数理解析研究所講究録
第84巻 1970年 167-196

Dirichlet L-函数について

東大教養学部教授　竜沢周雄

kを正整数, χを次の条件をみたし整数全体を定義域とする函数とする。(1) $(n, k) > 1$ ならば $\chi(n) = 0$, (2) $n_1 \equiv n_2 \pmod{k}$ ならば $\chi(n_1) = \chi(n_2)$, (3) $\chi(n_1 n_2) = \chi(n_1)\chi(n_2)$。このとき, χを mod k の剰余指標という。$(n, k) = 1$ ならばつねに $\chi_0(n) = 1$ となる剰余指標χ_0を mod k の principal character という。χを mod k の剰余指標, fがkの約数で

「$(n, k) = 1$, $n \equiv 1 \bmod f$ なるかぎり $\chi(n) = 1$」

が成立つとき, χは mod f で定義されるという。χを定義する最小正整数のfをχの conductor という。χの conductor がk自身のとき, χは mod k の primitive character という。χ_0の conductor は 1 である。χの conductor をfとし, $(k, n) = 1$ なるかぎり $\chi^0(n) = \chi(n)$ となる mod f の剰余指標χ^0をχに属する一つの原始指標という。ζを 1 の原始n乗根とし

$$G(a, \chi) = \sum_{n \bmod k} \chi(n)\zeta^{an}$$

をつくり, Gauss の和という。$(b, k) = 1$ ならば $G(ab, \chi) = \bar{\chi}(b) G(a, \chi)$, χが mod k の primitive character $(a, k) > 1$ ならば $G(a, \chi) = 0$, χが mod k の primitive character ならば $G(a, \chi)$

$=\overline{\chi}(a)G(1,\chi)$, χ が mod k の primitive character ならば

$$|G(1,\chi)|=\sqrt{k}$$

$s=\sigma+it$ を複素変数とし, $\sigma>1$ では $\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)/n^s$ によって定義される解析函数を $L(s,\chi)$ で表わす。このDirichlet級数は $\sigma>1$ では確かに正則であり, Eulerの乗積公式

$$L(s,\chi)=\prod_p 1/(1-\chi(p)p^{-s})$$

を満足する。χ^0 を χ の一つの原始指標とするとき

$$L(s,\chi)=\prod_{p|k}(1-\chi^0(p)p^{-s})L(s,\chi^0)$$

が成立つ。特に

$$L(s,\chi_0)=\prod_{p|k}(1-p^{-s})\zeta(s)$$

で, $\zeta(s)$ はRiemannのzeta函数となる。χ を mod k の原始指標とする。$L(s,\chi)$ は $k=1$ ならば $\zeta(s)$ となり $s=1$ で1次のpoleをもつほか, その他のすべての点で正則となり, $k\neq 1$ ならばすべての点で正則となる。また $\chi(-1)=1$ or -1 にしたがって $a=0$ or 1 ときめると

$$\Phi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+a}{2}}\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)L(s,\chi)$$

とするとき, 函数等式

$$\Phi(s,\chi)=\varepsilon(\chi)\Phi(1-s,\overline{\chi})$$

が成立つ。たゞし,

$$\varepsilon(\chi)=\frac{(-i)^a}{\sqrt{k}}G(1,\chi)$$

Γ函数の公式を利用して

$$L(s,\chi)=2(2\pi)^{s-1}k^{\frac{1}{2}-s}\varepsilon(\chi)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)L(1-s,\bar{\chi})$$

($a=0$ のとき $\sin$, $a=1$ のとき $\cos$ をとる)

ともかける。したがって，$L(s,\chi)$ の零点は $\sigma>1$ にはなく

$\sigma\leqq 0$ では次のところにある

$k=1$ の場合　　　-2, -4,

$k>1$ の場合 $(a=0)$　0, -2, -4, ……

$k>1$ の場合 $(a=1)$　-1, -3, -5, ……

したがって，$0<\sigma<1$ にある $L(s,\chi)$ の零点を ρ で表わすとき，

Hadamard の定理によって，

$$(s-1)L(s,\chi)=\frac{e^{A+Bs}}{s\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\qquad k=1$$

$$L(s,\chi)=\frac{e^{A+Bs}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\qquad k>1\quad a=0$$

$$L(s,\chi)=e^{A+Bs}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s)}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\qquad k>1\quad a=1$$

対数微分をとれば

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=B-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right).$$

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)=B-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a}{2}\right)+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right)$$

(χ primitive, $k>1$)

なる公式がえられる。ただしBはχに関係するある定数。

算術級数における素数分布の定理を証明する場合，mod k に関する剰余指標 χ から $L(s,\chi)$ をつくりそれを利用するのが Dirichlet 以来の伝統になっている。このとき $L(1,\chi)\neq 0$ の証明ができればあとは簡単なことは，次の Shapiro の方法(多少かえた)をみても分る。 $L(1,\chi)\neq 0$ ならば

$$\sum_{n\leqq x}\frac{\chi(n)}{n}\sum_{d|n}\Lambda(d)=\sum_{n\leqq x}\frac{\chi(n)}{n}\log n=O(\log^2 k)$$

$$=\sum_{d\leqq x}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\sum_{m\leqq \frac{x}{d}}\frac{\chi(m)}{m}=\sum_{d\leqq x}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}\left(L(1,\chi)+O\left(\frac{kd}{x}\right)\right)$$

$$=L(1,\chi)\sum_{d\leqq x}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}+O(k)$$ より $$\sum_{d\leqq x}\frac{\chi(d)\Lambda(d)}{d}=O\left(\frac{k}{L(1,\chi)}\right).$$

$L(1,\chi)=0$ ならば

$$\sum_{n\leqq x}\frac{\chi(n)}{n}\sum_{d|n}\mu(d)\log\frac{x}{d}=\sum_{n\leqq x}\left(\sum_{d|n}\mu(d)\log\frac{x}{n}+\sum_{d|n}\mu(d)\log\frac{n}{d}\right)\frac{\chi(n)}{n}$$

$$=\log x+\sum_{n\leqq x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}$$ 一方左辺 $$=\sum_{d\leqq x}\frac{\mu(d)\chi(d)}{d}\log\frac{x}{d}\sum_{m\leqq\frac{x}{d}}\frac{\chi(m)}{m}$$

$$=O\left(\sum_{d\leqq x}\frac{1}{d}\log\frac{x}{d}\cdot k\frac{d}{x}\right)=O(k)$$ より $$\sum_{n\leqq x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}=-\log x+O(k)$$

χ が mod k の $\varphi(k)$ 個の剰余指標を動くとき N 個の χ について $L(1,\chi)=0$ となるとすれば上記により

$$\varphi(k)\sum_{\substack{n\leqq x\\ n\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,k)}}\frac{\Lambda(n)}{n}=\sum_{\substack{n\leqq x\\ (n,k)=1}}\frac{\Lambda(n)}{n}+\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n\leqq x}\frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n}$$

$$=\log x+(-N)\log x+O(1)$$ (この $O(1)$ は k に depend)

となることより，$L(1,\chi)=0$ となることがあっても χ が real な場合しかも一つだけということになる。したがって，χ を real primitive character mod k として $L(1,\chi)\neq 0$ が証明され

いはよい。Suetuna によれば Kronecker の記号を使って

$$\chi(n) = \left(\frac{k}{n}\right) \quad (\chi(-1)=1) \quad \text{or} \quad \left(\frac{-k}{n}\right) \quad (\chi(-1)=-1)$$

であり、fundamental discriminant $\pm k$ の2次体の class number を h とするとき

$\chi(-1)=1$ のとき $\quad h = \dfrac{\sqrt{k}}{2\log\eta} L(1\ \chi)$, $\eta = \dfrac{a+b\sqrt{k}}{2} (>1)$ は fundamental unit

$\chi(-1)=-1$ のとき $\quad h = \dfrac{w\sqrt{k}}{2\pi} L(1\ \chi) \quad w = 6\ (k=3),\ 4\ (k=4),\ 2\ (k>4)$

とかける (Hecke)。 $\eta - \eta^{-1} = a$ or $b\sqrt{k} \geqq 1$ より $\eta + \eta^{-1} \geqq \sqrt{5}$

よって $\eta \geqq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, よって $\underbrace{\chi(-1)}_{=1}$ のとき $L(1\ \chi) \geqq 2\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

また $\chi(-1)=-1$ ならば $L(1\ \chi) \geqq \dfrac{\pi}{3}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ となる。$L(1\ \chi) \neq 0$ のみならず下からの k に関するおさえを作ることは素数定理を深める際更に重要となる。

上記は Dirichlet の L 函数には有効であるが、Hecke の L 函数に対しても有効な Vogels の方法を簡単に紹介しておく。

$\sigma > 1$ で $\zeta(s) L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ とすると良く知られているように $a_n = \sum_{d|n} \chi(d)$, $a_1 = 1$, $a_n \geqq 0$, $a_{n^2} \geqq 1$。Mellin 変換により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{-nx} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} x^{1-s}\,\Gamma(s-1)\,\zeta(s)\,L(s,\chi)\,ds$$

$1 > c > 0$ とし積分路をうつして

$$= (-L(1\ \chi)\log x + L'(1\ \chi)) + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{1-s}\,\Gamma(s-1)\,\zeta(s)\,L(s,\chi)\,ds$$

$c=\frac{1}{\log k}$ とおいて

$$=(-h(1,\chi)\log 2+h'(1,\chi))+O(x^{1-\frac{1}{\log k}}k^{\frac{1}{2}}\log^2 k)$$

$x=k^{-a}$, $\frac{1}{2}k^{-a}$ とおいて差を作ると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\left(e^{-\frac{n}{2k^a}}-e^{-\frac{n}{k^a}}\right)=h(1,\chi)\log 2+O(k^{\frac{1}{2}-a}\log^2 k)$$

しかるに $0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ のとき

$$e^{-x}(1-e^{-x})\geqq\frac{1}{2}x(1-x)$$

したがって

$$\text{左辺}\geqq\frac{1}{2}\sum_{n\leqq k^a}\frac{a_n}{n}\frac{n}{2k^a}\left(1-\frac{n}{2k^a}\right)\geqq\frac{1}{8}\frac{1}{k^a}\sum_{n\leqq k^a}a_n$$

$$\geqq\frac{1}{8k^a}\sqrt{k^a}=\frac{1}{8k^{\frac{a}{2}}}$$

よって

$$h(1,\chi)\log 2>\frac{1}{8k^{\frac{a}{2}}}-O\left(\frac{\log^2 k}{k^{a-\frac{1}{2}}}\right)$$

こゝで

$$a=1+\frac{4\log\log k}{\log k}+\frac{b}{\log k}$$

とおき, b を十分大にすれば

$$h(1,\chi)>\frac{c}{\sqrt{k}\log^2 k}\quad(c\text{ は }k\text{ に無関係な定数})$$

これらの結果を更に深めたものとして Siegel の定理があるが筆者流に多少変形して述べる。χ を mod k の剰余指標とし $k|m$ とする。このとき χ から

$$\chi^*(n)=\chi(n)\quad(n,m)=1,\quad 0\quad(n,m)\neq 1$$

として mod m の剰余指標をつくることができる。χ_1, χ_2 がそれぞれ mod k_1, mod k_2 の character, $k_1|m$, $k_2|m$ のとき上記

のように χ_1, χ_2 から mod m の剰余指標 χ_1^*, χ_2^* をつくり

$$\chi^*(n) = \chi_1^*(n)\,\chi_2^*(n)$$

により mod m の character χ^* が作られる。これを χ_1, χ_2 の積という。特に χ_1, χ_2 がそれぞれ mod k_1, mod k_2 の real primitive character で $\chi_1 \neq \chi_2$ とする。$k_1|m$, $k_2|m$ なる m をとつて χ_1 と χ_2 との積である mod m の real character χ^* を作ると当然のことながら決して principal character にならぬ。$k_1 = k_2$ のときは $\chi_1 \neq \chi_2$ であるからあきらかであるから $k_1 \neq k_2$ として証明しよう。$(k_1, k_2) = k$ とし、たとえば $k|k_1$, $k \neq k_1$ としよう。仮定により

$$(n, k_1) = 1, \quad n \equiv 1 \mod k, \quad \chi(n) \neq 1$$

なる n がある。そこで

$$l \equiv n \mod k_1, \quad l \equiv 1 \mod k_2, \quad (l, m) = 1$$

なる l を求める。それには m の素因子で k_1, k_2 に含まれぬものがあつたらその積を q とし $l \equiv 1 \mod q$ とでもすればよい。l があるときは

$$\chi_1(l) = \chi_1(n) \neq 1, \quad \chi_2(l) = 1, \quad \chi^*(l) = \chi_1(l)\,\chi_2(l) \neq 1$$

となつて χ^* は principal でない。(Takagi)

χ, χ_1 をそれぞれ mod k, mod k_1 に関する real primitive non-principal character かつ $\chi \neq \chi_1$ とする。このとき mod kk_1 の character $\chi\chi_1$ をつくり

$$F(s) = \zeta(s)L(s,\chi), \quad G(s) = \zeta(s)L(s,\chi)L(s,\chi_1)L(s,\chi\chi_1)$$

とおくと、$\frac{7}{8} < s < 1$ として

(1) $$F(s) \geqq \frac{1}{2} - \frac{c_1 L(1,\chi)}{1-s} k^{8c(1-s)}$$

(2) $$G(s) \geqq \frac{1}{2} - \frac{c_2 L(1,\chi)L(1,\chi_1)L(1,\chi\chi_1)}{1-s} (kk_1)^{4c(1-s)}$$

$F(s)$, $G(s)$ を $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ とおくと $a_1 = 1$, $a_n \geqq 0$, $\psi(s)$ は $s=1$ で1次の pole をもち、その residue λ は それぞれ $L(1,\chi)$, $L(1,\chi)L(1,\chi_1)L(1,\chi\chi_1)$. $|s-2|<2$ で

$$\psi(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (s-2)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (b_m - \lambda)(2-s)^m$$

$$b_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \log^m n}{n^2 m!}, \quad b_0 \geqq 1, \quad b_m \geqq 0$$

と Taylor 展開され、$|s-2| = \frac{3}{2}$ 上で便宜上

$$\psi(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \begin{cases} O(k^{2c}) & \psi(s) = \zeta(s)L(s,\chi) \\ O((kk_1)^c) & \psi(s) = \zeta(s)L(s,\chi)L(s,\chi_1)L(s,\chi\chi_1) \end{cases}$$

と評価しておく。これから Siegel (ではなく Estermann) のように計算して、$\frac{7}{8} < s < 1$ として

$$\psi(s) \geqq 1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^n c_3 K^A - \lambda \frac{(2-s)^n}{1-s}$$

A は $\psi(s) = F(s)$ のとき $2c$, $\psi(s) = G(s)$ のとき c ととる。また それぞれに応じて $K = k$, $K = kk_1$。ここで

$$n = \left[\frac{\log 8 c_3 K^A}{\log \frac{4}{3}} \right] + 1$$

とおいて (1), (2) がでる。 上記 c は $c \geqq \frac{1}{2}$ のよ

うにとっておく。そのとき $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ とすれば $\frac{\varepsilon}{8C}<\frac{1}{8}$

(1) によって

$$F\left(1-\frac{\varepsilon}{8C}\right) \geqq \frac{1}{2}-\frac{8C_1C}{\varepsilon}h(1\ \chi)k^{\varepsilon}$$

したがって

$$h(1\ \chi)<\frac{1}{16C_1C}\frac{\varepsilon}{k^{\varepsilon}}$$

ならば $\lim_{s\to1-0}F(s)=-\infty$ に注意して，$1-\frac{\varepsilon}{8C}<s<1$ に少くとも一つ $h(s,\chi)$ の零点がある．そこで $a\leqq\frac{1}{16C_1C}$ なる a をとり，$h(1\ \chi)\leqq a\frac{\varepsilon}{k^{\varepsilon}}$，$h(1\ \chi_1)\leqq a\frac{\varepsilon}{k_1^{\varepsilon}}$ が同時に成立ったとしてどうなるか考えてみる。上記考察の結果

$$1-\frac{\varepsilon}{8C}<s<1$$

に $h(s,\chi)$ と $h(s,\chi_1)$ の零点が少くとも一つづつ存在するから $G(s)$ はここに少くとも 2 つの根をもつ。(2) により

$\frac{7}{8}<s<1$ で

$$G(s)\geqq\frac{1}{2}-H(s),\quad H(s)=\frac{C_2h(1\ \chi)h(1\ \chi_1)h(1\ \chi\chi_1)}{1-s}(kk_1)^{4C(1-s)}$$

ここで

$$s_1=1-\frac{\eta}{\log kk_1},\qquad s_2=1-\frac{\varepsilon}{8C}$$

とおく。もし $G(s_1)>0$，$G(s_2)>0$ なら $H(s)$ は $0<s<1$ で convex function であるから $s_2\leqq s\leqq s_1$ or $s_1\leqq s\leqq s_2$ で $G(s)>0$ となる。したがって

$$1-\frac{\eta}{\log kk_1}<s<1$$

に $G(s)$ は少くとも 2 つの根をもつが，η が十分小にできる

ならば、Pageの理論により不可能なことになる。したがって適当な正数 a に対しては高々一つの例外を除き

(3) $$L(1,\chi) > a\frac{\varepsilon}{k^{\varepsilon}} \qquad \left(0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right).$$

となる。a をどの程度小さくすればよいかを調べてみる。

$$L(1\ \chi_i) \leqq c_4 \log kk_1$$

であるから

$$H(\delta_1) < c_2\frac{\log kk_1}{\eta}\cdot a^2\frac{\varepsilon^2}{(kk_1)^{\varepsilon}}\ c_4\log(kk_1)\ (kk_1)^{\frac{4c\eta}{\log kk_1}}$$

$$= \frac{a^2c_2c_4}{\eta}\ e^{4c\eta}\ \log^2(kk_1)\frac{\varepsilon^2}{(kk_1)^{\varepsilon}}$$

一般に $x>0,\ \varepsilon>0$ なら $\dfrac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \geqq \dfrac{e^2}{4}\log^2 x$ よって $x=kk_1$ とし

$$H(\delta_1) < \frac{a^2}{\eta}c_2c_4\,e^{4c\eta}\frac{4}{e^2}$$

右辺は η がどんなに小であろうと a さえ十分小にすれば $\frac{1}{2}$ 以下となり $G(\delta_1)>0$ が保証される。

$$H(\delta_2) < c_2\frac{8c}{\varepsilon}a^2\frac{\varepsilon^2}{(kk_1)^{\varepsilon}}\ c_4\log(kk_1)\cdot(kk_1)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$= 16\,a^2c_2c_4c\ \log(kk_1)\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{(kk_1)^{\frac{\varepsilon}{2}}}$$

一般に $x>0,\ \varepsilon>0$ なら $\dfrac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon} \geqq e\log x$ よって $x=kk_1$ とし

$$H(\delta_2) < \frac{16a^2cc_2c_4}{e}.$$

ここでも a を十分小にすれば右辺 $\frac{1}{2}$ 以下にでき $G(\delta_2)>0$。

以上により(3)が証明された。

以上を前置きとして Linnik 第2基本定理 (Prachar, Primzahlverteilung, 1957, X, §2) の Turan-Knapowski 流による簡明化を紹介する。以下 Knapowski の絶筆となった論文 On Siegel's theorem, Acta Arithmetica, Bd 14 (1968), 417–424 の紹介であり幾分簡明化し幾分ふかめた。χ を real non-principal primitive character mod. k とし $L(s,\chi)$ が exceptional zero $\beta = 1-\delta$ をもつとする。Page の理論により絶対定数 c が存在して

$$0 < \delta < \frac{c}{\log k}$$

χ_1 を primitive character mod k_1 とする。$a > 1$ を任意に与え $\varepsilon > 0$ を $\frac{1}{c} > \varepsilon$ なるように与える。このとき

主定理 $k \geqq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$ とし $L(s,\chi)$ が exceptional zero $\beta = 1-\delta$ をもつとする。$k_1 \leqq k$ なる $L(s,\chi_1)$ が β ではない zero $\beta_1 + i\gamma_1$ を

$$1-\varepsilon < \beta_1 < 1 \qquad e^{k^{a\varepsilon}} \geqq |\gamma_1|$$

なる範囲に少くとも一つもてば

$$\delta \geqq \frac{1}{k^{(a+2\log a+c_0)\varepsilon}} \quad (c_0 \text{ はある絶対定数})$$

注意 仮定により $k \geqq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}} > e^{\frac{c}{\varepsilon}}$ よって $\log k > \frac{c}{\varepsilon}$, したがって $\varepsilon > \frac{c}{\log k} > \delta$

以下証明に入るが、数段に分れる。

χ_1 が principal でないときは

$$f(s) = L(s, \chi_1)\, L(s+\delta, \chi_1\chi)$$

とおき, χ_1 が principal のときは

$$f(s) = L(s, \chi_1)\, L(s-\delta, \chi_1\chi)$$

とおけば $f(s)$ は整函数である。 $s=\sigma+it$ とし $\sigma>1+\delta$ ならば

$$\frac{f'}{f}(s) = \frac{L'}{L}(s, \chi_1) + \frac{L'}{L}(s\pm\delta, \chi\chi_1)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)\Lambda(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi\chi_1(n)\Lambda(n)}{n^{s\pm\delta}}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n\Lambda(n)}{n^s} \qquad b_n = \chi_1(n)\left(1+\chi(n)n^{\mp\delta}\right)$$

たゞし, $\Lambda(n)$ は Mangoldt の函数で

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & n=p^m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

こゝで Rodoskii によって導入された次の積分を考える。

$y>0$, a 任意実数, $s=a+it$, $\beta = 2ay-\log n$ として

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} n^{-s} e^{-s^2 y}\, ds = i n^{-a} e^{a^2 y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-yt^2+i\beta t}\, dt = i n^{-a} e^{a^2 y} \sqrt{\frac{\pi}{y}}\, e^{-\frac{1}{4y}\beta^2}$$

$$= i\sqrt{\frac{\pi}{y}}\; e^{-\frac{1}{4y}\log^2 n}$$

こゝで n の代りに ne^{-z} とすると

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} n^{-s} e^{ys^2+zs}\, ds = i\sqrt{\frac{\pi}{y}}\; e^{-\frac{1}{4y}\log^2(ne^{-z})}$$

よって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{b_n}{n^{s+3\varepsilon}}\, e^{ys^2+zs}\, ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\; e^{-\frac{1}{4y}\log^2(ne^{-z})}\, \frac{b_n}{n^{1-3\varepsilon}}$$

$a \geqq 4\varepsilon$ ならば (このaは(3)のaではない, 主定理aでない)

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f'}{f}(s+1+i\gamma_1-3\varepsilon)\, e^{ys^2+zs}\, ds = -\frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)(1+\chi(n)n^{\mp\delta})\Lambda(n)}{n^{1+i\gamma_1-3\varepsilon}}$$

$$\times\, e^{-\frac{1}{4y}\log^2(ne^{-z})}$$

したがって

$$|I| \leqq \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \sum_n \frac{\Lambda(n)(1+\chi(n)n^{\mp\delta})}{n^{1-3\varepsilon}}\, e^{-\frac{1}{4y}\log^2(ne^{-z})}$$

ここでωは後にきめる正整数とし

$$y = A\omega,\quad z = B\omega,\quad A = \frac{1}{\varepsilon^2},\quad B = \frac{30}{\varepsilon}$$

とおき, そのときのIをI_ωとかく。始めに右辺の和を場合にわけて評価する。

1) $n < e^{\frac{B\omega}{2}}$ のとき　このとき

$$e^{-\frac{1}{4A\omega}\log^2(ne^{-B\omega})} \leqq e^{-\frac{1}{4A\omega}\left(\frac{B\omega}{2}\right)^2} = e^{-\frac{900}{16}\omega} < e^{-56\omega}$$

$$|I_\omega| \text{への contribution} \ll \frac{B\omega}{\sqrt{A\omega}}\, e^{-50\omega} \sum_{n<e^{\frac{B\omega}{2}}} \frac{1}{n^{1-4\varepsilon}} \ll \frac{B\omega}{\sqrt{A\omega}}\, e^{4\omega}$$

$$\times \sum_{n<e^{\frac{B\omega}{2}}} \frac{1}{n} \ll \frac{(B\omega)^2}{\sqrt{A\omega}}\, e^{4\omega} \ll \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}\, e^{4\omega} \ll \frac{e^{5\omega}}{\varepsilon}$$

2) $n > e^{2B\omega}$ のとき　このとき

$$|I_\omega| \text{への contribution} \ll \frac{1}{\sqrt{A\omega}} \int_{e^{2B\omega}}^{\infty} \frac{\log x}{x^{1-4\varepsilon}}\, e^{-\frac{1}{4A\omega}\log^2(xe^{-B\omega})}\, dx$$

$$\ll \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} \int_{e^{B\omega}}^{\infty} \frac{\log u}{u^{1-4\varepsilon}}\, e^{-\frac{\log u}{4A\omega}}\, du \qquad (xe^{-B\omega} = u \text{ とおいた})$$

$$\ll \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}} \int_{B\omega}^{\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{4A\omega}+4\varepsilon t}\, dt \qquad (\log u = t \text{ とおいた})$$

$t \geqq B\omega$ より $t \geqq \frac{36}{\varepsilon}\omega \geqq \frac{144}{5}\frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{144}{5}\varepsilon A\omega$ よって

$$4\varepsilon t - \frac{t^2}{4A\omega} \leqq -\frac{t^2}{9A\omega}$$

よって $|I_\omega|$ への contribution は

$$\ll \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}}\int_{B\omega}^{\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{9A\omega}}\,dt = \frac{e^{4\varepsilon B\omega}}{\sqrt{A\omega}}\, e^{-\frac{B^2\omega^2}{9A\omega}}\, 5A\omega$$

$$\ll \sqrt{A\omega}\; e^{120\omega}\, e^{-100\omega} \ll \frac{e^{21\omega}}{\varepsilon}$$

以上を一応まとめて

(4) $f(s)$ は前述のように定義し,

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f'}{f}(s+1+i\gamma_1-3\varepsilon)\, e^{A\omega s^2+B\omega s}\,ds \quad (a \geqq 4\varepsilon)$$

とする。 $A = \frac{1}{\varepsilon^2}$, $B = \frac{36}{\varepsilon}$ $(0<\varepsilon<1)$, ω 正整数, χ real character mod k とすると

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi A\omega}} \sum_{e^{\frac{B\omega}{2}} \leqq n \leqq e^{2B\omega}} \frac{\Lambda(n)(1+\chi(n)n^{\mp\delta})}{n^{1-3\varepsilon}}\, e^{-\frac{1}{4A\omega}\log^2(ne^{-B\omega})}\right|$$

$$> |I_\omega| - c_1\frac{e^{21\omega}}{\varepsilon} \quad (\text{以下 } c_1, c_2 \cdots \text{ はある絶対定数})$$

始めにのべた Hadamard の定理より, $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{3}{2}$ として

$$\frac{f'}{f}(s) = \frac{h'}{h}(s, \chi_1) + \frac{h'}{h}(s\pm\delta, \chi_1\chi)$$

$$= \sum_{|\gamma_1-t|<1} \frac{1}{s-\rho_1} + O(\log k_1(1+|t|))$$

$$+ \sum_{|\gamma-t|<1} \frac{1}{s\pm\delta-\rho} + O(\log k(1+|t|))$$

ただし $\rho_1=\beta_1+i\gamma_1$, $\rho=\beta+i\gamma$ はそれぞれ $L(s,\chi_1)$, $L(s,\chi_1\chi)$ の zero 点とする。この証明はかんたんではないが後に同じような手法を使うところがあるから省略しておく。基本となることは $0<\beta_1<1$, $|t-\gamma_1|<1$ をみたす $L(s,\chi_1)$ の zero 点の個数が $O\{\log(k_1(1+|t|))\}$ となるということだけ注意しておく。

一般に $\sigma>1$ として

$$-\zeta'(\sigma)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n^{\sigma}}<\frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{3}+\int_1^{\infty}\frac{\log u}{u^{\sigma}}\,du<1+\left[\frac{\log u}{(1-\sigma)u^{\sigma-1}}\right]_1^{\infty}$$

$$-\int_1^{\infty}\frac{du}{(1-\sigma)u^{\sigma}}=1+\frac{1}{(\sigma-1)^2}\qquad \text{また}\quad \frac{1}{\sigma-1}<\zeta(\sigma)\ \text{より}$$

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)<\sigma-1+\frac{1}{\sigma-1}\qquad (\text{Landau})$$

$s=1+3\varepsilon+i\gamma_1$ とおいて

$$\Re\frac{L'}{L}(s,\chi_1)+\Re\frac{L'}{L}(s\pm\delta,\chi_1\chi)\leqq\sum\frac{\Lambda(n)}{n^{1+3\varepsilon}}+\sum\frac{\Lambda(n)}{n^{1+3\varepsilon\pm\delta}}$$

$$\leqq 2\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon)\right)\leqq 2\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)\leqq\frac{4}{\varepsilon}$$

また $1-4\varepsilon\leqq\sigma\leqq1+\delta$, $|t-\gamma_1|\leqq30\varepsilon$ 内にある $f(s)$ の zero ρ_1, ρ のみ考えその個数の total を N とすれば

$$\Re\frac{1}{s-\rho_1}=\frac{\Re(s-\rho_1)}{|s-\rho_1|^2}\geqq\frac{2\varepsilon}{36\varepsilon^2+900\varepsilon^2}=\frac{1}{468\varepsilon}$$

$$\Re\frac{1}{s\pm\delta-\rho}=\frac{\Re(s\pm\delta-\rho)}{|s\pm\delta-\rho|^2}\geqq\frac{\varepsilon}{49\varepsilon^2+900\varepsilon^2}=\frac{1}{949\varepsilon}$$

以上により

$$\frac{4}{\varepsilon}\geqq\frac{N}{1000\varepsilon}+O(\log k(1+|\gamma_1|))$$

or
$$\frac{4}{\varepsilon}+c_2\log k(1+|\gamma_1|)\geqq\frac{N}{1000\varepsilon}$$

or
$$N\leqq4000\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon c_2(\log 2k+k^{a\varepsilon})\right)$$

これより

(5) $K: 1-4\varepsilon \leqq \sigma \leqq 1+\delta,\ |t-\gamma_1| \leqq 30\varepsilon$ 内にある $f(s)$ のzeroの個数を N とすれば

$$N \leqq c_3 k^{a\varepsilon} \qquad (a \geqq 1)$$

この a は主定理の a で(4)の a とは意味がちがう。したがって $a \geqq 1$。つまらぬことであるが、ここで次のことを使った。それは後にも使うのであげておく

(6) $\quad x \geqq e^{\frac{1}{\eta^2}}$ ならば $\quad \eta x^{\eta} \geqq \frac{1}{6}\log x$

(7) $\quad x \geqq e^{\frac{1}{\eta^2}}$ ならば $\quad x^{\eta} \geqq \frac{1}{24}(\log x)^2$

いずれも学生の演習問題程度。

次の2つはKnapowskiの方法の中でもすぐれたものといえる。

(8) $\quad 1-3\varepsilon \leqq \exists\theta \leqq 1-2\varepsilon,\quad |t-\gamma_1| \leqq 21\varepsilon$

$$\text{such that} \quad \left|\frac{f'}{f}(\theta+it)\right| \leqq c_4 k^{(2a+1)\varepsilon}。$$

(9) $\quad 20\varepsilon \leqq \exists\theta' \leqq 21\varepsilon,\quad 1-3\varepsilon \leqq \sigma \leqq 1+\delta+\varepsilon$

$$\text{such that} \quad \left|\frac{f'}{f}(\sigma+i\gamma_1+i\theta')\right| \leqq c_5 k^{(2a+1)\varepsilon}。$$

同じようだから(8)だけ証明する。(5)の矩形 K において strip $(1-3\varepsilon,\ 1-2\varepsilon)$ を縦割，等間隔に$(1+N)$等分する。その1つのせまいstripにはzeroがないようにできるから，その小stripの中間に縦線をひき実数部分を θ とする。ここで $s=\theta+it$ として，再び前のHadamardの公式を使って

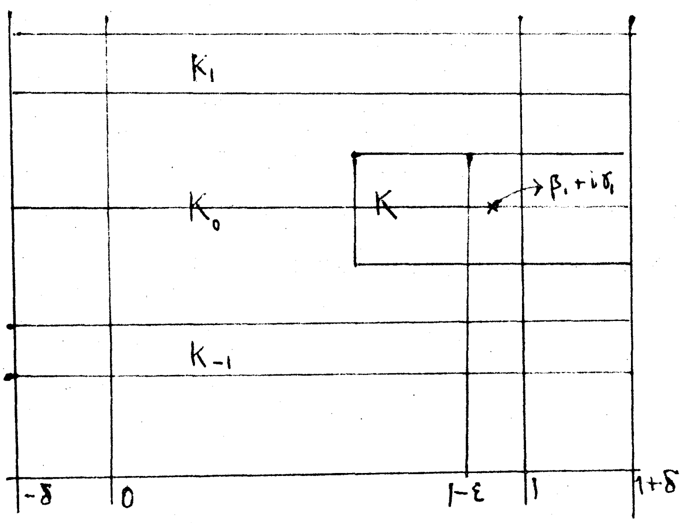
$$\frac{f'}{f}(s) - \frac{f'}{f}(2+it) = \frac{h'}{h}(s,\chi_1) - \frac{h'}{h}(2+it,\chi_1)$$
$$+ \frac{h'}{h}(s\pm\delta,\chi\chi_1) - \frac{h'}{h}(2+it\pm\delta,\chi\chi_1)$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+a_1}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2+it+a_1}{2}\right) + \sum_{\rho_1}\frac{2-\sigma}{(s-\rho_1)(2+it-\rho_1)}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s\pm\delta+a}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2\pm\delta+it+a}{2}\right) + \sum_{\rho}\frac{2-\sigma}{(s\pm\delta-\rho)(2\pm\delta+it-\rho)}$$
$$= O(\log(|t|+2)) + \sum_{\rho_1} + \sum_{\rho}$$

ここで strip $(-\delta, 1+\delta)$ を次のような沢山の矩形にわける。

K : $1-4\varepsilon \leqq \sigma \leqq 1+\delta$

K_0+K : $-\delta \leqq \sigma \leqq 1+\delta$, $|t-\gamma_1| \leqq 30$ (これによって K_0 を定義)

K_j, K_{-j} $(j \neq 0)$: $-\delta \leqq \sigma \leqq 1+\delta$, $(29+j) \leqq |t-\gamma_1| \leqq (30+j)$



右図の $\beta_1+i\gamma_1$ は主定理にのべられた $h(s,\chi_1)$ の zero で $h(s,\chi_1)$ の一般的の zero の意味ではない。ρ 又は ρ_1 が K_j $(j\neq 0)$ にあるとき

$$\left|\frac{2-\sigma}{(s-\rho_1)(2+it-\rho_1)}\right| \leqq \frac{2}{h^2} \qquad h = |\Im\rho_1 - t|$$

が成立つ。なぜなら ρ_1, s, $2+it$ のつくる2等辺3角形の3辺を $a=|\rho_1-2-it|$, $b=|\sigma-2|$, $c=|\rho-s|$, b を底辺とし

高さhの2等辺3角形の等辺の長さをd, 頂角をαとすると

$$\left|\frac{z-\sigma}{(s-\rho_1)(z+it-\rho_1)}\right| \le \frac{b}{ac} \le \frac{b}{d^2} = \frac{b\sin 2\alpha}{d^2\sin 2\alpha} \le \frac{2b\sin\alpha}{bh} \le \frac{2\tan\alpha}{h}$$

$$\le 2\,\frac{\frac{b}{2}}{h}\,\frac{1}{h} = \frac{b}{h^2} \le \frac{2}{h^2}$$

このことから

$$\sum_{j\ne 0}\sum_{\rho\in K_j} \ll \sum \log k(|\gamma_1|+|j|+30)\cdot\frac{1}{j^2} \ll k^{a\varepsilon}$$

また

$$\sum_{\rho\in K} \ll \frac{k^{a\varepsilon}}{\varepsilon}k^{a\varepsilon} \ll k^{(2a+1)\varepsilon} \qquad \left(k\ge e^{\frac{1}{\varepsilon^2}} \text{故} \ k^{\varepsilon}\gg \log k \ge \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

次に

$$\sum_{\rho\in K_0} \ll \frac{1}{\varepsilon}k^{a\varepsilon} \ll k^{(a+1)\varepsilon}$$

以上により(8)がえられる。

さて

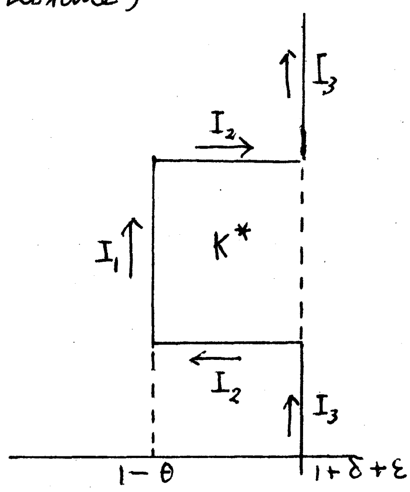
$$I_\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{4\varepsilon+\delta-i\omega}^{4\varepsilon+\delta+i\omega} \frac{f'}{f}(s+1+i\gamma_1-3\varepsilon)\,e^{A\omega s^2+B\omega s}\,ds, \quad A=\frac{1}{\varepsilon^2},\ B=\frac{30}{\varepsilon}$$

$$\frac{f'}{f}(s)=\frac{L'}{L}(s,\chi_1)+\frac{L'}{L}(s\pm\delta,\chi\chi_1)$$

において積分路を移動し留数の定理を使い

$$I_\omega = I_1+I_2+I_3+(K^* \text{における} \cancel{\text{zero}}\ \text{residue})$$

とおける。ここに I_j, K^* は次のようにして定まる。



I_1: $s=\theta-1+3\varepsilon+it$, $|t|\le\theta'$

I_2: $s=\sigma\pm i\theta'$, $\theta-1+3\varepsilon\le\sigma\le 4\varepsilon+\delta$

I_3: $s=4\varepsilon+\delta+it$, $\theta'\le|t|<\infty$

以下 I_j の評価。

$$I_1 \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{A\omega\varepsilon^2 + B\omega\varepsilon} \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{31\omega}$$

$$I_2 \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{A\omega(4\varepsilon^2 - \theta'^2) + B\omega 4\varepsilon} \ll k^{(2a+1)\varepsilon} e^{4\omega - 400\omega + 120\omega}$$

$$= k^{(2a+1)\varepsilon} e^{-240\omega}$$

$$I_3 \ll \int_{20\varepsilon}^{\infty} \log^2 k(|t|+2)\, e^{A\omega(25\varepsilon^2 - t^2) + B\omega 5\varepsilon}\, dt \qquad \left(\tfrac{1}{\varepsilon} \leqq \log k\right)$$

$$\ll \int_{20\varepsilon}^{\infty} (\log^2 k + \log^2 t)\, e^{A\omega\left(25\varepsilon^2 - \frac{1}{2} 400\varepsilon^2 - \frac{1}{2}t^2\right) + 150\omega}\, dt$$

$$\ll \int_{20\varepsilon}^{\infty} (\log^2 k + \log^2 t)\, e^{-25\omega}\, e^{-\omega\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}\, dt \qquad (t = 20\varepsilon u)$$

$$\ll \int_{1}^{\infty} (\log^2 k + \log^2 20\varepsilon + \log^2 u)\, e^{-25\omega}\, e^{-200\omega u^2}\, 20\varepsilon\, du$$

$$\ll e^{-25\omega} \log^2 k \ll e^{-25\omega} k^{\varepsilon} \ll k^{a\varepsilon} e^{-25\omega}.$$

かくて

$$I_\omega = \sum_{\rho \in K^*} \left\{ e^{A\omega(\rho_1 - 1 + 3\varepsilon - i\gamma_1)^2 + B\omega(\rho_1 - 1 + 3\varepsilon - i\gamma_1)} + e^{A\omega(\rho - \delta - 1 + 3\varepsilon - i\gamma_1)^2 + B\omega(\rho - \delta - 1 + 3\varepsilon - i\gamma_1)} \right\}$$

$$+ O\left(k^{(2a+1)\varepsilon} e^{31\omega}\right)$$

$\{\quad\}$ 内の各項を z_j とおくと $\rho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$ が K^* 内にあるから

z_j の set は空ではなく，しかも

$$\operatorname{Max} |z_j| \geqq e^{A\omega(\beta_1 - 1 + 3\varepsilon)^2 + B\omega(\beta_1 - 1 + 3\varepsilon)}$$

$$> e^{4A\varepsilon^2 + 2B\omega} = e^{64\omega}$$

こゝで有名な Turan の基本定理を使う。

Turanの基本定理: z_j complex, $|z_1|\geqq|z_2|\geqq\cdots\geqq|z_n|$ g, M positive, N は M より小なる正整数。これらを与えたとき次のような正整数 ω が存在する

$$g\leqq\exists\omega\leqq g+M$$

$$|z_1^{\omega}+z_2^{\omega}+\cdots+z_N^{\omega}|\geqq\left(\frac{M}{8(g+M)}\right)^M|z_1|^{\omega}$$

この定理を上記 I_ω の右辺に適用するため

$$g=d\varepsilon\log k,\quad M=d\varepsilon\log k$$

とおく。$d>1$ は後で適当に条件のつけられる定数とする。

$$|I_\omega|>e^{64\omega}\left(\frac{1}{16}\right)^{d\varepsilon\log k}-c_6k^{(2a+1)\varepsilon}e^{31\omega}$$

しかるに

$$d\varepsilon\log k\leqq\omega\leqq 2d\varepsilon\log k$$

であるから

$$|I_\omega|>k^{\varepsilon 61d}-k^{\varepsilon(2a+1+\log c_6-62d)}$$

しかるに $c_6=e^{\log c_6}\leqq e^{\varepsilon\log k\cdot\log c_6}=k^{\varepsilon\log c_6}$ 故

$$61d\geqq 2a+1+\log 2c_6-62d,\quad d\geqq\frac{2a+1+\log 2c_6}{123}$$

なるように d をとると

$$|I_\omega|>\frac{1}{2}k^{\varepsilon 61d}$$

(4) により

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{\pi A\omega}}\sum_{e^{\frac{B\omega}{2}}\leqq n\leqq e^{2B\omega}}\frac{\Lambda(n)(1+\chi(n)n^{\mp\delta})}{n^{1-3\varepsilon}}e^{-\frac{1}{4A\omega}\log^2(ne^{-B\omega})}\right|$$

$$>\frac{1}{2}k^{\varepsilon 61d}-c_1\frac{e^{21\omega}}{\varepsilon}$$

しかるに

$$4c_1 \frac{e^{21\omega}}{\varepsilon} \leqq k^{\varepsilon \log 4c_1 + \varepsilon + 42d\varepsilon} \leqq k^{\varepsilon(\log 4c_1 + 1 + 42d)} \leqq k^{\varepsilon 61d}$$

$$\text{if} \quad d \geqq \frac{\log 4c_1 + 1}{29}$$

かくて

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi A\omega}} e^{2B\omega(\delta+3\varepsilon)} 2B\omega \sum_{\substack{e^{\frac{B\omega}{2}} \leqq n \leqq e^{2B\omega} \\ n = p^m}} \frac{1 + \chi(n) n^{-\delta}}{n} > \frac{1}{4} k^{\varepsilon 61d}$$

こゝで

$$\frac{B\omega}{\sqrt{A\omega}} \leqq 30\sqrt{\omega}, \quad e^{2B\omega(\delta+30\varepsilon)} \leqq e^{60 \cdot 2d\varepsilon \log k} = k^{\varepsilon 120d}$$

であるから

$$\sum_{\substack{e^{\frac{B\omega}{2}} \leqq n \leqq e^{2B\omega} \\ n = p^m}} \frac{1 + \chi(n) n^{-\delta}}{n} > \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{30\sqrt{\omega}} k^{-59d\varepsilon} > \frac{1}{80 k^{60d\varepsilon}}$$

かくて

(10) c_7 を十分大なる絶対定数とし，a に応じて $d \geqq \frac{a}{60} + c_7$

とすれば

$$\sum_{k^{15d} \leqq p^m \leqq k^{120d}} \frac{1 + \chi(p^m) p^{-m\delta}}{p^m} > \frac{1}{80 k^{60d\varepsilon}}$$

こゝで

$$\delta \leqq \frac{1}{k^{b\varepsilon}}$$

とし b が十分大ならば矛盾の生ずることをいう。まず

$$\sum_{\substack{k^{15d} \leqq n \leqq k^{120d} \\ \chi(n) = -1 \\ n = p^m}} \frac{1 + \chi(n) n^{-\delta}}{n} = \sum \frac{1 - \frac{1}{n^\delta}}{n} \leqq \sum \frac{1 - e^{-\delta \log n}}{n}$$

$$\leqq \sum \frac{\delta \log n}{n} \leqq \sum \frac{\delta\, 120 d \log k}{n}$$

$$\leqq \delta\, 120 d \log k \left(120 d \log k - 15 d \log k + O\left(\frac{1}{k^{15d}}\right)\right)$$

$$\leqq \frac{120^2 d^2 \log^2 k}{k^{b\varepsilon}} \leqq \frac{k^{\varepsilon(1+\log(120^3\, 24 d^2))}}{k^{b\varepsilon}} \frac{1}{120}$$

$$\leqq \frac{1}{120} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}} \qquad \text{if} \quad b \geqq 60d + 1 + \log(120^3 \cdot 24 \cdot d^2)$$

(10) により

$$\sum_{\substack{k^{15d} \leqq n \leqq k^{120d} \\ n = p^m \\ \chi(n) = 0 \text{ or } 1}} \frac{1 + \chi(p^m)\, p^{-md}}{p^m} > \frac{1}{240} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}}$$

周知のように $\sigma > 1$ で $\zeta(s) L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ とおくと

$a_n = \sum_{d \mid n} \chi(d)$, $n = p^m$ のときは $a_n = 1 + \chi(p) + \cdots + \chi(p)^m$

したがって $\chi(p^m) = 0$ 又は 1 ならば

$$a_n \geqq 1 \quad (\chi(p) = -1 \text{ なら } \chi(p)^m = 1 \text{ なるためには } m \text{ even})$$

故に

$$2 \sum_{k^{15d} \leqq n \leqq k^{120d}} \frac{a_n}{n} > \frac{1}{240} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}}$$

まとめて

(11) $\quad b \geqq 60d + 1 + \log(120^3\, 24 d^2)$, $\quad \delta \leqq \frac{1}{k^{b\varepsilon}}$ ならば

$$\sum_{k^{15d} \leqq n \leqq k^{120d}} \frac{a_n}{n} > \frac{1}{480} \frac{1}{k^{60d\varepsilon}}$$

しかるに次の式が成立つ。

C は Euler の定数とすると

(12) $$\sum_{n\leq x}\frac{a_n}{n}=L(1,\chi)(\log x+C)+L'(1,\chi)+O\left(k\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)$$

一般に $\phi(t)$ は smooth な函数とすると $A(t)=\sum_{n\leq t}a_n$ として

$$A(x)\phi(x)-\sum_{n\leq x}a_n\phi(n)=\sum_{n\leq x}\int_n^x a_n\phi'(t)\,dt=\int_1^x\Big(\sum_{n\leq t}a_n\Big)\phi'(t)\,dt$$

したがって $x,\ y\geq 1$ として

$$\sum_{n\leq x}a_n\phi(n)=-\int_1^x A(t)\phi'(t)\,dt+A(x)\phi(x)$$

$$\sum_{y<n\leq x}a_n\phi(n)=-\int_y^x A(t)\phi'(t)\,dt+A(x)\phi(x)-A(y)\phi(y)$$

これを使って

$$\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)\log n}{n}=-L'(1,\chi)+O\left(2k\frac{\log x}{x}\right)$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{\chi(n)}{n}=L(1,\chi)+O\left(\frac{2k}{x}\right),\quad \sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\log x+C+O\left(\frac{2}{x}\right)$$

が導かれる。そこで

$$\sum_{n\leq x}\frac{a_n}{n}=\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\chi(d)}{d}\sum_{m\leq\frac{x}{d}}\frac{1}{m}+\sum_{m\leq\sqrt{x}}\frac{1}{m}\sum_{\sqrt{x}<d\leq\frac{x}{m}}\frac{\chi(d)}{d}$$

とし上記の結果を代入し整理すれば (12) がえられる。

(12) により d が十分大ならば

$$\sum_{k^{15d}\leq n\leq k^{120d}}\frac{a_n}{n}\leq 120\,d\log k\;L(1,\chi)$$

となる。(11) の条件の下に

$$120\,d\log k\;L(1,\chi)>\frac{1}{480}\frac{1}{k^{60d\delta}}$$

そして $\delta\leq\frac{1}{k^{6\varepsilon}}$ より

$$\frac{L(1,\chi)}{\delta}>\frac{k^{6\varepsilon}}{120\cdot 480\,d\log k\cdot k^{60d\varepsilon}}>\frac{k^{\varepsilon(1+\log(120^3\cdot 24\,d^2))}}{120^2\cdot 4\,d\log k}$$

しかるに

$$\frac{L(1,\chi)}{\delta}=\frac{L(1,\chi)-L(\beta,\chi)}{1-\beta}=L'(\alpha,\chi)\ll c_\delta\log^2 k\quad(1-\delta<\alpha<1)$$

よって

$$120^2\cdot 4\, d\, c_8 \log^3 k > k^{\varepsilon(1+\log(120^3\, 24\, d^2))}$$

(6), (7) によって左辺は $k \geqq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$ なら

$$< 120^2\cdot 4\, d\, c_8\, 6\cdot 24\, \varepsilon\, k^{2\varepsilon} < k^{\varepsilon(2+\log(120^3 c_8\, d\varepsilon))}$$

したがって d を十分大きくとれば矛盾が生ずる。以上を整理して主定理の結果がえられる。今までの計算を更に細部にわたって反省してみると次のようにのべた方がきもちがよい。

主定理の整理した形：χ を non-principal primitive real character to the modulus k. Page の理論によれば絶対定数 c が存在して

$$1-\frac{c}{\log k} \leqq s \leqq 1 \quad (\text{勿論}\ c<1)$$

の実軸の部分には $L(s,\chi)$ の zero β があるとしても高々1つである。そのような zero を exceptional or Siegel zero という。そのような zero が存在するとして $\delta=1-\beta$ とおく。χ_1 を primitive character mod k_1 そして $k_1 \leqq k$。そのような一つの $L(s,\chi_1)$ が β ではない zero $\beta_1+i\gamma_1$ を

$$1-\varepsilon<\beta_1<1 \qquad e^{k^{a\varepsilon}} \geqq |\gamma_1|$$

なる範囲に1つでももったとする。ε は任意に与えられた正数（ただし $0<\varepsilon<1$）, a を十分大きな正数とする。そのとき $k \geqq e^{\frac{1}{\varepsilon^2}}$ として

$$\delta > \frac{1}{k^{a\varepsilon}} \qquad (a\ \text{は絶対定数})$$

この結果が $h(1,\chi)$ の評価（下からの）と関連をもつことは次のようにしてわかる。(1)より

$$0 = \zeta(\beta)h(\beta,\chi) \geq \frac{1}{2} - \frac{c_1 h(1,\chi)}{1-\beta}k^{8c(1-\beta)} \qquad (c \text{ を } c_0 \text{ とかえ})$$

したがって

$$h(1,\chi) \geq \frac{1}{2c_1}(1-\beta)k^{-8c_0(1-\beta)} \geq \frac{1}{2c_1}(1-\beta)k^{-8c_0\frac{c}{\log k}}$$

これは $\frac{7}{8}<\beta<1$ と考えてよいから。　よって

$$\frac{h(1,\chi)}{1-\beta} \geq \frac{1}{2c_1}e^{-8c_0c}$$

したがって $\delta = 1-\beta > \frac{1}{k^{a\varepsilon}}$ なら $h(1,\chi) \geq \frac{1}{2c_1 e^{8c_0c}k^{a\varepsilon}}$

最後に Turan の基本定理の証明をつけ加えておく。

(13) α, β complex それを結ぶ線分を $[\alpha,\beta]$ とかく。

$p_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$ を complex coefficients, そのとき

$$\underset{z\in[\alpha,\beta]}{\mathrm{Max}}\,|p_n(z)| \geq \frac{\pi}{2}\left(\frac{|\beta-\alpha|}{4}\right)^n.$$

proof (Tsuji)

$$p_n(a\cos x) = a_n\cos nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + \cdots + a_1\cos x + a_0$$

とおくと $a_n = \frac{a^n}{2^{n-1}}$。

$$2\underset{0\leq x\leq\pi}{\mathrm{Max}}|p_n(a\cos x)| = \underset{0\leq x\leq\pi}{\mathrm{Max}}|p_n(a\cos x)|\int_0^\pi|\cos nx|\,dx$$

$$\geq \left|\int_0^\pi p_n(a\cos x)\cos nx\,dx\right| = \left|a_n\frac{\pi}{2}\right| = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

故に $\underset{z\in[-a,a]}{\mathrm{Max}}|p_n(z)| \geq \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^n$,　$z-\alpha = (x+a)\frac{\beta-\alpha}{2a}$ とおけば

z について $[\alpha,\beta]$ は x について $[-a,a]$ に変換され上記。

(14) (Nörlund) Γ: Jordan 閉曲線, $g(z)$ は Γ の外部および上で正則かつ $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$. Γ の外部に $l\,(\geqq 2)$ ケの点 $w_1,\cdots,w_l$ 次数高々 $l-1$ 次の多項式 $f(z)$ で $f(w_j)=g(w_j)$ $(1\leqq j\leqq l)$ をみたすものはたゞ一つ存在するが、それを次の形に表わせる。

$$f(w)=e_0+e_1(w-w_1)+\cdots\cdots+e_{l-1}(w-w_1)\cdots(w-w_{l-1})$$

$$e_j=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(z)\,dz}{(z-w_1)\cdots(z-w_{j+1})}\qquad (0\leqq j\leqq l-1)$$

proof. $2\leqq j\leqq l$ に対し

$$\frac{1}{z-w}\left\{\frac{(w-w_1)\cdots(w-w_{j-1})}{(z-w_1)\cdots(z-w_{j-1})}-\frac{(w-w_1)\cdots(w-w_j)}{(z-w_1)\cdots(z-w_j)}\right\}=\frac{(w-w_1)\cdots(w-w_{j-1})}{(z-w_1)\cdots(z-w_{j-1})(z-w_j)}$$

は恒等的に成立つが それらを加えて

$$\sum_{j=2}^{l}=\frac{1}{z-w}-\frac{1}{z-w_1}-\frac{(w-w_1)\cdots(w-w_l)}{(z-w)(z-w_1)\cdots(z-w_l)}$$

$f(w)$ を上記のようにおくと

$$f(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)\left\{\frac{1}{z-w_1}+\frac{w-w_1}{(z-w_1)(z-w_2)}+\cdots+\frac{(w-w_1)\cdots(w-w_{l-1})}{(z-w_1)\cdots(z-w_{l-1})(z-w_l)}\right\}dz$$

上の関係より

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)\left\{\frac{1}{z-w}-\frac{(w-w_1)\cdots(w-w_l)}{(z-w)(z-w_1)\cdots(z-w_l)}\right\}dz$$

故に

$$f(w_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(z)}{z-w_j}\,dz\qquad (1\leqq j\leqq l)$$

$$=g(w_j)$$

たゞし積分路は時計の針の方向にとる。 $g(z)\to 0\ (|z|\to\infty)$ を利用する。

これらの準備のもとに

(15) P. Turan: Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, 1953。

$b_1, b_2, \ldots, b_k$ complex, $1 = |z_1| \geqq |z_2| \geqq \cdots \geqq |z_k|$

$$\underset{m \leqq \nu \leqq m+n}{\mathrm{Max}} |b_1 z_1^\nu + \cdots + b_k z_k^\nu| \geqq \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{8e(m+n)}\right)^n \underset{1 \leqq l \leqq k}{\mathrm{Min}} |b_1 + \cdots + b_l|$$

$m \geqq 0$, $n \geqq k$ は real, ν は整数

proof
$$P(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - |z_j|)$$

$0 < t < 1$ なる t を任意に与えたとき (13) により

$$\underset{1-t \leqq z \leqq 1}{\mathrm{Max}} |P(z)| \geqq \frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{4}\right)^k$$

左辺を最大ならしめる z を $r = r(t)$ とおく。そのような r が2つ以上あれば便宜上一番大きいものときめる。そのような r に対して、$z_1, \ldots, z_k$ の中から任意に一部分をとって

$$Q(z) = \prod (z - z_l)$$

を作ると

$$\underset{|z|=r}{\mathrm{Min}} |Q(z)| \geqq \prod (r - |z_l|) \geqq \prod_{j=1}^{k} (r - |z_j|) = |P(r)| \geqq \frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{4}\right)^k$$

あとで極限操作をほどこせばよいから

$$1 = |z_1| > \cdots > |z_l| > |z_{l+1}| > \cdots > |z_k|$$

としてよい。上記 r はたしかに1より小 よって

$$|z_l| > r > |z_{l+1}|$$

なる l がある。このとき

$$f_1(z) = (z - z_{l+1}) \cdots (z - z_k) = C_0^{(1)} z^{k-l} + C_1^{(1)} z^{k-l-1} + \cdots + C_{k-l}^{(1)}$$

$C_0^{(1)} = 1$ とおく。$f_1(z) = 1$ の場合もありうる。$|z_j| < 1$ $(l+1 \leqq j \leqq k)$

であるから

$$|c_j^{(1)}| \leqq \binom{k-l}{j} \qquad (0 \leqq j \leqq k-l)$$

(14) によって $z_1, \cdots, z_l$ でそれぞれ

$$\frac{1}{z_1^{m+1} f_1(z_1)}, \cdots\cdots, \frac{1}{z_l^{m+1} f_1(z_l)}$$

なる値をとる高々 $l-1$ 次の多項式 $f_2(z)$ を次のように作れる。

$$f_2(z) = c_0^{(2)} + c_1^{(2)}(z-z_1) + \cdots + c_{l-1}^{(2)}(z-z_1)\cdots(z-z_{l-1})$$

$$c_j^{(2)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^{m+1} f_1(z)(z-z_1)\cdots(z-z_{j+1})} \qquad (0 \leqq j \leqq l-1)$$

前の $Q(z)$ として $f_1(z)(z-z_1)\cdots(z-z_{j+1})$ を使うと

$$|c_j^{(2)}| \leqq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{r^{m+1}} \frac{1}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{4}\right)^k} \leqq \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1-t)^m \left(\frac{t}{4}\right)^k}$$

t は適当に定めるが $m=0$ のときは $t=1$ ととることもできる。

$f_2(z)$ を

$$c_0^{(3)} + c_1^{(3)} z + \cdots + c_{l-1}^{(3)} z^{l-1}$$

とかきなおすと

$$c_j^{(3)} = c_j^{(2)} - c_{j+1}^{(2)} \sum_{1 \leqq r_1 \leqq j+1} z_{r_1} + c_{j+2}^{(2)} \sum_{1 \leqq r_1 < r_2 \leqq j+2} z_{r_1} z_{r_2} - \cdots\cdots$$

$$\cdots + (-1)^{l-j-1} c_{l-1}^{(2)} \sum_{1 \leqq r_1 < r_2 < \cdots < r_{l-j-1} \leqq l-1} z_{r_1} z_{r_2} \cdots\cdots z_{r_{l-j-1}}\text{。}$$

故に

$$|c_j^{(3)}| \leqq |c_j^{(2)}| + |c_{j+1}^{(2)}|\binom{j+1}{1} + |c_{j+2}^{(2)}|\binom{j+2}{2} + \cdots + |c_{l-1}^{(2)}|\binom{l-1}{l-j-1}$$

上記評価により

$$\leqq \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1-t)^m\left(\frac{t}{4}\right)^k}\left\{1 + \binom{j+1}{1} + \binom{j+2}{2} + \cdots + \binom{l-1}{l-j-1}\right\}.$$

一般に

$$\binom{k+1}{r+1} = \binom{k}{r+1} + \binom{k}{r}$$

であるから連立帰納法で

$$1 + \binom{k+1}{1} + \cdots \quad + \binom{k+n}{n} = \binom{k+n+1}{n}$$

が証明されるので

$$|c_j^{(3)}| \leqq \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1-t)^m\left(\frac{t}{4}\right)^k}\binom{l}{l-j-1} = \quad " \quad \binom{l}{j+1}$$

$$(0 \leqq j \leqq l-1)$$

こゝで m を整数とし

$$f_3(z) = z^{m+1} f_1(z) f_2(z) = c_{m+1}^{(4)} z^{m+1} + \cdots + c_{m+k}^{(4)} z^{m+k}$$

とおく。作り方から

$$f_3(z_1) = \cdots\cdots = f_3(z_l) = 1$$

$$f_3(z_{l+1}) = \cdots\cdots = f_3(z_k) = 0$$

これらの両辺に

$$b_1, \cdots\cdots, b_l$$

$$b_{l+1}, \cdots\cdots, b_k$$

を掛けて加えると

$$c_{m+1}^{(4)}(b_1 z_1^{m+1} + \cdots + b_k z_k^{m+1}) + \cdots + c_{m+k}^{(4)}(b_1 z_1^{m+k} + \cdots + b_k z_k^{m+k})$$

$$= b_1 + \cdots + b_l$$

よって $\{|c_{m+1}^{(4)}| + \cdots + |c_{m+k}^{(4)}|\} \underset{\nu = m+1, \cdots, m+k}{\mathrm{Max}} |b_1 z_1^\nu + \cdots + b_k z_k^\nu| \geqq |b_1 + \cdots + b_l|$

しかるに

$$c_{m+1}^{(4)} + c_{m+2}^{(4)} z + \cdots + c_{m+k}^{(4)} z^{k-1} = (c_0^{(1)} z^{k-l} + \cdots + c_{k-l}^{(1)})(c_0^{(3)} + c_1^{(3)} z + \cdots + c_{l-1}^{(3)} z^{l-1})$$

であるから

$$|C^{(4)}_{m+1}| + |C^{(4)}_{m+2}| + \cdots + |C^{(4)}_{m+k}| \leqq \left(|C^{(1)}_0| + \cdots + |C^{(1)}_{k-l}|\right)\left(|C^{(3)}_0| + \cdots + |C^{(3)}_{l-1}|\right)$$

$$\leqq \left\{1 + \binom{k-l}{1} + \cdots + \binom{k-l}{k-l}\right\} \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1-t)^m \left(\frac{t}{4}\right)^k} \left\{\binom{l}{1} + \binom{l}{2} + \cdots + \binom{l}{l}\right\}$$

$$\leqq \frac{2^k}{\frac{\pi}{2}(1-t)^m \left(\frac{t}{4}\right)^k}$$

故に

$$\max_{\nu=m+1,\dots,m+k} |b_1 z_1^\nu + \cdots + b_k z_k^\nu| \geqq \frac{\pi}{2}\frac{1}{8^k}(1-t)^m t^k \min_{1\leqq l\leqq k} |b_1+\cdots+b_l|$$

$n \geqq 0$ integer

故に $m \geqq 0$ を任意の real, $n \geqq k$ も任意の real とすれば

$$\max_{m\leqq\nu\leqq m+n} |b_1 z_1^\nu+\cdots+b_k z_k^\nu| \geqq \max_{[m]+1\leqq\nu\leqq[m]+k} | \quad '' \quad | \geqq c \min_{1\leqq l\leqq k}|b_1+\cdots+b_l|$$

ここに c は次のようにとれる

$$c = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\frac{1}{8^k}\left(\frac{[m]}{n+[m]}\right)^{[m]}\left(\frac{n}{n+[m]}\right)^k & m\geqq 1 \quad \left(t=\frac{n}{n+[m]} \text{ とす}\right) \\ \frac{\pi}{2}\frac{1}{8^k} & 1>m\geqq 0 \quad (t=1 \text{ ととる}) \end{cases}$$

$m\geqq 1$, $n\geqq k$ ならば $\left(\frac{n}{n+[m]}\right)^k \geqq \left(\frac{n}{n+m}\right)^k \geqq \left(\frac{n}{n+m}\right)^n$

$m\geqq 1$ なら $\left(\frac{[m]}{n+[m]}\right)^{[m]} \geqq e^{-n}$

以上により $m\geqq 1$ ならば

$$c \geqq \frac{\pi}{2}\frac{1}{8^n} e^{-n}\left(\frac{n}{n+m}\right)^n = \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{8e(n+m)}\right)^n$$

$1>m\geqq 0$ ならば $c\geqq \frac{\pi}{2}\frac{1}{8^k} \geqq \frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{8e(n+m)}\right)^n$.

Turan の原証明では (13) の代りに古典函数論にでてくる Cartan の lemma を使っている。以上をよむための文献としては Prachar の書物のほか, A. Page: On the number of the primes in an arithmetic progression; Proc. London Math. Soc. (1935)