数理解析研究所講究録
第84巻 1970年 82-111

分割函数について

学習院大 理　　三井孝美

§1　自然数のある集合 $\mathbb{M}$ を考えて，自然数 n を $\mathbb{M}$ の元の和として表わす表わし方の数は

$$p(n, \mathbb{M}) = \sum_{n=a_1+\cdots+a_r\ ;\ a_i\in\mathbb{M}} 1$$

であり，これは次のような生成函数をもつ：

$$f(x, \mathbb{M}) = \prod_{a\in\mathbb{M}} (1-x^a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n, \mathbb{M}) x^n \quad (|x|<1)$$

最も簡単な場合は，$\mathbb{M}$ として自然数全体 $\mathbb{N}$ をとる場合で，このとき

$$p(n) = p(n, \mathbb{N}), \qquad f(x) = f(x, \mathbb{N})$$

と記す．$p(n, \mathbb{M})$ や $f(x, \mathbb{M})$ の性質を調べる問題を（一般）分割問題といい，$p(n, \mathbb{M})$ を（一般）分割函数ということにしよう．$p(n)$，$f(x)$ については，Euler などの研究もあるが，分割問題が急激に発展したのは，Hardy –

Ramanujan 以後であって，現在では，それは加法的整数論の中の一分野となっている．この方面の論文は多数あり，その研究方向も多岐にわたっていて，一口に分割問題とは言っても，解析数論の他の分野と同様に，はっきりしたまとまりがつかないのが現状である．そこで，この講究録の趣旨からは，少しはずれるかも知れないが，丁度良い機会なので，分割問題に関する文献を記録しておくのも無意義ではあるまいと考え，それらに簡単なコメントを添えてまとめてみた．コメントの方は，シンポジウムにおいての筆者の講演の前半の内容の一部でもあり，講演の後半では，筆者の考えている多変数の場合の分割函数の話があったのであるが，後者については ここでは簡単に触れるにとどめた．文献集とは言っても，関係論文をすべてあげつくしたわけではなく，重要な論文を落しているかも知れず，コメントなるものも（スペースの関係もあって）不十分であるが，それらの点については，読者の御諒承をこう次第である．

§2 オ1 にあげるべきは，やはり Hardy - Ramanujan であろう．（[59]，[60]，[140]）．生成函数を函数論的にとらえ，これから幾つかの基本的な問題及び方法を展開した．特に重要なのは，モジュラ函数との関係であり，Dedekind

のη-函数

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{2\pi i n\tau}\right) \qquad (\Im(\tau)>0)$$

と結びつけて，$f(x)$ のいわゆる変換公式

$$f(x) = \frac{x^{1/24}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\log\frac{1}{x}}\ \exp\left(\frac{\pi^2}{6\log 1/x}\right)\ f\left(\exp\left(-\frac{4\pi^2}{\log 1/x}\right)\right)$$

を得た．（$\eta(\tau)$ と $f(x)$ の無限積としての形をみれば，その間の密接な関係が想像される）．さらに，Cauchy の公式による $p(n)$ の表示

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=r}\frac{f(x)}{x^{n+1}}\,dx \qquad (r<1)$$

から，$p(n)$ を調べるために，Farey 分割を利用するいわゆる circle method を創始したが，この方法の重要性は広く認められて，その後の加法的整数論などに強く影響した．これらによって，まず $p(n)$ の漸近式

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\,n}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\right), \tag{1}$$

さらに，有名な漸近展開

$$p(n) = \sum_{k=1}^{[\alpha\sqrt{n}]} A_k(n)\Phi_k(n) + O(n^{-1/4})$$

が得られた．ここで

$$\Phi_k(n)=\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{2}\pi}\frac{d}{dn}\left(\frac{\exp\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right),$$

$$A_k(n)=\sum_{\substack{h=1\\(h,k)=1}}^{k}\omega_{h,k}\,e^{-2\pi i n h/k} \tag{2}$$

であり，$\omega_{h,k}$ は

$$\omega_{h,k}=\exp\left(\pi i\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)\right) \tag{3}$$

で定義される．

次に，整数論的にも興味ある問題は，Ramanujan の合同式である．これは，$f(x)$ から導かれる恒等式などによって得られた $p(n)$ の合同に関する関係である．例えば

$$\varphi(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) \qquad (|x|<1)$$

とおくとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(5n+4)x^n=5\frac{\varphi(x^5)^5}{\varphi(x)^6},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(7n+4)x^n=7\frac{\varphi(x^7)^3}{\varphi(x)^4}+49x\frac{\varphi(x^7)^7}{\varphi(x)^8}$$

となるから，直ちに

$$p(5n+4)\equiv 0 \pmod{5}, \qquad p(7n+5)\equiv 0 \pmod{7}$$

がわかる．さらに

$$p(11n+6)\equiv 0 \pmod{11}$$

も得られる.（[140]）.

§3 Hardy-Ramanujan の後に大きな貢献をなしたのは Rademacher である（[125]〜[139]）. まず, 変換公式について詳論し（[125]）, $p(n)$ の無限級数展開に成功した（[126], [127], [132]）. これは, Hardy-Ramanujan の漸近展開よりさらに巧妙に, パラメーターをうまく使って複雑な計算を行なうことにより得られた. その結果は,

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\, \frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \right)$$

である. その後, [132] では Ford circle を使う方法が考案された.

$p(n)$ の級数展開の成功に続いて, Rademacher は, 絶対モジュラ不変式 $j(\tau)$ の Fourier 展開

$$j(\tau) = \frac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)\, x^n \qquad (x = e^{2\pi i \tau}) \tag{4}$$

の係数についての同様な問題を取扱い, $c(n)$ の無限級数展開を得た（[128], [129], [139]）. その方法は, $p(n)$ の場合と殆ど同じである.（このとき, Kloosterman の和の評価が必要であるが, それは Estermann [39], Salié [144] 等の結果で十分である）. さらに進んで, 非負次

元のモジュラ形式の Fourier 係数の級数展開も考えられている (Lehner (3), Knopp [73], Lehmer [82], Zuckerman [163], [164]). 一方で, ある M に対する $p(n, M)$ の級数展開も考えられた (Haberzelle [52], Hua [63], Livingood [87], Niven [115])

§4　上述のような研究の基礎の一つは、生成函数の変換公式である. 先に述べたように, $\eta(\tau)$ の変換公式から $f(x)$ のそれは導かれるといってもよいが, $\eta(\tau)$ の変換公式については種々の証明がある (Rademacher [125], Iseki, K [65], 新しくは Siegel [154] がある. Fischer [41] も参考になるであろう)

ところで, k乗数による分割, すなわち

$$f_k(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{n^k})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_k(n) x^n$$

を生成函数とする $p_k(n)$ についての論文で, Wright [161] は, $f_k(x)$ にはモジュラ函数が応用できないので, 直接に函数等式を導いた. その結果も証明も, 興味あるものであるが, 主として留数の計算による証明は複雑で読みにくい. 後に, Schoenfeld [147] は, もっと簡単な証明を発表した. それは, 留数の計算も利用するが, それよりも, Riemann

の ζ 函数，Hurwitz の ζ 函数の函数等式の応用や，Mellin 変換を利用することがポイントで，その方法は Rademacher [125] に通じるものがある．

最近，Iseki, S [66]〜[72] は，$f_k(x)$ を含むような生成函数の函数等式を与えた．Apostol [4] はその証明を簡易化し，Hagis [53]〜[58] は同じような問題を扱っている．

一方で，$f(x)$ ではなく，$\log f(x)$ は，いわゆる Lambert 級数の形に表わされる：

$$\log f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m(1-x^m)} .$$

このような形の級数について函数等式を考えて，それから $f(x)$ にもどることも研究された．古くは Wigert [159] があり，Apostol [1], [2], Guinand [51], Maier [89], Mikolás [97], [98] に至って興味ある形になってきている．[97] では，$|x|<1$, $|\omega|<1$ として，

$$g_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p(1-x^n)}$$

から得られる級数

$$Q(x,\omega) = 2\sum_{p=0}^{\infty} g_{2p+1}(x)\,\omega^{2p},$$

の函数等式が考察され，$\zeta(\tau)$ や $g_{2p+1}(x)$ の函数等式が同時に得られた

Lambert 級数と少し形が異るが，加法的数論にも，何等かの関連がありそうに思われるものに，最近 Glaeske [42]～[46] が研究している Gitterfunktion がある。その例は

$$L_{-s}(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\frac{1}{e^{-2\pi i n\tau}-1}\qquad (\Im(\tau)>0)$$

で（[42]），これもある函数等式をみたす。特に $s=0$ のときは，Wigert [159] の得た式となる。$L_{-s}(\tau)$ 以外にも，Gitterfunktion が考えられているが，函数等式以外にはあまりこれといった性質は明らかにされておらず，将来の発展が望まれる。

§5. ところで，生成函数の変換公式や，係数の無限級数展開などが可能なのは，まだ分割問題のごく一部分であって，一般の $p(n,M)$ の事柄は，主として漸近式の面からと，組合せ論的な面からの研究以上にはあまり出ていない。

漸近式を考えることのできるような問題については，Hardy-Ramanujan [59] にもあり，その後のものには Apostol [2]，Brigham [14]，[15]，Erdös [37]，Grosswald [49]，

[50], Haselgrove-Temperley [61], Meinardus [91], Mitsui [99], Pennigton [117], Roth-Szekeres [143], Szekeres [156] などがある．方法上有効なものの一つは Tauber 型の定理を応用することであって，Ingham [64], Auluck-Haselgrove [12], Kohlbecker [74], Parameswaran [116], Schwarz [148]～[150] などがあげられよう．

Combinatorial な方面についても，文献をあげるだけにしておく．Carlitz [25] はシンポジウムの記録である．個々の論文としては，Atkin [5], Carlitz [26], Carlitz-Roselle [27], Chaundy [28], [29], Cheema [30], Cheema-Gordon [31], Cheema-Haskell [32], Göllnitz [47], Gordon [48], Roselle [142] などがある．

§6. Ramanujan の合同式については，Watson [158], Zuckerman [162] が拡張した結果を得たが，まだ生成函数の恒等式の導き方などに複雑な計算がつきまとって見通しがよくなかった．例えば，mod 7^2 の場合では，

$$\varphi(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n), \qquad \psi_r=\varphi(x^7)^r/\varphi(x)^{r+1}$$

として，次のような式が導かれている：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(49n+47)x^n = 2546\cdot 7^2\psi_4 + 48934\cdot 7^4 x\psi_8$$
$$+ 1418987\cdot 7^5 x^2\psi_{12} + 2488800\cdot 7^2 x^3\psi_{16} + 2394438\cdot 7^9 x^4\psi_{20}$$
$$+ 1437047\cdot 7^{11} x^5\psi_{24} + 4043313\cdot 7^{12} x^6\psi_{28} + 161744\cdot 7^{15} x^7\psi_{32}$$
$$+ 32136\cdot 7^{17} x^8\psi_{36} + 31734\cdot 7^{18} x^9\psi_{40} + 3120\cdot 7^{20} x^{10}\psi_{44}$$
$$+ 204\cdot 7^{22} x^{11}\psi_{48} + 8\cdot 7^{24} x^{12}\psi^{52} + 7^{25}\cdot x^{13}\psi_{56}.$$

これによって $p(49n+47) \equiv 0 \pmod{7^2}$ がわかる.（mod 13 では，このようにうまくはいかない．$\phi_r = \varphi(x^{13})^r/\varphi(x)^{r+1}$ とするとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(13n+6)x^n = 11\cdot\phi_1 + 36\cdot 13\cdot x\phi_3 + 38\cdot 13^2 x^2\phi_5$$
$$+ 20\cdot 13^3\cdot x^3\cdot\phi_7 + 6\cdot 13^4\cdot x^4\phi_9 + 13^5 x^5\cdot\phi_{11}$$
$$+ 13^5 x^5\phi_{13}$$

である）.

Rademacher [131] は，$\eta(\tau)$ を使って，これらの恒等式を見通しよく導いた．Ramanujan の恒等式は，次のようにも書かれる：

$$\sum_{\lambda=0}^{4} \eta\left(\frac{\tau+24\lambda}{5}\right)^{-1} = 5^2\,\frac{\eta(5\tau)^5}{\eta(\tau)^6} \tag{5}$$

逆に，この式を導くためには,

$$\sum_{\lambda=0}^{4} \eta(5\tau)\,\eta\left(\frac{\tau+24\lambda}{5}\right)^{-1}, \qquad 25\left(\frac{\eta(5\tau)}{\eta(\tau)}\right)^{6}$$

を考える．この二つの函数は，共に level が 5 の合同部分群に属する保型函数であり，一方この二つの函数の差を考えると，この群の基本領域で有界である．従ってそれは定数で，特に $\tau \to i\infty$ とするとき 0 になるから，この二つの函数は等しい．これから（5）が得られる．mod 5^2 のときも同様な考察ができる．さらに Rademacher は，mod 7^2，mod 5^3 のときも同じ idea が使えるといっているが，そのときは，Ramanujan の合同式のタイプの結果が得られるとは限らない。法が 5，7，11 の3つの素数から成りたっている場合には，

$$24n \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ 5^a 7^b 11^c) \quad \text{ならば}$$

$$p(n) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 5^a 7^{[\frac{b+2}{2}]} 11^c)$$

という結果（Atkin [7]）が最終的であろう．

13以上の素数が法の場合には，このような簡単な式は得られていないが，ある程度の結果はごく最近になって少しづつ明らかにされている．それと共に，$j(\tau)$ の係数 $c(n)$（(4) の式をみよ）の合同関係についても研究がなされている．（Lehner [85]，[86]，Mordell [101]，Newman [105]～[113]）例えば [110] では次のような式が

導かれている：（以下で p は素数とする）

$$c(13np)+c(13n)c(13p)+p^{11}c(13n/p)\equiv 0 \pmod{13}$$

（x が整数でないとき $c(x)=0$ ときめる）．さらに

$$c(13^2 n)\equiv 8c(13n) \pmod{13}$$

であり，

$$t(n)=-c(13n)$$

とおくとき，$p\neq 13$ ならば

$$t(np)-t(n)t(p)+\tilde{p}\,t(n/p)\equiv 0 \pmod{13}$$

ここで $\tilde{p}$ は，$p\tilde{p}\equiv 1 \pmod{13}$ によりきめる．

最近，Atkin-O'Brien [10] は，次の結果を得た：

$\alpha\geqq 1$ に対して，ある k_α ($13\nmid k_\alpha$) があって，

$$c(13^{\alpha+1}n)\equiv k_\alpha c(13^\alpha n) \pmod{13^\alpha}$$

また，

$$P(N)=\begin{cases} p(n) & N=24n-1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき，および } N \text{ が整数でないとき} \end{cases}$$

とおくと，$\alpha\geqq 1$ に対してある K_α ($13\nmid K_\alpha$) があって，

$$P(13^{\alpha+2}N)\equiv K_\alpha P(13^\alpha N) \pmod{13^\alpha}$$

さらに［10］では，２つの予想が述べられている：

1° $\alpha \geqq 1$ に対して，

$$t(n) \equiv c(13^\alpha n)/c(13^\alpha) \pmod{13}$$

とおくとき

$$t(np) - t(n)t(p) + \tilde{p}\, t(n/p) \equiv 0 \pmod{13^\alpha}$$

2° $\alpha \geqq 1$，$p \geqq 5\ (\neq 13)$ ならば．ある $k = k(p, \alpha)$ があって，

$$P(p^2 13^\alpha N) - \left\{k - \tilde{p}^2\left(\frac{-3\cdot 13^\alpha N}{p}\right)\right\}P(13^\alpha N) + \tilde{p}^3 P\left(\frac{13^\alpha N}{p^2}\right)$$
$$\equiv 0 \pmod{13^\alpha}$$

［10］では $\alpha = 1, 2$ の場合が証明されている（一般の α の場合はその後証明されたそうである）

実例として，$\alpha = 1$ の場合は，丁度 $P(2015) = p(84) \equiv 0 \pmod{13}$ であることから

$$P(2015n^2) = p\left(84n^2 - \frac{n^2-1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{13}$$

が知られる．ただし $(n, 6) = 1$ とする．

$\alpha = 2$ の場合ならば，$(n, 6) = 1$ として

$$P(13^2\cdot 479\cdot n^2) = p\left(3373\cdot n^2 - \frac{n^2-1}{24}\right) \equiv 0 \pmod{13^2}$$

さらに

$$p(97^2\cdot 103^2\cdot 13^2\cdot N)\equiv 0 \pmod{13^2}$$

ただし　$\left(\frac{N}{97}\right)=\left(\frac{N}{103}\right)=1$　とする。この例は，

$$p(1685441105467799n-695097549605)\equiv 0 \pmod{13^2}$$

この最後の例でわかるように，

$$p(n)\equiv a \pmod{q},\qquad n\leqq x$$

となるようなnの数を $S(x:q,a)$ とするとき，例えば，$S(x:13^2,0)/x$ は，$x\to\infty$ のとき，下極限が正である。このような一種の密度についてAtkin [6] は，q が31以下の素数である場合を調べた。一方で，Newman [114] は，

$$\underline{\lim}\ \frac{S(x:5,0)}{x}\geqq\frac{1}{5}+\frac{36}{651605}$$

という結果を得ている。（少くとも mod 5 で，$p(n)$ は一様には分布していないのである）

§7　(3) の式 $\omega_{h,k}$ の中にある和は，Dedekind の和といわれるものである。一般的には，実数 x に対して，

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - 1/2 & x \text{ が整数でないとき} \\ 0 & x \text{ が整数のとき} \end{cases}$$

として,

$$s(h, k) = \sum_{m=1}^{k} \left(\left(\frac{m}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{mh}{k}\right)\right)$$

を Dedekind の和という. この性質は詳しく調べられているが (Dedekind [34], Rademacher-Whiteman [138]) 特に次の式は相互法則といわれる.

$$12\, s(h, k) + 12\, s(k, h) = -3 + \frac{h}{k} + \frac{k}{h} + \frac{1}{hk}$$

Dedekind の和の拡張や種々の性質については, さらに Apostol [3], Carlitz [17]~[24], [26], Mikolás [98] Mordell [103], Rademacher [125], [133], [135], [137], Rieger [141] などがある. Carlitz は, $((x))$ の定義が mod 1 で 1次の Bernoulli の多項式と一致するとみて, n次の Bernoulli 多項式を含むような拡張された和を考えた. Rieger は, 代数体に拡張した和を考察している. また, Rademacher [135] は, $s(h, k)$ を利用して行列函数を定義した. すなわち, モジュラ群 Γ の元 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$\Psi(M) = \begin{cases} b/d & c = 0 \text{ のとき} \\ \dfrac{a+d}{c} - 12\, \mathrm{sgn}\, c \cdot s(a, |c|) - 3\, \mathrm{sgn}(c(a+d)) & c \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくと,

$$\Psi(M) = \Psi(-M), \qquad \Psi(M^{-1}) = -\Psi(M)$$

$$\Psi(M_1^{-1} M M_1) = \Psi(M)$$

などの性質が得られる. Meyer [95] は, この $\Psi(M)$ を利用して, 2次体上の class invariant を作った. その他に, Dedekind の和の応用あるいは関連した問題を扱ったものには, Burde [16], Dieter [35], [36], Lang [80], Meyer [93]〜[96], Salié [145], Schoenberg [146], Wohlfahrt [160] 等がある. また, Dedekind の和から作られる (2) の和 $A_k(n)$ について, Whiteman [158] は,

$$A_k(n) = \sqrt{\frac{k}{3}} \sum_{r} (-1)^r \cos \frac{6r+1}{6k}\pi \qquad (6)$$

と表わされることを証明した. ここに r は, k を法として

$$(3r^2 + r)/2 \equiv -n \pmod{k}$$

をみたすような整数をわたるものである. ((6) の式は, Selberg が数年前に得ていたという) その後 Rademacher [136] は, $\eta(\tau)$ を利用して (6) を簡単に導いた.

以上の大雑把な概観を通じても感じられることの一つは, $p(x)$ と $\eta(\tau)$, あるいは $p(x)$ とモジュラ函数の深い結びつきであろう. 変換公式などについては, この関係も当然でも

あるが、その他の問題に対しても、特に最近は、モジュラ函数と関係づける方法が目立っているように思われる。ここでは文献をあげるだけにとどめたが、Hardy-Ramanujan-Rademacher流の級数展開が、さらに広範囲の分割問題と共に、Farey分割やcircle methodを使わずにモジュラ函数の理論により論じられるということも特筆すべきであろう（Petersson [118]〜[123]）

§8　これまでは、有理数体においての問題であった。そこからはなれると大分様子が違ってくる。例えば、代数体に問題を拡張することを考えよう。簡単のため、n次の総実代数体Kで考える。Kの総正な整数μを、同じく総正な整数の和として表わす表わし方の数は、

$$P(\mu)=\sum_{\mu=\mu_1+\cdots+\mu_s} 1 \qquad (\mu_i \text{は総正})$$

となり、$P(\mu)$は有理数体の$p(n)$に相当する。この生成函数は、$\Re y_i>0$であるような$y_1,\cdots,y_n$をとって

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\prod_{\mu\succ 0}\left(1-\exp\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\mu^{(i)}\right)\right)^{-1}$$

とすればよい。（$\mu\succ 0$はμが総正であることを示す記号）Meinardus [90]は、実2次体で$P(\mu)$を考察し、μの

ノルム $N(\mu)$ が大きくなるときの $P(\mu)$ の漸近式を得た。一般の場合も，総実でない代数体に対しても適当に生成函数を考えて，$P(\mu)$ に相当するものの漸近式が得られている（筆者による）。

この場合には，生成函数の変形については Rademacher [124] の結果が利用され，残余項の評価に必要な三角和の取扱いや評価については Siegel [152], [153], Mitsui [100] などにより解決されていて，いわば解析的な道具立が揃っているのであるが，$P(\mu)$ の漸近式以外の問題，例えば生成函数の変換とか，$P(\mu)$ の数論的性質などは全く知られていない。有理数体のような，分割函数とモヂュラ函数の密接な関係は見当らず，それらは代数体では，ばらばらに発展していくようにさえ思われる。すでに Rademacher [130] が言っているように，分割函数とモヂュラ函数の関係は，有理数体においてのみ見られる"偶然的"なものかも知れない。

§9　もう一つ，多変数あるいは多次元の場合への拡張として，行列を対象とする分割問題が考えられる。$\mathfrak{M}$ を，n 次正値対称で，整数を要素とする行列の集合とし，$M \in \mathfrak{M}$ に対して，

$$P(M) = \sum_{M = M_1 + \cdots + M_s \;;\; M_i \in \mathfrak{M}} 1$$

を考えると、$P(M)$ は有限であり、一種の分割函数となる。（Meinardus [97] は n 次元ベクトルの分割問題を扱っているが、あまり興味ある結果には達していない。$\mathfrak{M}$ を考える方が、代数的、解析的にいろいろと面白い問題が出てくるように思われる）$P(M)$ の生成函数は、n 次正値行列 X（要素は実数）によって

$$f(X)=\prod_{T\in\mathfrak{M}}\left(1-e^{-\sigma(TX)}\right)^{-1}$$

を考えるとよい（σ は行列の trace である）

最も簡単な結果としては、$\log P(M)$ の漸近式がある；（筆者による）

$$\log P(M)\sim(1+\nu)\left(\frac{2}{1+n}\right)^{\frac{\nu}{1+\nu}}\left(B_n\zeta(1+\nu)\right)^{\frac{1}{1+\nu}}|M|^{\frac{\nu}{n(1+\nu)}}$$

ここで　$\nu=n(n+1)/2$,

$$B_n=\pi^{n(n-1)/4}\,\Gamma\!\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\!\left(\frac{n}{2}\right)\cdots\Gamma\!\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\!\left(\frac{2}{2}\right)$$

であって、M としては、その固有値がすべて同じ order で大きくなるものを考えるのである。

その他の問題については、やはり、殆ど何も知られていない。$P(M)$ の漸近式も、不十分な形でしかまだ得られていない。これは、行列の場合は、代数体の場合よりも、もっと

解析的，代数的な道具が不足していることにも原因があるように思われる（わずかに Siegel [151] が参考になる程度である）。Maier, Glaeske などの Gitterfunktion が発展すれば，何等かの関係が得られるかも知れないが，まだ多くは望めそうにもない。二次形式の解析的理論を飛躍的に発展させた Siegel でさえ，二次形式論はまだ混沌とした状態にあると言っていることから見ても，分割問題の困難は当然のことかも知れない。しかし，それだけにまた，興味を感じさせる研究対象でもあろう。

附. $P(M)$ の漸近式の結果だけを記しておく：先の記号を使って，

$$P(M) \sim e^{\sigma(XM)} f(X) \frac{\{(1+n)\zeta(1+\nu)B_n\}^{\frac{\nu}{2(1+\nu)}}}{2^{\frac{n}{2}+\frac{\nu}{2(1+\nu)}}\,\pi^{\frac{\nu}{2}}\,(1+\nu)^{1/2}\,|M|^{(1+\frac{\nu}{2})\frac{\nu}{n(1+\nu)}}}$$

となる。ただし，X は，

$$\sum_{T \in \mathfrak{M}} \frac{1}{e^{\sigma(TX)}-1} T = M$$

の解としてきめられる（存在はたしかめられる）行列で，これを具体的に（例えば M の函数として）表わすのは難かしい。

文　献

I. 単行書

(1) R. Ayoub: An introduction to the analytic theory of numbers. Amer. Math. Soc. Math. Surveys. 10 (1963).

(2) G. H. Hardy, E. M. Wright: An introduction to the theory of numbers. Oxford. 1938.

(3) J. Lehner: Discontinuous groups and automorphic functions. Amer. Math. Soc. Math. Surveys. 8 (1964).

(4) P. A. MacMahon: Combinatory analysis. Cambridge. 1916.

(5) J. Riordan: An introduction to combinatorial analysis. Wiley, New York. 1958.

II. 論　文

[1] T. M. Apostol: Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series. Duke Math. J., 17 (1950), 147-157.

[2] T. M. Apostol: Asymptotic series related to the partition function. Ann. of Math., 53 (1951), 327-331.

[3] T. M. Apostol: Theorems on generalized Dedekind sums. Pacific J. Math., 2 (1952), 1-9.

[4] T. M. Apostol: A short proof of Shô Iseki's functional equation. Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 618-622.

[5] A. O. L. Atkin: A note on ranks and conjugacy of partitions. Quart. J. Math., 17 (1966), 335-338.

[6] A. O. L. Atkin: Multiplicative congruence properties and density properties for p(n). Proc. London Math. Soc., 18 (1968), 563-576.

[7] A. O. L. Atkin: Proof of a conjecture of Ramanujan. Glasgow Math. J., (to appear).

[8] A. O. L. Atkin, P. Bratley, I. G. Macdonald, J. K. S. McKay: Some computations for m-dimensional partition. Proc. Cambridge Philos. Soc., 63 (1967), 1097-1100.

[9] A. O. L. Atkin, S. M. Hussian: Some properties of partitions. (2). Trans. Amer. Math. Soc., 89 (1958), 184-200.

[10] A. O. L. Atkin, J. N. O'Brien: Some properties of p(n) and c(n) modulo powers of 13. Trans. Amer. Math. Soc., 126 (1967), 442-459.

[11] A. O. L. Atkin, P. Swinnerton-Dyer: Some properties of partitions. Proc. London Math. Soc., 4 (1954), 84-106.

[12] F. C. Auluck, C. B. Haselgrove: On Ingham's Tauberian theorem for partitions. Proc. Cambridge Philos. Soc., 48 (1952), 566-570.

[13] P. T. Bateman, P. Erdös: Partitions into primes. Pub. Math. Debrecen, 4 (1955/56), 198-200.

[14] N. A. Brigham: On a certain weighted partition function. Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 113-128.

[15] N. A. Brigham: A general asymptotic formula for partition functions. Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 182-191.

[16] K. Burde: Dedekindsummen als Gitterpunktanzahlen. J. Reine Angew. Math., 227 (1967), 74-85.

[17] L. Carlitz: Some sums analogous to Dedekind sums. Duke Math. J., 20 (1953), 161-171.

[18] L. Carlitz: Some theorem on generalized Dedekind sums. Pacific J. Math., 3 (1953), 513-523.

[19] L. Carlitz: The reciprocity theorem for Dedekind sums. Pacific J. Math., 3 (1953), 523-527.

[20] L. Carlitz: Dedekind sums and Lambert series. Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954), 580-584.

[21] L. Carlitz: A further note on Dedekind sums. Duke Math. J., 23 (1956), 219-223.

[22] L. Carlitz: Generalized Dedekind sums. Math. Z., 85 (1964), 83-90.

[23] L. Carlitz: Linear relations among generalized Dedekind sums. J. Reine Angew. Math., 220 (1965), 154-162.

[24] L. Carlitz: A theorem on generalized Dedekind sums. Acta Arith., 11 (1965), 253-260.

[25] L. Carlitz: Generating functions and partition problems. Proc. Sympos. Pure Math., 8 (1965), 144-169.

[26] L. Carlitz: A three-term relation for Dedekind-Rademacher sums. Publ. Math. Debrecen, 14 (1967), 119-124.

[27] L. Carlitz, D. P. Roselle: Restricted bipartite partitions. Pacific J. Math., 19 (1966), 221-228.

[28] T. W. Chaundy: Partition-generating functions. Quart. J. Math., 2 (1931), 234-240.

[29] T. W. Chaundy: The unrestricted plane partition. Quart. J. Math., 3 (1932), 76-80.

[30] M. S. Cheema: Vector partitions and combinatorial identities. Math. Comp., 18 (1964), 414-420.

[31] M. S. Cheema, B. Gordon: Some remarks on two-and three-line partitions. Duke Math. J., 31 (1964), 267-273.

[32] M. S. Cheema, C. T. Haskell: Multirestricted and rowed partitions. Duke Math. J., 34 (1967), 443-451.

[33] N. G. de Bruijn: On Mahler's partition problem. Indag. Math., 10 (1948), 210-220.

[34] R. Dedekind: Erläuterungen zu den Riemannschen Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Funktionen. Gesam. Math. Werke, 1 (1930), 159-173.

[35] U. Dieter: Beziehungen zwischen Dedekindschen Summen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 21 (1957), 109-125.

[36] U. Dieter: Das Verhalten der Kleinschen Funktionen gegenüber Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen. J. Reine Angew. Math., 201 (1959), 37-70.

[37] P. Erdös: On an elementary proof of some asymptotic formulas in the theory of partition. Ann. of Math., 43 (1942), 437-450.

[38] P. Erdös, J. Lehner: The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer. Duke Math. J., 8 (1941), 335-345.

[39] T. Estermann: Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 7 (1930), 82-98.

[40] N. J. Fine: On a system of modular functions connected with the Ramanujan identities. Tôhoku Math. J., 8 (1956), 149-164.

[41] W. Fischer: On Dedekind's function $\eta(\tau)$. Pacific J. Math., 1 (1951), 83-95.

[42] H. J. Glaeske: Zur Herleitung einer asymptotischen Funktionalgleichung gewisser Lambertscher Reihen. Wiss. Z. Friedrich-Schiller Univ., 11 (1962), 111-113.

[43] H. J. Glaeske: Funktionalgleichungen von Gitterfunktionen. Math. Nachr., 32 (1966), 95-105.

[44] H. J. Glaeske: Eine asymptotische Funktionalgleichung für eine Funktion eines ebene Halbgitters. J. Math. Soc. Japan., 18 (1966), 253-266.

[45] H. J. Glaeske: Über die Modultransformation einer Halbgitterfunktion. Arch. Math., 17 (1966), 438-442.

[46] H. J. Glaeske: Eine asymptotische Funktional gleichung für eine verallgeneinerte Halbgitterfunktion. Duke Math. J., 34 (1967), 23-32.

[47] H. Göllnitz: Partitionen mit Differenzenbedingungen. J. Reine Angew. Math., 225 (1967), 154-190

[48] B. Gordon: Two new representations of the partitions. Proc. Amer. Math. Soc., 13 (1962), 869-879.

[49] E. Grosswald: Some theorems concerning partitions. Trans. Amer. Math. Soc., 89 (1958), 113-128.

[50] E. Grosswald: Partitions into prime powers. Michigan Math. J., 7 (1960), 97-122.

[51] A. P. Guinand: Functional equations and self-reciprocal functions connected with Lambert series. Quart. J. Math., 15 (1944), 11-23.

[52] M. Haberzelle: On some partition functions. Amer. J. Math., 63 (1941), 589-599.

[53] P. Hagis: A problem on partitions with a prime modulus $p > 3$. Trans. Amer. Math. Soc., 102 (1962), 30-62.

[54] P. Hagis: Partitions into odd summands. Amer. J. Math., 85 (1963), 213-222.

[55] P. Hagis: Partitions into odd and unequal parts. Amer. J. Math., 86 (1964), 317-324.

[56] P. Hagis: On a class of partitions with distinct summands. Trans. Amer. Math. Soc., 112 (1964), 401-415.

[57] P. Hagis: Partitions with odd summands - some comments and corrections. Amer. J. Math., 87 (1965), 218-220.

[58] P. Hagis: Some theorem concerning partition into odd summands. Amer. J. Math., 88 (1966), 664-681.

[59] G. H. Hardy, S. Ramanujan: Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. Proc. London Math. Soc., 16 (1917), 112-132.

[60] G. H. Hardy, S. Ramanujan: Asymptotic formulae in combinatory analysis. Proc. London Math. Soc., 17 (1918), 75-115.

[61] C. B. Haselgrove, H. N. V. Temperley: Asymptotic formulae in the theory of partitions. Proc. Cambridge Philos. Soc., 50 (1954), 225-241.

[62] W. K. Hayman: A generalization of Stirling's formula. J. Reine Angew. Math., 196 (1956), 67-95.

[63] L. K. Hua: On the number of partitions of a number into unequal parts. Trans. Amer. Math. Soc., 51 (1942), 192-201.

[64] A. E. Ingham: A Tauberian theorem for partitions. Ann. of Math., 42 (1941), 1075-1090.

[65] K. Iseki: A proof of a transformation formula in the theory of partitions. J. Math. Soc. Japan, 4 (1952), 14-26.

[66] S. Iseki: The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations. Duke Math. J., 24 (1957), 653-662.

[67] S. Iseki: Some transformation equations in the theory of partitions. Proc. Japan Acad. 34 (1958), 131-135.

[68] S. Iseki: A partition function with some congruence condition. Amer. J. Math., 81 (1959), 939-961.

[69] S. Iseki: On some partition function. J. Math. Soc. Japan, 12 (1960), 81-88.

[70] S. Iseki: A generalization of a functional equation related to the theory of partition. Duke Math. J., 27 (1960), 95-110.

[71] S. Iseki: Partitions in certain arithmetic progression. Amer. J. Math., 83 (1961), 243-264.

[72] S. Iseki: A proof of a functional equation related to the theory of partitions. Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961), 502-505.

[73] M. I. Knopp: Fourier series of automorphic forms of non-negative dimension. Illinois J. Math., 5 (1961), 18-42.

[74] E. E. Kohlbecker: Weak asymptotic properties of partitions. Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 346-365.

[75] O. Kolberg: Some identities involving the partition function. Math. Scand., 5 (1957), 77-92.

[76] O. Kolberg: Congruences involving the partition function for the moduli 17, 19 and 23. Univ. Bergen Årbok Naturvit. Rekke, 1959, No.15 (1960).

[77] O. Kolberg: An elementary discussion of certain modular forms. Univ. Bergen Årbok Naturvit. Rekke, 1959, No.16 (1960).

[78] O. Kolberg: Congruences for Ramanujan's function $\tau(n)$. Årbok Univ. Bergen Mat.-Natur Ser., 1962.

[79] O. Kolberg: Congruences for the coefficients of the modular invariant $j(\tau)$. Math. Scand., 10 (1962), 173-181.

[80] H. Lang: Über eine Gattung elementar-arithmetischer Klasseninvarianten reell-quadratischer Zahlkörper. J. Reine Angew. Math., 233 (1969), 123-175.

[81] D. H. Lehmer: On the series for the partition function. Trans. Amer. Math. Soc., 43 (1938), 271-295.

[82] D. H. Lehmer: Properties on the coefficients of the modular invariant. Amer. J. Math., 64 (1942), 488-502.

[83] J. Lehner: A partition function connected with the modulus five. Duke Math. J., 8 (1941), 631-655.

[84] J. Lehner: Ramanujan identities involving the partition function for the moduli 11. Amer. J. Math., 65 (1943), 492-520.

[85] J. Lehner: Divisibility properties of the Fourier coefficients of the modular invariant $j(\tau)$. Amer. J. Math., 71 (1949), 136-148.

[86] J. Lehner: Further congruence properties of the Fourier coefficients of the modular invariant $j(\tau)$. Amer. J. Math., 71 (1949), 373-386.

[87] J. Livingood: A partition function with the prime modulus p 3. Amer. J. Math., 67 (1945), 194-208.

[88] W. Maier: Gitterfunktionen der Zahlebene. Math. Ann., 113 (1937), 363-379.

[89] W. Maier: Über einige Lambertsche Reihen. Arch. Math., 9 (1958), 186-190.

[90] G. Meinardus: Über das Partitionenproblem eines reell-quadratischen Zahlkörpers. Math. Ann., 126 (1953), 343-361.

[91] G. Meinardus: Asymptotische Aussagen über Partitionen. Math. Z., 59 (1954), 388-398.

[92] G. Meinardus: Zur additiven Zahlentheorie in mehreren Dimensionen. I. Math. Ann., 132 (1956), 333-346.

[93] C. Meyer: Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen. J. Reine Angew. Math., 198 (1957), 143-203.

[94] C. Meyer: Bemerkungen zu den allgemeinen Dedekindschen Summen. J. Reine Angew. Math., 205 (1960), 186-196.

[95] C. Meyer: Über die Bildung von Klasseninvarianten binärer quadratischer Formen mittels Dedekindscher Summen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 27 (1964), 206-230.

[96] C. Meyer: Über die Dedekindsche Transformationsformel $\log \eta(\tau)$ Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 30 (1967), 129-164.

[97] M. Mikolás: Über gewisse Lambertsche Reihen, I. Verallgemeinerung der Modulfunktion $\eta(\tau)$ und ihre Dedekindschen Transformationsformel. Math. Z., 68 (1957), 100-110.

[98] M. Mikolás: On certain sums generating the Dedekind sums and their reciprocity laws. Pacific J. Math., 7 (1957), 1167-1178.

[99] T. Mitsui: On the partition of a number into the powers of prime numbers. J. Math. Soc. Japan, 9 (1957), 428-447.

[100] T. Mitsui: On Goldbach's problem in an algebraic number field. I, II. J. Math. Soc. Japan, 12 (1960), 290-324, 325-372.

[101] L. J. Mordell: On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions. Proc. Cambridge Philos. Soc., 19 (1919), 117-124.

[102] L. J. Mordell: Notes on certain modular relations considered by Messrs. Ramanujan, Darling and Rogers. Proc. London Math. Soc., 20 (1922), 408-416.

[103] L. J. Mordell: The reciprocity formula for Dedekind sums. Amer. J. Math., 73 (1951), 593-601.

[104] M. Newman: Remarks on some modular identities. Trans. Amer. Math. Soc., 73 (1952), 313-320.

[105] M. Newman: Generalizations of identities for the coefficients of certain modular forms. J. London Math. Soc., 31 (1956), 205-208.

[106] M. Newman: On the existence of identities for the coefficients of certain modular forms. J. London Math. Soc., 31 (1956), 350-359.

[107] M. Newman: Construction and application of a class of modular functions. Proc. London Math. Soc., 7 (1957), 334-350.

[108] M. Newman: Congruences for the coefficients of modular forms and some new congruences for the partition function. Canad. J. Math. 9 (1957), 549-552.

[109] M. Newman: Further identities and congruences for the coefficients of modular forms. Canad. J. Math., 10 (1958), 577-586.

[110] M. Newman: Congruences for the coefficients of modular forms and for the coefficients of $j(\tau)$. Proc. Amer. Math. Soc., 9 (1958), 609-622.

[111] M. Newman: Construction and application of a class of modular function, II. Proc. London Math. Soc., 9 (1959), 373-387.

[112] M. Newman: Modular forms whose coefficents possess multiplicative properties, I, II. Ann. of Math., 70 (1959), 478-489, 75 (1962), 242-259.

[113] M. Newman: Periodicity modulo m and divisibility properties of the partition function. Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960), 225-236.

[114] M. Newman: Notes on partitions modulo 5. Math. Comp., 21 (1967), 481-482.

[115] I. Niven: On a certain partition function. Amer. J. Math., 62 (1940), 353-364.

[116] S. Parameswaran: Partition functions whose logarithms are slowly oscillating. Trans. Amer. Math. Soc., 100 (1961), 217-240.

[117] W. B. Pennington: On Mahler's partition problem. Ann. of Math., 57 (1953), 531-546.

[118] H. Petersson: Über ide Entwicklungskoeffizienten der automorpher Formen. Acta Math., 58 (1932), 169-215.

[119] H. Petersson: Konstruktion der Modulformen und der zu gewissen Grenzkreisgruppen gehörigen automorphen Formen von positiver reeller Dimension und die vollständige Bestimmung ihrer Fourier Koeffizienten. S. B. Heidelberger Akad. Wiss., (1950), 417-494.

[120] H. Petersson: Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme. Abh. Deutsch Akad. Wiss. Berlin, (1954).

[121] H. Petersson: Über automorphe Orthogonalfunktionen und die Konstruktion der automorphen Formen von positiver reeller Dimension. Math. Ann., 127 (1954), 33-81.

[122] H. Petersson: Über die arithmetischen Eigenschaften eines Systems multiplikativer Modulfunktionen von Primzahlstufe. Acta Math., 95 (1956), 57-110.

[123] H. Petersson: Über Partitionenprobleme in Verbindung mit Potenzresten nach einem Primzahlmodul. Math. Z., 66 (1956), 241-268.

[124] H. Rademacher: Zur additiver Primzahlentheorie algebraischer Zahlkorper, III. Math. Z., 27 (1928), 321-426.

[125] H. Rademacher: Zur Theorie der Modulfunktionen. J. Reine Angew. Math., 167 (1932), 312-336.

[126] H. Rademacher: On the partition function p(n). Proc. London Math. Soc., 43 (1937), 241-254.

[127] H. Rademacher: A convergent series for the partition function p(n). Proc. Nat. Acad. Sci., 23 (1937), 78-84.

[128] H. Rademacher: The Fourier coefficients of modular invariant $j(\tau)$. Amer. J. Math., 60 (1938), 501-512.

[129] H. Rademacher: The Fourier series and the functional equation of the absolute modular invariant $j(\tau)$. Amer. J. Math., 61 (1939), 237-248.

[130] H. Rademacher: Fourier expansions of modular forms and problems of partition. Bull. Amer. Math. Soc., 46 (1940), 59-73.

[131] H. Rademacher: The Ramanujan identities under modular substitutions. Trans. Amer. Math. Soc., 51 (1942), 609-636.

[132] H. Rademacher: On the expansion of the partition function in a series. Ann. of Math., 44 (1943), 416-422.

[133] H. Rademacher: Generalization of the reciprocity formula for Dedekind sums. Duke Math. J., 21 (1954), 391-397.

[134] H. Rademacher: On the transformation of log $\eta(\tau)$. J. Indian Math. Soc., 19 (1955), 25-30.

[135] H. Rademacher: Zur Theorie der Dedekindschen Summen. Math. Z., 63 (1955/56), 445-463.

[136] H. Rademacher: On the Selberg formulag for $A_k(n)$. J. Indian Math. Soc., 21 (1957), 41-55.

[137] H. Rademacher: Some remarks on certain generalized Dedekind sums. Acta Arith., 9 (1964), 97-105.

[138] H. Rademacher, A. L. Whiteman: Theorems on Dedekind sums. Amer. J. Math., 63 (1941), 377-407.

[139] H. Rademacher, H. S. Zuckerman: On the Fourier coefficients of certain modular forms of positive dimension. Ann. of Math., 39 (1938), 433-462.

[140] S. Ramanujan: Some properties of p(n), the number of partitions of n. Collected papers, 210-213.

[141] G. Rieger: Dedekindsche Summen in algebraischen Zahlkörpern. Math. Ann., 141 (1960), 377-383.

[142] D. P. Roselle: Restricted k-partite partitions. Math. Nachr., 32 (1966), 139-148.

[143] K. F. Roth, G. Szekeres: Some asymptotic formulae in the theory of partitions. Quart. J. Math., 5 (1954), 241-259.

[144] H. Salié: Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen. Math. Z., 36 (1933), 263-278.

[145] H. Salie: Zum Wertevorrat der Dedekindschen Summen. Math. Z., 72 (1959), 61-75.

[146] B. Schoenberg: Verhalten von speziellen Integralen 3-Gattung bei Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 30 (1967), 1-10.

[147] L. Schoenfeld: A transformation formula in the theory of partition. Duke Math. J., 11 (1944), 873-887.

[148] W. Schwarz: Einige Anwendungen Tauberscher Sätze in der Zahlentheorie. A, B. J. Reine Angew. Math., 219 (1965), 67-96, 157-179.

[149] W. Schwarz: Einige Anwendungen Tauberscher Sätze in der Zahlentheorie. C. Mahler's Partitionsproblem. J. Reine Angew. Math., 228 (1967), 182-188.

[150] W. Schwarz: Schwache asymptotische Eigenschaften von Partitionen. J. Reine Angew. Math., 232 (1968), 1-16.

[151] C. L. Siegel: Uber die analytische Theorie der quadratischen Formen, I. Ann. of Math., 36 (1935), 527-606.

[152] C. L. Siegel: Generalization of Waring problem to algebraic number fields. Amer. J. Math., 66 (1944), 122-136.

[153] C. L. Siegel: Sums of m-th powers of algebraic integers. Ann. of Math., 46 (1945), 313-339.

[154] C. L. Siegel: A simple proof of $\eta(-1/\tau) = \eta(\tau)\sqrt{\tau/i}$. Mathematika, 1 (1955), 4.

[155] V. V. Subrahmanyasastri: Some results involving partition functions. J. Indian Math. Soc., 26 (1962), 97-113.

[156] G. Szekeres: An asymptotic formula in the theory of partitions, I, II. Quart. J. Math., 2 (1951), 85-108, 4(1953), 96-111.

[157] G. N. Watson: Ramanujans Vermutung über Zerfällungsanzahlen. J. Reine Angew. Math., 179 (1938), 97-128.

[158] A. L. Whiteman: A sum connected with the series for the partition function. Pacific J. Math., 6 (1956), 159-176.

[159] S. Wigert: Sur la séries de Lambert et son applications à la théorie des nombres. Acta Math., 41 (1911), 197-218.

[160] K. Wohlfahrt: Uber Dedekindsche Summen und Untergruppen der Modulgruppe. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 23 (1959), 5-10.

[161] E. M. Wright: Asymptotic partition formulae, III. Partitions into k-th powers. Acta Math., 63 (1934), 143-191.

[162] H. S. Zuckerman: Identities analogous to Ramanujan's identities involving the partition function. Duke Math. J., 5 (1939), 88-110.

[163] H. S. Zuckerman: On the coefficients of certain forms belonging to subgroups of the modular group. Trans. Amer. Math. Soc., 45 (1939), 298-321.

[164] H. S. Zuckerman: On the expansions of certain modular forms of positive dimension. Amer. J. Math., 62 (1940), 127-152.