

非可逆断片線形系の ultra-subharmonic resonance に ついて

山梨大学工学部 前澤成一郎

§ 1. はじめ

この報告は著者が数年来続け～来に調和加振力を受ける断片線形系の強制振動の完全な一階微分方程式に ついての研究¹⁾ 2) 3) 4) 5) 6) の一部として ultra-subharmonic resonance に関する解析の中間報告である。

最初には工学上断片線形系を取り扱う必要性と利便性について断片しつゝ、非線形強制振動の研究は Duffing 以来、彼の名を冠する方程式で表わす対稱な三次多項式を復元力特性とする系に ついての研究が殆んど大部分である。この系は数学上取扱いが簡単で便利であり、小さい振幅に可及する線形方程式の代表として格好的であるが、 Loud を指摘する⁷⁾ には、振幅が大きくなるに復元力が増加し過ぎる、実際の振動系は遠く超えてある。また非可逆特性の非線形系の復元力は二次多項

式に与つゝる表わされることが普通であるが、この場合も振幅が
 大きくなること、一方の変位に對しては係数が負となること支
 舞つゝる実態に合はる。このために、復元力特性の多
 項式表現は振幅の小さい非線形方程式には便利であるが、振
 幅の大きい本質的非線形系に對しては断片線形系の方が實際
 の振動系の数学的モデルとして適當な場合が多いと思わ
 れる。たとへば機械工学上種の振動衝擊機 (vibro-
 impact machine) が利用されるもの (14) 参照、
 この種の衝突振動 (impact vibration) ともいふ当りのある
 振動 (vibration with a stop) のモデルとして断片線
 形系が最も格好なものを考へてみる。

次に断片線形方程式の解として、各断片特性としての線形
 方程式の解を接点毎に行つゝる接合法によつて常に最急解が求
 められるわけがあるが、特に周期解を求めようとするときは
 は、与つゝる系が複雑になると (たとへば減衰力や特性と断
 片線形とを併せるとする場合) 元の周期性の条件式がたつたほ
 う大抵なるとは、電子計算機の発達に今日まで専らに存
 する能力と時間を要する、また振動に合するものは高調
 波成分の割合は物理的に見ても大抵の振幅がある。

これに對してフーリエ級数解は必ずしも与つゝる断片線形系
 に對して求められることが保證されることはないけれども、以

上のような物理的性質は逆に見出しが難しく、また一周期の間は各断片特性の間を数回往復するから比較的複雑な形式の振動条件を容易に取入れることが出来便利である。

§2. 運動方程式と完全フーリエ級数解

質量 m の質点を質量 m のバネ k と示すような復元力特性 $f(x)$ を持つばねとから成るばね-質量系を、これに調和振動の力 $q \cos \omega t$ が作用する際の運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = q \cos \omega t \quad (1)$$

非対称復元力特性 $f(x)$ は k, K, e_0 を定数として

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= kx, & x \leq e_0 &: \text{領域 I} \\ f(x) &= kx + K(x - e_0), & x > e_0 &: \text{領域 II} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

今 μ/ν 次 (μ, ν は互に素数の $\nu = 2$ の正整数) の ultra-subharmonic resonance を考慮する、位相角

$$\theta = \omega t / \nu \quad (3)$$

を用いて、独立変数を t から θ に変換すると、方程式 (1) は

$$m \left(\frac{\omega}{\nu} \right)^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + f(x) = q \cos \nu \theta \quad (4)$$

となる。

定常周期解は対称な復元力も周期的に存在する。復元力非線形部分 kx と非線形部分 $f(x) - kx$ は合計を考慮すると、非線形部分 2π を周期とする θ の周期関数に存在する、これは $g(\theta)$ と置く。断片線形特性、条件 (2) に従って

$$\left. \begin{aligned} g(\theta) &= K(x - e_0) \quad , \quad x > e_0. \\ g(\theta) &= 0 \quad , \quad x \leq e_0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

とある。(14)を参照) 方程式(4)に(5)を代入すると、非線形部分
 の右辺に与えられ、右辺が外部から与えられた力である
 ので、運動方程式は

$$m\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + kx = g \cos v\theta - g(\theta) \quad (6)$$

ここで $g(\theta)$ は 7-11 級数に展開される

$$g(\theta) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad (7)$$

(6)に(7)を代入すると、項の数は無限と仮定し、我々の非
 線形方程式は形式的に線形化して

$$m\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + kx = g \cos v\theta - a_0/2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad (8)$$

とある。

系の振動の 1 周期中に領域 II を 1 回だけ訪れるような振動部
 を型式 I (Type I), 2 回だけ訪れるような振動部を型式 II (Type
 II) 等と区別する。(型式 II, IV の subharmonic vibration
 および superharmonic vibration, $v = 2, 3, 4$) を
 参照せよ(= 型式 I の振動を参照)。系の領域 II を
 滞留する θ の区間は θ_0 とし、 θ の原点を $\theta = 0$ の区間
 の中央に置く(14)を参照)。このように 1 周期の断
 片線形特性の条件は(5)から与えられる。

$$g(\theta) = K(x - e_0) \quad , \quad -\theta_0/2 < \theta < \theta_0/2 \quad |$$

$$f(\theta) = 0, \quad \theta/2 \leq \theta \leq 2\pi - \theta/2 \quad \} \quad (9)$$

これは各断片特性の間の切替条件は

$$\theta = \mp \theta_0/2 \quad \text{に於いて}, \quad x = e_0, \quad \dot{x} \geq 0 \quad (10)$$

± の方程式 (8) の解は次で表すことができる。^{1) 2)}

$$x = \Gamma \left[\cos v\theta - \frac{x_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n x_n \cos n\theta \right] \quad (11)$$

Γ は和符号 $\sum_{n=1}^{\infty}$ は $n=v$ を除いて $n=1$ から $n=+\infty$ まで

の和を取るとを示す、振動係数 M_n ($n=1, 2, 3, \dots$) は

$$\Omega_v = \Omega/v, \quad \Omega = \omega/\omega_0, \quad \omega_0 = (k/m)^{1/2} \quad (12)$$

すなわち Ω は振動数比, ω_0 は領域 I の微小振動の固有振

動数である。

$$M_n = 1 / (1 - n^2 \Omega^2) \quad (13)$$

とすると, 無次元係数 x_n ($n=0, 1, 2, \dots$) は

$$x_n = a_n / k \Gamma \quad (14)$$

と定義すれば, 最後は Γ は v 次の高調波 (加振力と同じ) の振動数比である) の振幅, 加振力振幅 q との関係は

$$q = k \Gamma (1 - \Omega^2 + x_v) \quad (15)$$

とすると。

次に切替条件 (10) は

$$\Gamma = \frac{e_0}{k} \left(\cos v\theta_0/2 - \frac{x_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n x_n \cos \frac{n\theta_0}{2} \right) \quad (16)$$

を得ると, ± の断片線形特性の条件 (9) は

$$\left. \begin{aligned} x_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n\theta &= \frac{K}{R} \left[\cos \sqrt{\theta} - \cos \frac{\sqrt{\theta_0}}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n x_n (\cos n\theta - \cos \frac{n\theta_0}{2}) \right] \\ &, -\frac{\theta_0}{2} < \theta < \frac{\theta_0}{2} \\ x_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n\theta &= 0 \quad , \quad \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\theta_0}{2} \end{aligned} \right\} (17)$$

7-11 工展(4)の係数を求める操作を(17)式に「...」を代入して
 x_n ($n=0, 1, 2, \dots$) を未知数とする次の無限連立一次方程式が得られる。

$$x_m + \frac{K}{R} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} M_n x_n = \frac{K}{R} C_{m0} \quad (18)$$

($m=0, 1, 2, \dots$)

== 12

$$C_{mn} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{n}{m} \left(\frac{\sin \frac{m-n}{2} \theta_0}{\frac{m-n}{2}} - \frac{\sin \frac{m+n}{2} \theta_0}{\frac{m+n}{2}} \right) \quad (19)$$

($m=0, 1, 2, \dots$ とし、 $n=1, 2, 3, \dots$)

T=T' の $m=n$ のときは表現が無意味になるが、 $n \rightarrow m$ とし、 $m \rightarrow n$ の極限值を取るとよい。

物理的には、一定の加振力が与えられるとき、 f と Ω が一致すると共振が起り、振幅 Γ が n 波の現象を示す。無次元係数 x_n は n 波の滞留時間比 $\theta_0/2\pi$ が定まる。

しかしながら、滞留時間比 $\theta_0/2\pi$ が大きいときは共振が起り、共振現象が起る。重要なのは $x - \delta - \dots$ の場合で、超越方程式を回避するために、我々は逆解法 (Inverse Method) を利用する。可成り高振数比 Ω と滞留時間比 $\theta_0/2\pi$ を 2 個、与えられるならば $x - \delta - \dots$ の場合、先

が連立方程式(18)を解い、波砂を決定する無次元係数 x_m を求め、次に Γ を(16)から求める。このとき対応する振幅の幅 β は(15)から求め、最後に生成する振動は(11)で表わされる。

§3. 解の一意存在と近似解の収束性

無限連立一次方程式(18)は、 \vec{x}, \vec{c} を無限次元のベクトルとして

$$(E - A)\vec{x} = \vec{c} \tag{20}$$

の形に表わされる。ここで E, A は無限次元の行列、 E は単位行列、 A は定数行列である。 \vec{c} はヒルベルト空間に属する。⁸⁾ したがって無限連立方程式(20)は

$$A = (a_{ik}) \tag{21}$$

と表わされ、 a_{ik} は重級数

$$\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 \tag{22}$$

が収束する場合、有限個の連立一次方程式と全く平行に取扱うことが出来る、上記の係数の作る無限行列式がゼロでない限りは、一意に解 \vec{x} の一意存在、ヒルベルト空間に属する \vec{c} が知られる。⁹⁾ また、したがって無限連立一次方程式(20)は、一定数 N 以上の未知数の方程式を打ち切った方程式 (truncated equations) を解いて得られた近似的解 $\vec{x}^{(N)}$ $\rightarrow \infty$ と共に真の解に収束する。 ⁹⁾

§ 4. 級数変換による収束改善法

復元力の非線形部分 $g(\theta)$ は図 3 に示すように周期的パルス列を表現する関数であり、 $\frac{\theta_0}{2\pi}$ が小さいときは、これを表現するフーリエ級数の収束性は良好といえる（大体 n 番目の係数が $1/n$ の order に落ちる）。 $\xi = \eta = \theta$ の範囲 $(-\theta_0/2, \theta_0/2)$ の範囲に \sim 展開 \sim

$$g(\theta)/k\pi = \xi_0/2 + \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{2m+1} \cos \frac{(2m+1)\pi}{\theta_0} \theta, \quad -\frac{\theta_0}{2} < \theta < \frac{\theta_0}{2} \quad (23)$$

と置く。このとき ξ の無次元係数 x_m との関係は

$$x_0 = \frac{\theta_0}{\pi} \left\{ \frac{\xi_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2}{(2m+1)\pi} \xi_{2m+1} \right\}$$

$$x_n = \frac{2}{n\pi} \left\{ \frac{\xi_0}{2} \sin \frac{n\theta_0}{2} + \cos \frac{n\theta_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\frac{(2m+1)\pi}{\theta_0} n}{\frac{(2m+1)^2 \pi^2}{\theta_0^2} - n^2} \xi_{2m+1} \right\}$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) (24)

が成り立ち、 $-\frac{1}{n}$ の範囲 $(-\frac{\theta_0}{2}, \frac{\theta_0}{2})$ で

$$\cos n\theta - \cos \frac{n\theta_0}{2} = \frac{4n^2}{\theta_0} \cos \frac{n\theta_0}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \frac{(2k+1)\pi}{\theta_0} \theta}{\frac{(2k+1)\pi}{\theta_0} \left\{ \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{\theta_0^2} - n^2 \right\}} \quad (25)$$

の関係が成り立ち、これを (17) の第一式の右辺に代入すれば各項が $\cos \frac{(2k+1)\pi}{\theta_0} \theta$ の形のフーリエ級数となり、これを左辺と比較して (23) に等しい関数を得る。これより両辺の係数を比較する。

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= 0 \\ \xi_{2k+1} &= \frac{K}{R} \left(\alpha_{2k+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{2k+1, 2m+1} \xi_{2m+1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$)

9 8 3 13 ξ_{2k+1} の定式を無限級連立一次方程式の形で表す。

\Rightarrow

$$\alpha_{2k+1} = \frac{(-1)^k \cos \frac{\sqrt{\theta_0}}{2}}{\frac{\pi}{4} (2k+1) \left\{ \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{\nu^2 \theta_0^2} - 1 \right\}} \quad (27)$$

$$\gamma_{2k+1, 2m+1} = \frac{\delta_{km}}{\frac{\Omega^2 (2k+1)^2 \pi^2}{\nu^2 \theta_0^2} - 1}$$

$$-(-1)^{k+m} \frac{2m+1}{2k+1} \frac{1}{\theta_0} \left[\frac{2}{\nu} \frac{\Omega M}{\left\{ \frac{\Omega^2 (2k+1)^2 \pi^2}{\nu^2 \theta_0^2} - 1 \right\} \left\{ \frac{\Omega^2 (2m+1)^2 \pi^2}{\nu^2 \theta_0^2} - 1 \right\}} + \frac{1}{\pi} \frac{1 + \cos \sqrt{\theta_0}}{\left\{ \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{\nu^2 \theta_0^2} - 1 \right\} \left\{ \frac{(2m+1)^2 \pi^2}{\nu^2 \theta_0^2} - 1 \right\} (\Omega^2 - 1)} \right] \quad (28)$$

($k, m = 0, 1, 2, \dots$) (δ_{km} は Kronecker の記号)

$$M = \frac{\cos \frac{\nu(\pi - \theta_0)}{\Omega} + \cos \frac{\nu\pi}{\Omega}}{\sin \frac{\nu\pi}{\Omega}} \quad (29)$$

$\gamma_{2k+1, 2m+1}$ の表現は無限級連立一次方程式の無限級連立一次方程式の結果として得られる。

§ 5. 数値計算例を示す。7 + 3 の解との比較。

最初 \Rightarrow ultra-subharmonic vibration の研究、結論: 7 + 3

7 + 3 = 3, harmonic resonance & ultra-harmonic re-

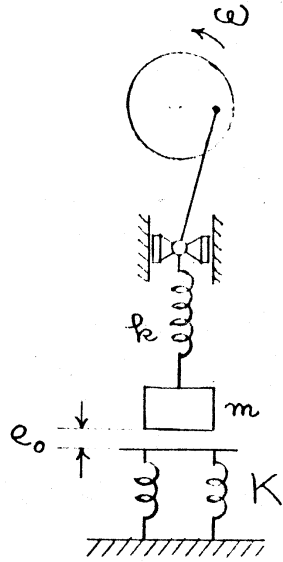
sonance に對する非線形曲線を以て示す。 = 此は前節の式を $V = 1$ と取つた式に $\delta \sim \tau$ の x_n と ϵ の實際的改善法の適用による。 $\epsilon =$ 高調波の x_n を直接求める近似による。 四角の表が $P + \epsilon$ の解がデジタル解と一致しない原因の表である。 = 此等が $3/2$ 次、ultra-subharmonic resonance に相当するものである。 ϵ が判明する疑問が此の解に及び得る。 可成り $\delta =$ 此等の表による $V = 2$ と取つた ultra-subharmonic resonance の計算の結果 $P + \epsilon$ の解との比較を (図 5 a), b), c) に示す。 = この計算は当数理解析研究所の TOSB AC 機による $n = 20$ 程度の x_n を取つた計算の結果であるが、 $P + \epsilon$ の解と振幅の対称な波の形に一致する完全一致を示す。

次に収束改善法の効力を示す資料を (図 6 a), b) の表 I と表 II に掲げる。

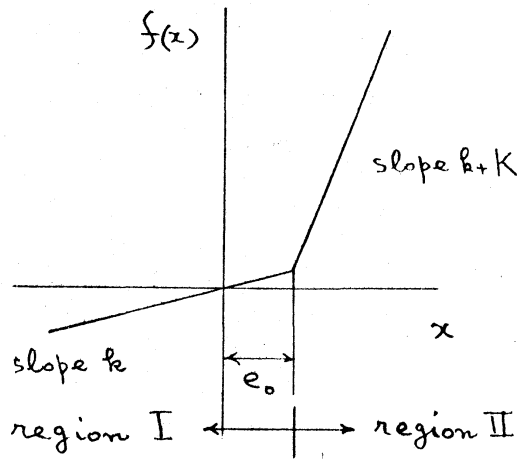
最近 M. E. Levenson の 'Duffing 方程式' の ultra-subharmonic resonance の非線形曲線を解析法による計算による x_n 、 ϵ の電算機による数値積分の結果とを可成り近い一致を示す。

参考文献

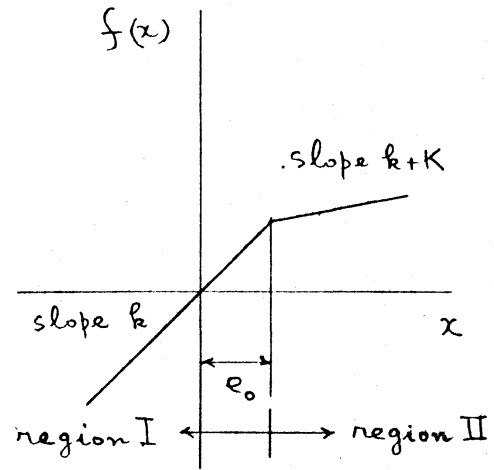
- 1) Maezawa, S., Proc. IUTAM Symposium on Nonlinear Oscillations, Kiev, 1961 (1963), p.327.
- 2) " " " , Nonlinear Vibration Problems, No.5, (1963) p. 156.
- 3) " " " , Acta Technica ČSAV, 12 -1 (1967), p.1.
- 4) " " " , Proc. 16th Japan Nat. Congr. Appl. Mech. 1966(1968), p.294.
- 5) " " " , Proc. 4th Conf. on Nonlinear Oscillations, Prague, 1967(1968), p.361.
- 6) " " " , Report of the Faculty of Engg. Yamanashi Univ., No.20(1969), p.26.
- 7) Loud, W.S., Internat. J. Nonlinear Mech. 3 -3 (1968), p.273
- 8) Maezawa, S., Bulletin of JSME, 7 - 25 (1964), p.52.
- 9) Riesz, F., Les Systèmes d'Équations Linéaires a une Infinité d'Inconnues, Gauthier-Villars (1952)
- 10) Maezawa, S., Bulletin of JSME, 4 -14 (1961), p.201.
- 11) Levenson, M.E., Quart. Appl. Math., 26 -3 (1968), p.456.



(1/2) 1



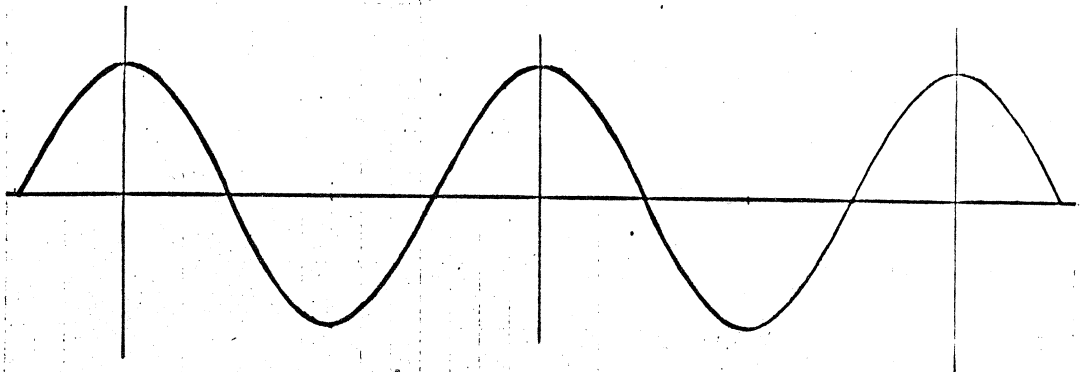
(a) hard spring
($K > 0$)



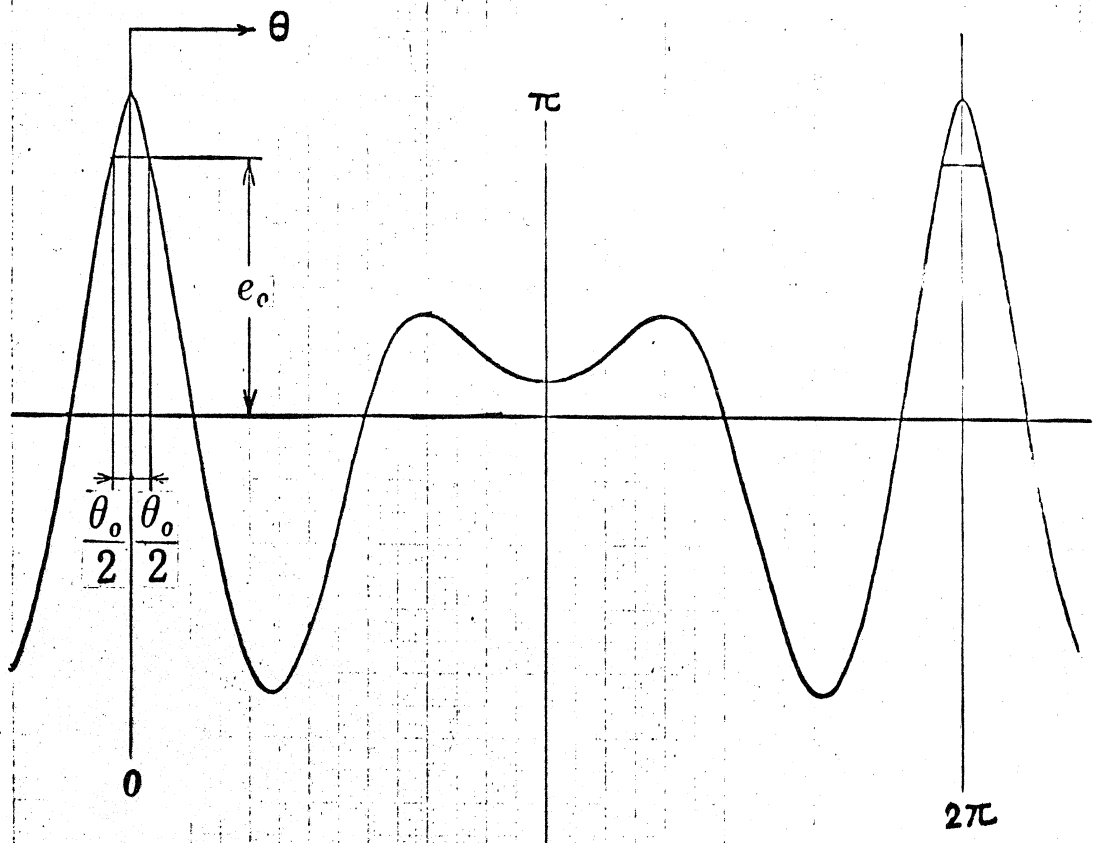
(b) soft spring
($K < 0$)

(1/2) 2.

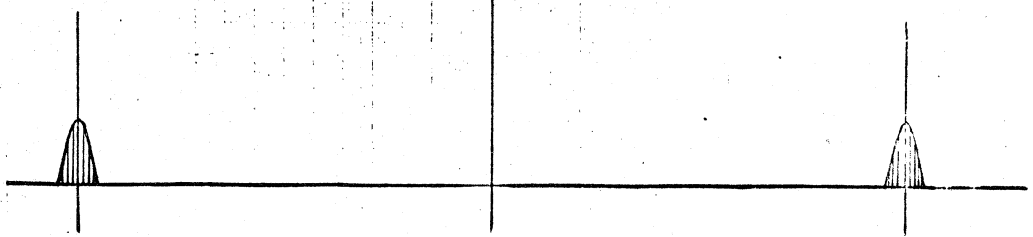
Exciting Force



Resulting Vibration



Nonlinear Part of Restoring Force



3 Wave Forms of Exciting Force, Resulting Vibration and Nonlinear Part of Restoring Force

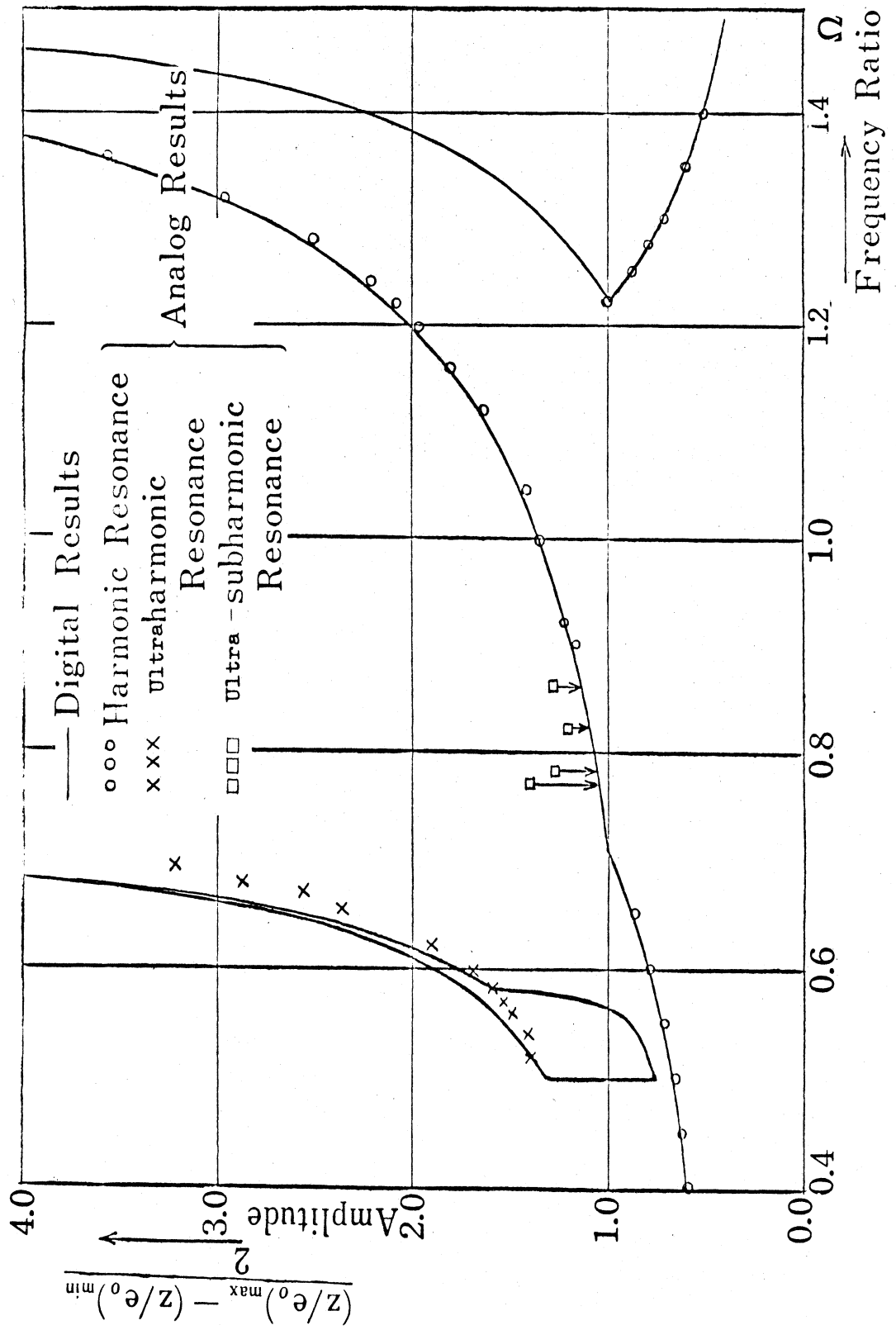
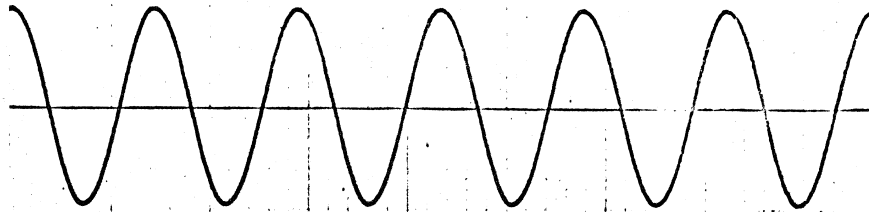


图4 Resonance Curves of Various Kinds

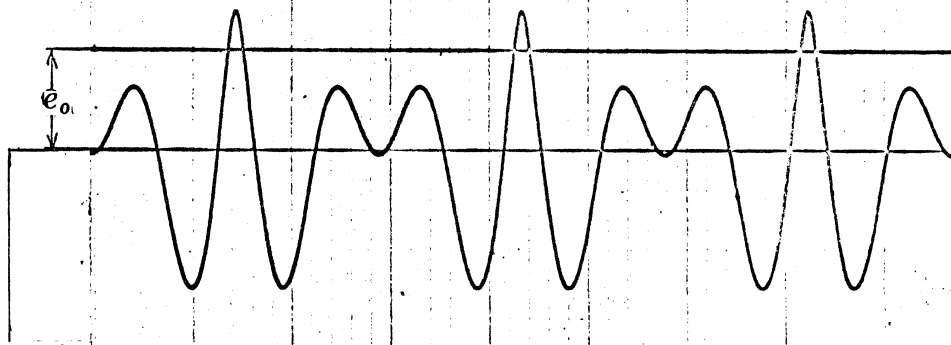
($K/\omega = 10.0, q/\omega_0 = 0.5$)

$$\Omega = 0.765, q/ke_0 = 0.484$$

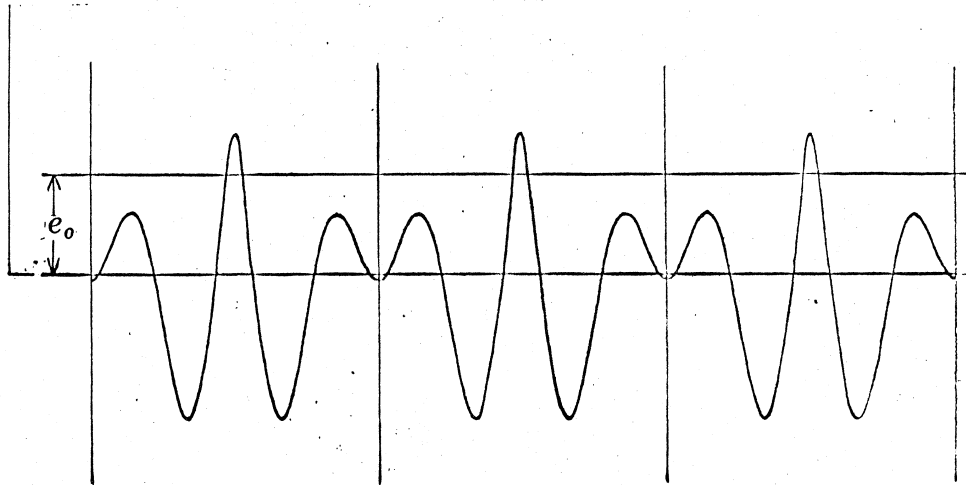
Exciting
Force



ultra-subharmonic
Vibration



by Analog Computer

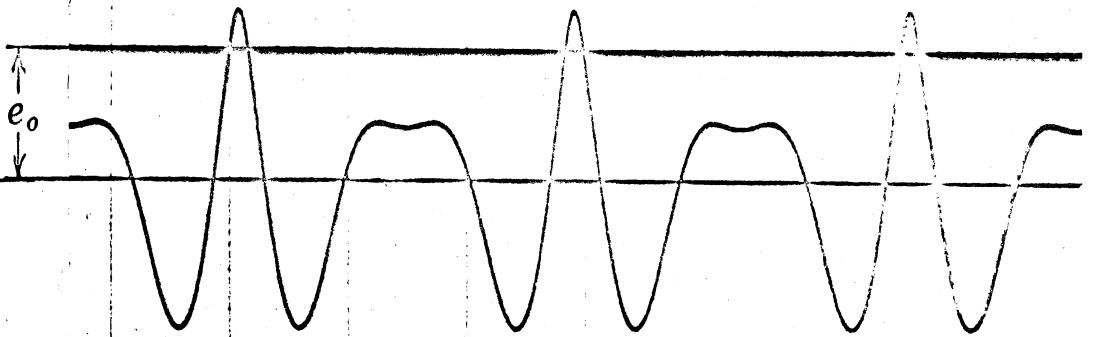
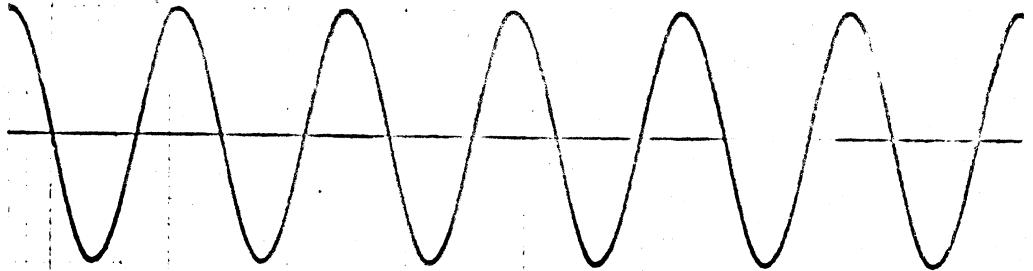


Theoretical

5 (a) Digital and Analog Results

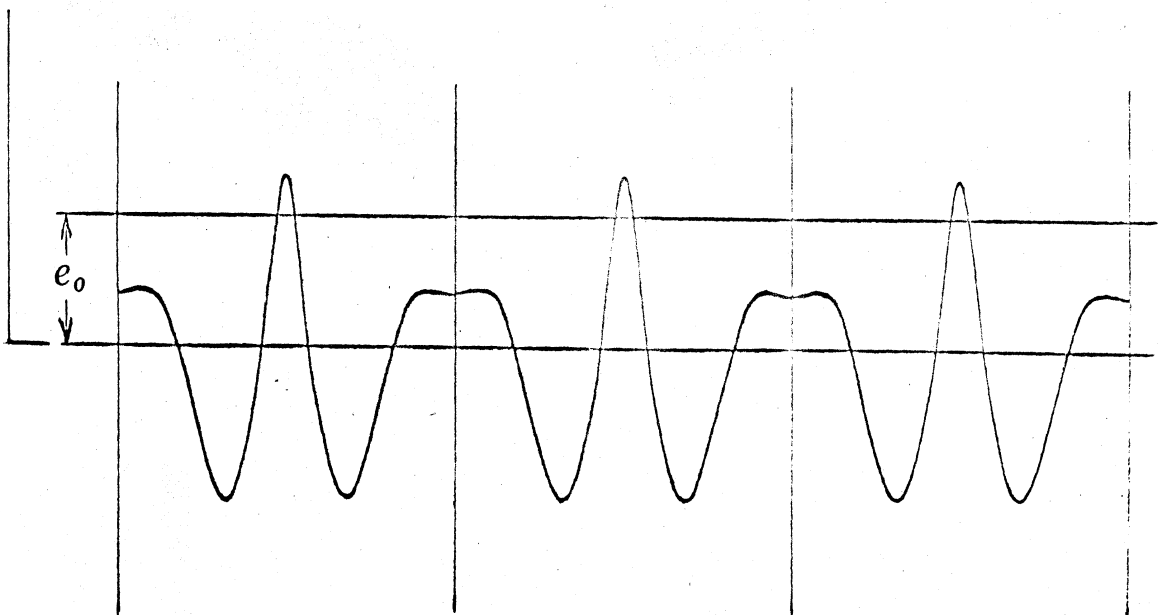
$$\Omega = 0.780, \quad q/ke_0 = 0.497$$

Exciting
Force



ultra-subharmonic
Vibration

by Analog Computer

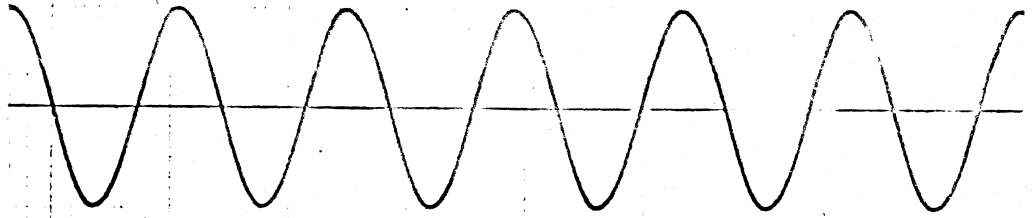


Theoretical

Fig 5 (b) Digital and Analog Results

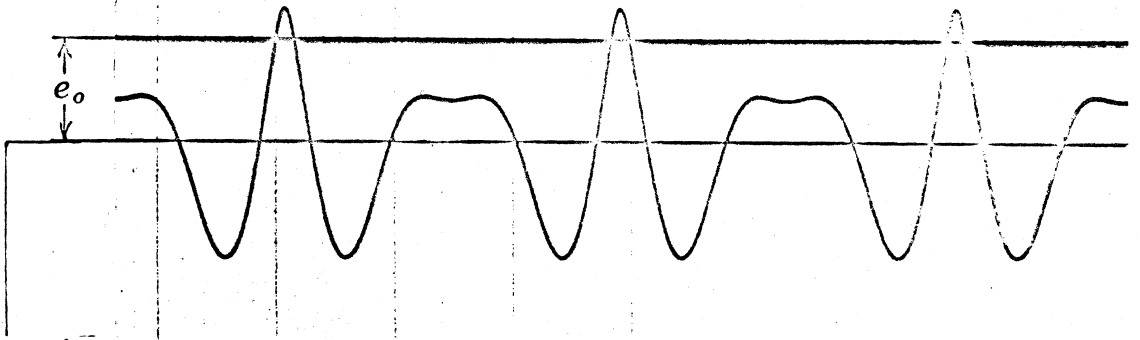
$$\Omega = 0.780, \quad q/ke_0 = 0.497$$

Exciting
Force



Ultra-subharmonic
Vibration

by Analog Computer



Theoretical

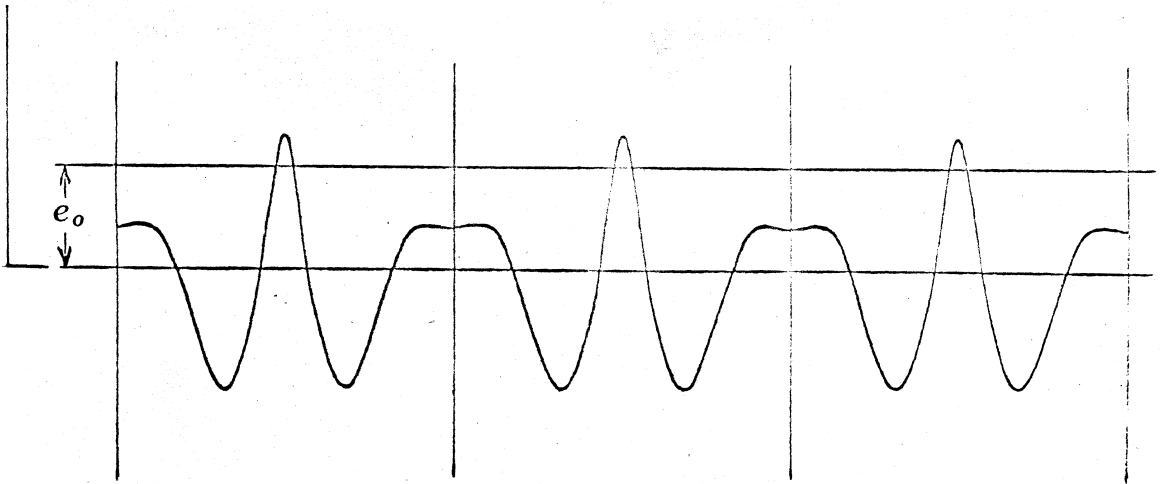


Fig 5 (b) Digital and Analog Results

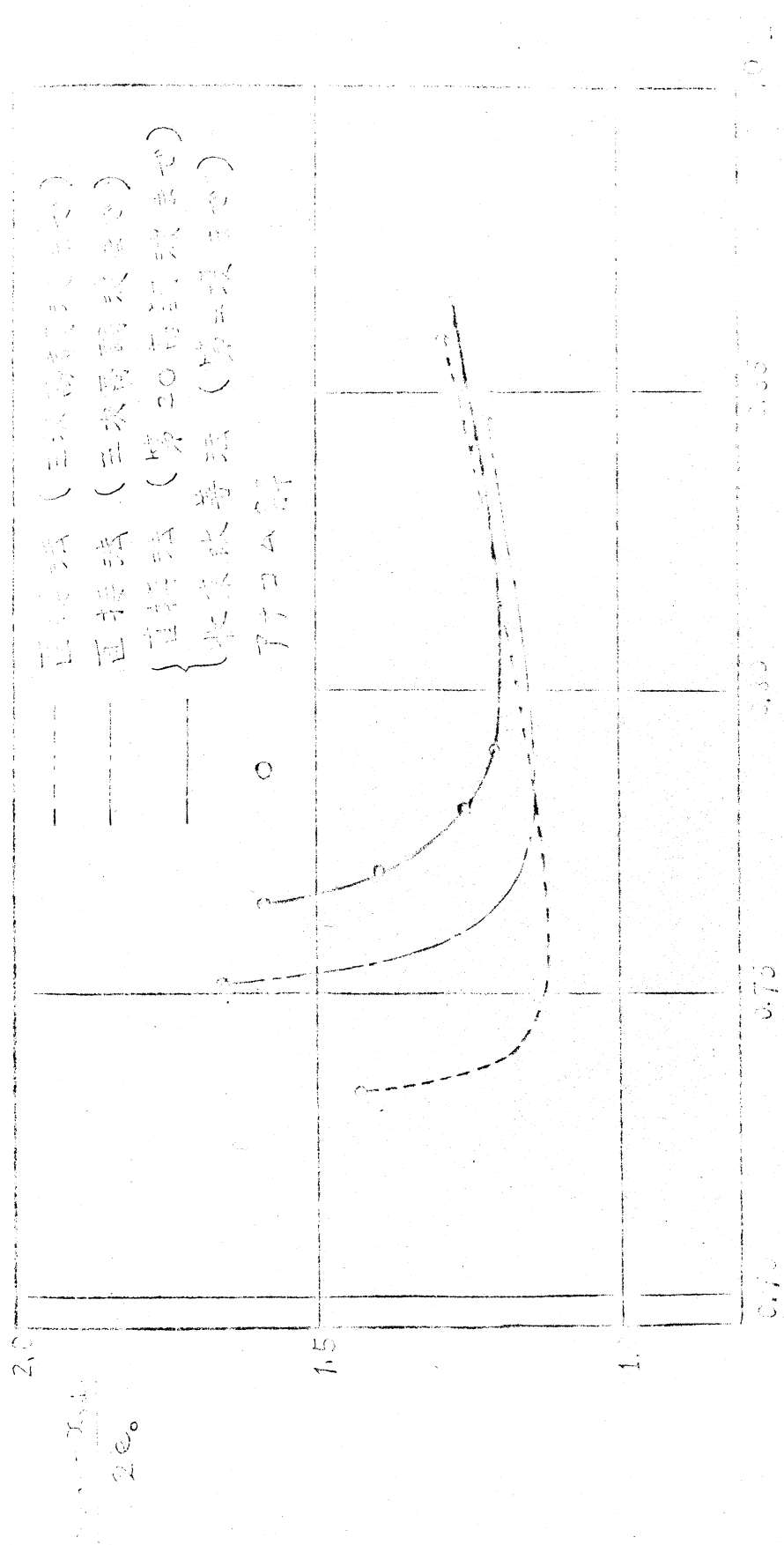


図 16. 種々の近似法と方法による共振曲線の比較

$K/k=10.0, \Omega=0.770, \theta=19.50$

	直接法 (第3項まで)	直接法 (第5項まで)	直接法 (第20項まで)	収束改善法 (第2項まで)
X(0)	0.05551236	0.07515430	0.42656104	0.48639570
X(1)	0.05535226	0.07493786	0.42537922	0.48505370
X(2)	0.05487393	0.07429148	0.42184802	0.48104386
X(3)	0.05408327	0.07322288	0.41601015	0.47441445
X(4)		0.07174540	0.40793597	0.46524505
X(5)		0.06987779	0.39772246	0.45364532
X(6)			0.38549165	0.43975330
X(7)			0.37138872	0.42373318
X(8)			0.35557975	0.40577284
X(9)			0.33384909	0.38608085
X(10)			0.31959656	0.36488334
X(11)			0.29983437	0.34242047
X(12)			0.27918389	0.31894286
X(13)			0.25787234	0.29470778
X(14)			0.23612938	0.26997539
X(15)			0.21418382	0.24500495
X(16)			0.19226024	0.22005105
X(17)			0.17057593	0.19536010
X(18)			0.14933781	0.17116694
X(19)			0.12873976	0.14769171
X(20)			0.10896009	0.12513709
q/ke.	0.4656486	0.4510371	0.4929589	0.4990818
$\frac{X_{max}-X_{min}}{2e_0}$	1.0751350	1.0372404	1.3390459	1.383916

表 II

 $k/k_0 = 10.0, \Omega = 0.770, Q_0 = 19.650$

	収束改善法(第2項まで)	収束改善法(第3項まで)
ξ_1	8.646196391	8.684612963
ξ_3	-0.042826028	-0.038143360
ξ_5	—————	0.000679817
X(0)	0.60188250	0.60190153
X(1)	0.60019741	0.60021627
X(2)	0.59516276	0.59518110
X(3)	0.58684006	0.58685755
X(4)	0.57533072	0.57534705
X(5)	0.56077447	0.56078934
X(6)	0.54334707	0.54336024
X(7)	0.52325759	0.52326885
X(8)	0.50074506	0.50075423
X(9)	0.47607472	0.47608168
X(10)	0.44953387	0.44953857
X(11)	0.42142748	0.42142989
X(12)	0.39207341	0.39207357
X(13)	0.36179764	0.36179564
X(14)	0.33092936	0.33092536
X(15)	0.29979615	0.29979033
X(16)	0.26871914	0.26871177
X(17)	0.23800856	0.23799990
X(18)	0.20795934	0.20794973
X(19)	0.17884724	0.17883702
X(20)	0.15092525	0.15091479
q/k_0	0.50941772	0.50941372
$\frac{X_{max} - X_{min}}{2e_0}$	1.457548	1.457554