma(w) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{P_k(z)} \sum_{\substack{z_1 \leqq p < w \\ p \nmid k}} \frac{P_k(p)}{p-1} = \frac{P_k(z_1)}{P_k(z)} - \frac{P_k(w)}{P_k(z)}$$

$$= \log z\left(\frac{1}{\log z_1} - \frac{1}{\log w}\right) + O\left(\frac{(\log z)\log\log 2k}{\log^2 z_1}\right).$$

いま

$$h(w) = h_{\nu+1}\left(\frac{\log(y/w)}{\log w}\right) \qquad (z_1 \leqq w \leqq z)$$

とおけば, $(\log(y/w))/\log w \geqq 1$ であることにより, $h(w)$ は $z_1 \leqq w \leqq z$ において単調, 一様有界かつ連続で

ある． よって

$$\frac{1}{P_k(z)} \sum_{\substack{z_1 \leqq p < z \\ p \nmid k}} \frac{P_k(p)}{p-1} h_{\nu+1}\left(\frac{\log(y/p)}{\log p}\right)$$

$$= \sigma(z) h(z) - \int_{z_1}^{z} \sigma(w)\, dh(w)$$

$$= \log z \int_{z_1}^{z} \frac{h(w)}{\log^2 w} \frac{dw}{w} + O\left(\frac{(\log z)\log\log 2k}{\log^2 z_1}\right)$$

$$= \frac{\log z}{\log y} \int_{(\log y)/\log z}^{(\log y)/\log z_1} h_{\nu+1}(t-1)\, dt + O\left(\frac{(\log z)\log\log 2k}{\log^2 z_1}\right)$$

$$= \frac{\log z}{\log y} \left\{ \frac{\log y}{\log z_1} h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z_1}\right) - \frac{\log y}{\log z} h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z}\right) \right\} + O\left(\frac{(\log z)\log\log 2k}{\log^2 z_1}\right).$$

ここで再び補題6を用いて結果をえる．

<u>補題</u> 8　$2 < z_1 \leqq z \leqq y$, $m = \min(z, y^{1/3})$ とすれば

$$\sum_{\substack{z_1 \leqq p < m \\ p \nmid k}} \frac{P_k(p)}{p-1} e^{-(\log(y/p))/\log p} \leqq P_k(z) e^{-(\log y)/\log z} \cdot \frac{e}{3}\left(1 + c_2 \frac{(\log y)\log\log 2k}{\log^2 z_1}\right).$$

ここに $c_2 > 0$ は絶対定数である．

（証）　$g(w) = e^{-(\log(y/w))/\log w}$　とおけば，これは $z_1 \leqq w \leqq m$ において単調かつ連続で　$0 < g(w) \leqq g(m)$.

よって

$$\frac{1}{P_k(z)} \sum_{\substack{z_1 \leqq p < m \\ p \nmid k}} \frac{P_k(p)}{p-1} e^{-(\log(y/p))/\log p}$$

$$= \frac{\log z}{\log y} \int_{(\log y)/\log m}^{(\log y)/\log z_1} e^{1-t}\, dt + O\left(\frac{(\log z)\log\log 2k}{\log^2 z_1} g(m)\right).$$

$$\frac{\log z}{\log y} e^{1-(\log y)/\log m} \leqq e^{-(\log y)/\log z} \cdot \frac{e}{3}$$

に注意すれば結果をえる.

<u>補題9</u>　　$2 < z_1 \leqq z \leqq \sqrt{y}$　とし

$$y_j = \frac{y}{p_1 \cdots p_j} \qquad (j = 1, 2, \cdots)$$

とおけば，任意の正整数 r および任意の ν の値に対して つぎの式が成り立つ.

$$P_k(z)\, h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z}\right)$$

$$= P_k(z_1)\, h_\nu\left(\frac{\log y}{\log z_1}\right) + \sum_{1 \leqq i \leqq r-1} (-1)^i \sum_{\substack{z_1 \leqq p_i < \cdots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j},\, p_j \nmid k \\ (j=1,\cdots,i)}} \frac{P_k(z_1)}{\phi(p_1 \cdots p_i)} h_{\nu+1}\left(\frac{\log y_i}{\log z_1}\right)$$

$$+ (-1)^r \sum_{\substack{z_1 \leqq p_r < \cdots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j},\ p_j \nmid k \\ (j = 1, \cdots, r)}} \frac{P_k(p_r)}{\phi(p_1 \cdots p_r)} h_{\nu+r}\left(\frac{\log y_r}{\log p_r}\right)$$

$$+ \sum_{1 \leqq i \leqq r} (-1)^i \sum_{\substack{z_1 \leqq p_i < \cdots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j},\ p_j \nmid k\ (j = 1, \cdots, i-1) \\ \sqrt{y_i} \leqq p_i < y_i,\ p_i \nmid k}} \frac{P_k(p_i)}{\phi(p_1 \cdots p_i)} h_{\nu+i}\left(\frac{\log y_i}{\log p_i}\right)$$

$$+ O\left(\frac{P_k(z) \log^2 z \log\log 2k}{\log^3 z_1}\right).$$

（証）残余項を除けば，補題7を用いて，補題5の証明と同様 r に関する帰納法で証明される．　残余項は

$$O\left(\frac{\log\log 2k}{\log^2 z_1}\right)\left(P_k(z) \log z + \sum_{1 \leqq i \leqq r-1} \sum_{z_1 \leqq p_i < \cdots < p_1 < z} \frac{P_k(p_i) \log p_i}{\phi(p_1 \cdots p_i)}\right)$$

$$= O\left(\frac{P_k(z) \log z \log\log 2k}{\log^2 z_1} \sum_{0 \leqq i \leqq r-1} \frac{1}{i!}\left(\sum_{z_1 \leqq p < z} \frac{1}{p-1}\right)^i\right)$$

$$= O\left(\frac{P_k(z) \log^2 z \log\log 2k}{\log^3 z_1}\right).$$

ここで

$$\sum_{z_1 \leqq p < z} \frac{1}{p-1} = \log \frac{\log z}{\log z_1} + O\left(\frac{1}{\log z_1}\right)$$

を用いた．

定理 5　$(d, NP_z) = 1$, $1 \leqq d \leqq x^{\delta}$ $(0 < \delta < 1)$ ならば $2 < z \leqq x/d$ に対して

$$S_d(z) \leqq \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z)\left(G\left(\frac{\log \frac{x}{d}}{\log z}\right) + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1/21}}\right)\right) + O\left((\log x)^{1/2} R_d(z)\right),$$

$$S_d(z) \geqq \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z)\left(g\left(\frac{\log \frac{x}{d}}{\log z}\right) + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1/21}}\right)\right) + O\left((\log x)^{1/2} R_d(z)\right).$$

（証）　$y_0 = x/d$ とおく．$\sqrt{y_0} < z \leqq y_0$ ならば $1 \leqq (\log y_0)/\log z < 2$ であるから，第一の不等式は定理 2 よりえられ，第二の不等式は自明である．よって以下

$$2 < z \leqq \sqrt{y_0}$$

と仮定する．d に対する條件から $y_0 \geqq x^{1-\delta}$，すなわち

$$\log y_0 \geqq (1-\delta) \log x .$$

さて，補題 5 および補題 9 を

$$k = N, \qquad z_1 = \exp(\log y_0)^{4/5},$$

$$\frac{1}{3} \frac{(\log y_0)^{1/5}}{\log\log y_0} \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^r \leqq \frac{3}{4} \frac{(\log y_0)^{1/5}}{\log\log y_0}$$

をみたす r に対して適用する．

もし $z < z_1$ ならば定理 5 はすでに証明されている（定理 4 参照）から，$z \geqq z_1$ としてよい．そこで

$$(-1)^{\nu}\left(S_d(z) - \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z)\, h_{\nu}\left(\frac{\log y_0}{\log z}\right)\right)$$

を考え，これを補題5，9に従って若干個の部分にわけ，各部分をそれぞれ評価する．

（第1項）　定理4により

$$(-1)^{\nu}\left(S_d(z_1) - \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z_1) h_{\nu}\left(\frac{\log y_0}{\log z_1}\right)\right)$$

$$= O\left(\frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)} P(z_1) \frac{1}{\log^{\gamma} x}\right) + O(R_d(z_1)) .$$

（第1の和）　$p_j < \sqrt{y_j}$ $(j=1,\cdots,i)$ から，とくに $p_1 < y_0^{1/3}$．

故に

$$y_j > y_0^{(2/3)^j}$$

は $j=1$ に対して成り立つ．これがいま $1 \leqq j \leqq i-1$ まで成り立つとすると，$p_{j+1} < \sqrt{y_{j+1}}$，$p_{j+1} < y_j^{1/3}$ であるから，

$$y_{j+1} = \frac{y_j}{p_{j+1}} > y_j^{2/3} > y_0^{(2/3)^{j+1}}$$

となり $j+1$ に対しても成り立つ．よって（$c_3, c_4, \cdots$ は正の定数）

$$p_1 \cdots p_{r-1} < y_0^{1-(\frac{2}{3})^{r-1}} = y_0 \exp\left(-\left(\tfrac{2}{3}\right)^{r-1} \log y_0\right)$$

$$\leqq y_0 \exp\left(-c_3 (\log y_0)^{4/5} \log\log y_0\right)$$

$$\leqq y_0 \exp\left(-c_4 (\log x)^{4/5} \log\log x\right) .$$

故に

$$d p_1 \cdots p_{r-1} \leqq x \exp\left(-c_4 (\log x)^{4/5}\right) .$$

従って $\alpha = \frac{4}{5}$，$\beta = \frac{3}{4}$，$\gamma = 2\beta - 1 = \frac{1}{2}$ ととることに

する．

また
$$\log z_1 \leqq \frac{\log y_i}{2\log\log y_i} \qquad (i=1,\cdots,r-1)$$

が成り立つ．何となれば
$$\log z_1 \leqq \frac{(2/3)^i \log y_0}{2\log\log y_0} \qquad (i=1,\cdots,r-1)$$
を示せば充分であるが，$i=r-1$ に対して
$$\frac{(2/3)^{r-1}\log y_0}{2\log\log y_0} = \frac{3\log y_0}{4\log\log y_0}\,\frac{1}{(3/2)^r} \geqq (\log y_0)^{4/5} = \log z_1$$

であるからよい．よって定理4により

$$(-1)^{\nu}\sum_{1\leqq i\leqq r-1}(-1)^i\sum_{p's}\left(S_{dp_1\cdots p_i}(z_1) - \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(dp_1\cdots p_i)}P(z_1)h_{\nu+i}\left(\frac{\log y_i}{\log z_1}\right)\right)$$

$$= O\left(\sum_{1\leqq i\leqq r-1}\sum_{p's}\frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(dp_1\cdots p_i)}P(z_1)\frac{1}{\log^{\gamma}x}\right)$$

$$+ O\left(\sum_{1\leqq i\leqq r-1}\sum_{p's}R_{dp_1\cdots p_i}(z_1)\right)$$

$$= O\left(\frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(d)}P(z_1)\frac{1}{\log^{\gamma}x}\sum_{1\leqq i\leqq r-1}\frac{1}{i!}\left(\sum_{z_1\leqq p<z}\frac{1}{p-1}\right)^i\right)$$
$$+ O(R_d(z)).$$

（第3の和）ここではつぎの形の項の和を考えている：

$$(-1)^{\nu+i}\left(S_{dp_1\cdots p_i}(p_i) - \frac{\mathrm{li}\,N}{\phi(dp_1\cdots p_i)}P(p_i)h_{\nu+i}\left(\frac{\log y_i}{\log p_i}\right)\right),$$

ここに $\sqrt{y_i} \leqq p_i < y_i$.

前と同様にして

$$y_j > y_0^{(2/3)^j} \qquad (j = 1, \cdots, i-1),$$

そして $y_i = y_{i-1}/p_i > y_{i-1}/y_i$, $y_i^2 > y_{i-1}$ であるから

$$y_i > y_0^{(1/2)(2/3)^i}$$

よって

$$p_1 \cdots p_r < y_0^{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^r},$$

$$d p_1 \cdots p_r \leqq x \exp\left(-c_5 (\log x)^{4/5}\right).$$

さて，もし $\nu + i \equiv 1 \pmod 2$ ならば $h_{\nu+i}(\log y_i / \log p_i) = 0$ であるから上記の項は上から 0 により評価される．もし $\nu + i \equiv 0 \pmod 2$ ならば定理 2 を適用して上からの評価として

$$O\left(\frac{\mathrm{li}\, N}{\phi(dp_1 \cdots p_i)} P(p_i) \frac{1}{\log z_1}\right) + R_{dp_1 \cdots p_i}(p_i)$$

をとる．従って第 3 の和はこれらの和として

$$O\left(\frac{\mathrm{li}\, N}{\phi(d)} P(z) \frac{\log z}{\log^2 z_1} \sum_{1 \leqq i \leqq r} \frac{1}{i!} \left(\sum_{z_1 \leqq p < z} \frac{1}{p-1}\right)^i\right)$$
$$+ O(2^r R_d(z))$$

により評価される．

かくして，第 2 の和を除いた各項から生じる誤差項は，補題 9 における残余項を考慮して，

$$O\left(\frac{\mathrm{li}N}{\phi(d)}P(z)\right)\left(\frac{P(z_1)}{P(z)}\frac{1}{\log^{\gamma}x}+\frac{P(z_1)}{P(z)}\frac{1}{\log^{\gamma}x}\exp\sum_{z_1\leqq p<z}\frac{1}{p-1}\right.$$
$$\left.+\frac{\log z}{\log^2 z_1}\exp\sum_{z_1\leqq p<z}\frac{1}{p-1}+\frac{\log^2 z\,\log\log N}{\log^3 z_1}\right)$$
$$+O(\log^{c_6} y_0\cdot R_d(z))$$
$$=O\left(\frac{\mathrm{li}N}{\phi(d)}P(z)\right)\left(\frac{\log z}{\log z_1}\frac{1}{\log^{\gamma}x}+\frac{\log^2 z}{\log^2 z_1}\frac{1}{\log^{\gamma}x}\right.$$
$$\left.+\frac{\log^2 z}{\log^3 z_1}+\frac{\log^2 z\,\log\log N}{\log^3 z_1}\right)$$
$$+O(\log^{c_6} y_0\cdot R_d(z))$$
$$=O\left(\frac{\mathrm{li}N}{\phi(d)}P(z)\frac{1}{\log^{1/10}x}\right)+O(\log^{c_6} y_0\cdot R_d(z)).$$

ここに
$$c_6=\frac{\log 2}{\log\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{5}\ ,\qquad 0<c_6<\frac{1}{2}\ .$$

（第 2 の和）　これは

$$(-1)^{\nu+r}\sum_{\substack{z_1\leqq p_r<\cdots<p_1<z\\ p_j<\sqrt{y_j}\,,\ p_j\nmid N\\ (j=1,\cdots,r)}}\left(S_{dp_1\cdots p_r}(p_r)-\frac{\mathrm{li}N}{\phi(dp_1\cdots p_r)}P(p_r)h_{\nu+r}\left(\frac{\log y_r}{\log p_r}\right)\right)$$

である．

さて，われわれはいつでも $r=r(\nu)$ を $\nu+r\equiv 0\pmod 2$

となるように(はじめから)とることができる. それは, r をわれわれの條件をみたす最大の正整数とすれば $r-1$ もまたこの條件をみたすからである. よって以下 $\nu + r \equiv 0 \pmod 2$ とする.

前と同様に

$$d p_1 \cdots p_r \leqq x \exp(-c_5 (\log x)^{4/5}).$$

そこで定理4を用いれば, 第2の和は上から

$$O\left(\frac{\mathrm{li} N}{\phi(d)} \sum_{p's} \frac{P(p_r)}{\phi(p_1 \cdots p_r)} e^{-(\log y_r)/\log p_r} \right)$$

$$+ O\left(\frac{\mathrm{li} N}{\phi(d)} \sum_{p's} \frac{P(p_r)}{\phi(p_1 \cdots p_r)} \frac{1}{\log p_r} \right) + \sum_{p's} R_{d p_1 \cdots p_r}(p_r)$$

により評価される. これの第2項は

$$O\left(\frac{\mathrm{li} N}{\phi(d)} \frac{P(z_1)}{\log z_1} \sum_{1 \leqq i \leqq r} \frac{1}{i!} \left(\sum_{z_1 \leqq p < z} \frac{1}{p-1} \right)^i \right)$$

$$= O\left(\frac{\mathrm{li} N}{\phi(d)} P(z) \frac{\log^2 z}{\log^3 z_1} \right)$$

で, 第3項は

$$\sum_{p's} R_{d p_1 \cdots p_r}(p_r) \leqq R_d(z).$$

故にこれらの項は前の残余項の中に吸収される.

上の第1項を評価するために

$$\sum_{\substack{z_1 \leqq p_r < \cdots < p_1 < z \\ p_j < \sqrt{y_j},\ p_j \nmid N \\ (j=1, \cdots, r)}} \frac{P(p_r)}{\phi(p_1 \cdots p_r)} e^{-(\log y_r)/\log p_r}$$

を考える. p_r に関する和は

$$U_r = \sum_{\substack{z_1 \leqq p_r < m_r \\ p_r \nmid N}} \frac{P(p_r)}{p_r - 1} e^{-(\log(y_{r-1}/p_r))/\log p_r},$$

$m_r = \min(p_{r-1}, y_{r-1}^{1/3})$, であるが, これは補題8により

$$U_r \leqq P(p_{r-1}) e^{-(\log y_{r-1})/\log p_{r-1}} \cdot \theta$$

をみたす. ここに

$$\theta = \frac{e}{3}\left(1 + c_2 \frac{\log\log N}{(\log y_0)^{3/5}}\right).$$

よって帰納的に

$$\sum_{p's} \frac{P(p_r)}{\phi(p_1 \cdots p_r)} e^{-(\log y_r)/\log p_r} \leqq P(z) e^{-(\log y_0)/\log z} \cdot \theta^r.$$

容易に分るように

$$\theta^r = O\left(\frac{1}{(\log y_0)^{1/21}}\right).$$

かくして第1項は

$$O\left(\frac{\mathrm{li}\, N}{\phi(d)} P(z) \frac{1}{(\log x)^{1/21}}\right).$$

これらの結果をあつめて定理5をえる.

注意

$$\frac{\log(3/e)}{\log(3/2)} > \frac{986}{4055}, \quad \frac{986}{4055} \cdot \frac{1}{5} > \frac{1}{21}.$$

§ 5. Kuhn の方法

補題 10 $2 < z_0 \leqq z < x$ とし

$$u_0 = \frac{\log x}{\log z_0}, \quad u = \frac{\log x}{\log z}$$

とおけば

$$\sum_{z_0 \leqq p < z} \frac{1}{p-1} G\left(\frac{\log \frac{x}{p}}{\log z_0}\right)$$

$$= \int_{u_0 - (u_0/u)}^{u_0 - 1} \frac{G(t)}{u_0 - t}\, dt + O\left(\frac{1}{\log z_0} G\left(\frac{\log \frac{x}{z}}{\log z_0}\right)\right).$$

(証) $z_0 \leqq w \leqq z$ に対して

$$\sigma(w) \overset{\text{def}}{=} \sum_{z_0 \leqq p < w} \frac{1}{p-1} = \log \frac{\log w}{\log z_0} + O\left(\frac{1}{\log z_0}\right).$$

いま

$$h(w) = G\left(\frac{\log \frac{x}{w}}{\log z_0}\right) \qquad (z_0 \leqq w \leqq z)$$

とおけば, $h(w)$ は $z_0 \leqq w \leqq z$ において単調かつ連続で $0 < h(w) \leqq h(z)$. よって

$$\sum_{z_0 \leqq p < z} \frac{1}{p-1} G\left(\frac{\log \frac{x}{p}}{\log z_0}\right) = \sigma(z) h(z) - \int_{z_0}^{z} \sigma(w)\, dh(w)$$

$$= \log \frac{\log z}{\log z_0} \cdot h(z) + O\left(\frac{1}{\log z_0} h(z)\right) - \int_{z_0}^{z} \log \frac{\log w}{\log z_0}\, dh(w)$$

$$= \int_{z_0}^{z} \frac{h(w)}{\log w} \frac{dw}{w} + O\left(\frac{1}{\log z_0} h(z) \right)$$

$$= \int_{u}^{u_0} G\left(u_0 \left(1 - \frac{1}{t} \right) \right) \frac{dt}{t} + O\left(\frac{1}{\log z_0} G\left(u_0 \left(1 - \frac{1}{u} \right) \right) \right)$$

$$= \int_{u_0 - (u_0/u)}^{u_0 - 1} \frac{G(t)}{u_0 - t} dt + O\left(\frac{1}{\log z_0} G\left(\frac{\log \frac{x}{z}}{\log z_0} \right) \right) .$$

以上の準備のもとに

$$K \leqq 3$$

の証明をすることができる.

$$2 < z_0 \leqq z < x = N^{1/(2+\varepsilon)} \qquad (\varepsilon > 0)$$

とする.

Kuhn [9] の考案に従ってつぎの條件をみたす素数 $p \leqq N$ の個数を $S(z_0, z; r)$ で表わす:

$N - p$ は $q < z_0$, $(q, N) = 1$ をみたすどんな素数 q でもわりきれない;

$N - p$ は $z_0 \leqq q < z$, $(q, N) = 1$ をみたす高々 r 個の素数 q でわりきれる;

$N-p$ は $z_0 \leqq q < z$, $(q, N)=1$ をみたすどんな素数 q に対しても q^2 ではわれない.

そうすると, 明らかに

$$S(z_0, z; r) \geqq S_1(z_0) - \frac{1}{r+1} \sum_{\substack{z_0 \leqq q < z \\ q \nmid N}} S_q(z_0) + O\left(\frac{N}{z_0} + z\right)$$

そこで

$$z_0 = x^{1/(3-2\varepsilon)}, \quad z = x^{2/(3-2\varepsilon)}$$

とおけば, 充分小さな $\varepsilon > 0$ の値に対して

$$N^{1/6} < z_0 < N^{1/3} < z < x$$

である.

$r = 2$ とすれば, 定理5および補題10により

$$S(z_0, z; 2) \geqq \mathrm{li}\, N \cdot P(z_0)\left(E_\varepsilon + o(1)\right)$$

をえる. ここに

$$E_\varepsilon = g(3-2\varepsilon) - \frac{1}{3}\int_{1-2\varepsilon}^{2-2\varepsilon} \frac{G(t)}{3-2\varepsilon-t}\, dt.$$

さて,

$$E_0 = \frac{2e^c \log 2}{9} > 0$$

は容易にわかる. E_ε は ε の函数として $\varepsilon=0$ において右連続であるから, 充分小さな $\varepsilon>0$ の値に対して $E_\varepsilon > E_0/2$

である．　そのように ε の値を固定すれば，$\upsilon(N)=O(\log N)$ であるから，　充分大きなすべての偶数 N に対して

$$S(z_0, z; 2) > 1 + \upsilon(N)$$

となる．　故に，そのような N に対しては

$$p \leqq N,\quad p \nmid N,\quad N-p > 1,\quad V(N-p) \leqq 3$$

をみたす素数 p が存在することとなる．

$$N = p + (N-p)$$

であるから，これで結論をえる．

文　　献

〔1〕E. Bombieri: On the large sieve. Mathematika, 12(1965), 201-225.

〔2〕N. G. de Bruijn: On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes. Nederl. Akad. van Wetensch. Proc., Ser. A, 52(1950), 803-812.

〔3〕N. G. de Bruijn: On the number of positive integers $\leqq$ x and free of prime factors > y. Nederl. Akad. van Wetensch. Proc., Ser. A, 54(1951), 50-60.

〔4〕N. G. de Bruijn: The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes. Journ. Indian Math. Soc., 15(1951), 25-32.

〔5〕N. G. de Bruijn and J. H. van Lint: Incomplete sums of multiplicative functions. I (and II) Nederl. Akad. van Wetensch. Proc., Ser. A, 67(1964), 339-347 (and 348-359).

〔6〕J.-R. Chen: On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. Kexue Tongbao, 17(1966), 385-386.

[7] H. Halberstam, W. Jurkat et H.-E. Richert: Un nouveau résultat de la méthode du crible. C. R. Acad. Sci. Paris, 264(1967) 920-923.

[8] W. B. Jurkat and H.-E. Richert: An improvement of Selberg's sieve method I Acta Arith., 11(1965), 217-240.

[9] P. Kuhn: Neue Abschätzungen auf Grund der Viggo Brunschen Siebmethode. Tolfte Skandinaviska Matematikerkongressen, Lund, 1953, 160-168.

[10] J. H. van Lint und H.-E. Richert: Über die Summe $\sum_{\substack{n \leq x \\ p(n) < y}} \frac{\mu^2(n)}{\phi(n)}$. Nederl. Akad. van Wetensch. Proc., Ser. A, 67(1964), 582-587.

[11] S. Uchiyama: On the representation of large even integers as sums of a prime and an almost prime. II Proc. Japan Acad., 43(1967), 567-571.

[12] A. A. Бухштаб: Новые результаты в исследовании прблемы Гольдбаха-Эйлера и проблемы простых чисел близнецов. Доклады акад. наук СССР, 162(1965), 735-738.

[13] A. A. Бухштаб: Комбинаторное усиление метода Эратосфенова решета. Успехи матем. наук, 22(1967), 199-226.

[14] A. И. Виноградов: О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле. Изв. акад. наук СССР, Сер. мат., 29(1965), 903-934.

[15] A. Реньи: О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа. Изв. акад. наук СССР, Сер. мат., 12 (1948), 57-78.

(A. Rényi: On the representation of an even number as the sum of a prime and of an almost prime. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 19(1962), 299-321.)