数理解析研究所講究録
第86巻 1970年 1-12

Diophantine predicate の recursive degree について

東京教育大　広瀬 健

§0.　ヒルベルトの第10問題 —— 任意に与えられた不定方程式が、整数解をもつか否かを決定すること —— は、M. Davis, H. Putnam, J. Robinson, R. M. Robinson, A. Марков あるいは最近 Ю. В. Матиясевич らによって多くの著しい結果が得られているが、最終的な解答は得られていない。
Dr. Ю. В. Матиясевич からの手紙によれば、2変数までの場合は肯定的な解が得られたとの事であるが、一般の場合は、否定的な解が得られるであろうことが、多くの人の予想するところである。

これまでに得られて来た結果は、いずれも次の命題を証明することを目的としたものといってよいであろう。すなわち、

"全ての recursively enumerable predicate は diophantine predicate である"

この命題を証明するために、Davis, Putnam, Robinson らは、次のようなことがらを明らかにした([1], [2], [3])。

Th. I　$R(x_1, x_2, \cdots x_n)$ を任意の recursively enumerable predicate とするとき、次のような diophantine predicate $D(k, x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ が存在

する：

$$R(x_1, x_2, \cdots, x_n) \iff (Ey)(k)_{k<y}\, D(k, x_1, \cdots, x_n, y) .$$

<u>Th. II</u> predicates $z = \sum_{i=1}^{y} \mathrm{Rem}(a, 1+iy)$, $0 = \sum_{i=1}^{y} \mathrm{Rem}(a-i, 1+iy)$ がいずれも diophantine ならば、全ての recursively enumerable predicate は diophantine である。

<u>Th. III</u> 次の3つの predicates $(Ex, y, z)^{a}_{b, b, a}[(1+cz)x = y]$, $(Ex, z)^{a}_{b, a}[(1+cz)x = b-z]$, $(Ex, y, z)^{a}_{b, a, a}[(1+cz)x = b-y]$ がいずれも diophantine ならば、全ての recursively enumerable predicate は diophantine である。

<u>Th. IV</u> 任意の recursively enumerable predicate $R(x_1, \cdots, x_n)$ は、適当な exponential diophantine equation $F(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_m) = 0$ によって次のように表わされる：

$$R(x_1, x_2, \cdots, x_n) \iff (Ez_1)(Ez_2)\cdots(Ez_m)[F(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_m) = 0] .$$

<u>§1.</u> 第10問題に関して、否定的な解答を予想することは、全く自然なことと思われるが、全ての recursively enumerable predicate が diophantine であることを予想することに対しては、いささかの疑念なしとしない。Diophantine predicate は、明らかに recursively

enumerable であり，したがって recursively enumerable predicates のクラスと，diophantine predicates のクラスが一致することが示されるならば，それは見事な結果であるといってよいであろう．しかし，それは，いささか強すぎる予想であるようにも思えるのである．"Post の問題"が Post の予想に反して 否定的に解決されたこと，特に，degree 0' より小さい recursively enumerable set の degree の構造を考えるとき，むしろ次の予想の方が真実であるようにも思えるのである [4]：

<u>Conjecture I</u>. Diophantine でないような recursively enumerable predicate が存在する．

<u>Conjecture II</u>. Degree 0' をもつ predicate は diophantine でない．

<u>Conjecture III</u>. 任意に与えられた diophantine predicate D_0 に対し，not recursive in D_0 であるような diophantine predicate D_1 が存在する．

明らかに，Conjecture III ならば，Conjecture I, II が imply される．さらに，第10問題も，否定的な解答が得られる．

さらに，diophantine predicate の degree の無限上昇列が得られること，predicate $(Eb)(Ec)[a=(2b+3)\cdot c]$ が diophantine になり得ないことなども imply される．

さて，以上の事柄を念頭において，あらためて第10問題を考察してみよう．

§2. Kleeneらによってなされたrecursion theoryの構成では、Formal systemのArithmetizationに際し、p^xのformのGödel numberが用いられ、さらに帰納法あるいはμ-operatorが本質的な役割を演じている。したがって、T-predicate或いはS-predicateなどは、diophantine predicateに関する議論に用いることはできない。むしろ、§1で述べたConjectureが正しいならば$y=p^x$のformのpredicateは、diophantine predicateではありえないことになる。しかし、S-predicateに相当するものは、recursion theoryの一般論を展開するために、きわめて有用であるから、可能なかぎりdiophantineに近似したpredicateでS-predicateに対応するものを作りたい。

まず、自然数の有限列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ のGödel number $\ulcorner a_1 a_2 \cdots a_n \urcorner$ を次のように定義する：

$\ulcorner a_1 a_2 \cdots a_n \urcorner = J_{n+1}(a_1 a_2 \cdots a_n 0)$　ただし、J_{n+1} は次のように定義された $(n+1)$ 変数の 2^n 次多項式である。

$$\begin{cases} J_1(x) = x \\ J_{n+1}(x_1 x_2 \cdots x_{n+1}) = \frac{1}{2}(x_1 + J_n(x_1 x_2 \cdots x_n))(x_1 + J_n(x_1 x_2 \cdots x_n)+1) + x_1 \end{cases}$$

このとき、

$$[\ulcorner a_1 \cdots a_n \urcorner]_i = \begin{cases} a_i & \text{if } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$le(\ulcorner a_1 \cdots a_n \urcorner) = n$$

とおけば、

$$\lambda a\ [a]_i \quad \text{は diophantine.}$$

ただし、 $\lambda a i\ [a]_i$, $\lambda a\, lh(a)$ に関してもいえる.

(Function が diophantine とは、その representing predicate が diophantine であることをいう)

さて、Kleene [5] によるものと、ほゞ同様に recursive function を定義する formal system を作る. 上述の理由により、この ~~[illegible]~~ system で定義される recursion theory は Kleene のものと全く同様であるが ~~[illegible]~~ やゝ定義が変更される.

Constants : 0 , $=$, $'$, $^{\blacktriangledown}$.

variables : $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$

function letters : $f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots$

numerals : 0 , $0'$, $0''$, $\cdots$, $\cdots$

terms : (i) variable は term である. (ii) numeral は term である. (iii) t が term のとき、$t^{\blacktriangledown}$ は term である. (iv) t_i が term で、f が function letter のとき、$f(t_1, t_2 \cdots t_n)$ は term である.

equations, system of equations に関しては Kleene と同様.

inference rules は、substitution, replacement 以外に次のものを加える : addition, proper subtraction, multiplication 及び realization.

realization とは、~~numeral~~ n が numeral で、$n^{\blacktriangledown}$ なる term があるとき、$n^{\blacktriangledown}$ を n' に replace する rule である.

以下, deduction, recursive function の定義などは, いずれも Kleene のものと同様に定義されるものとする.

先に述べた arithmetization の方法を用いて, これらにより S-predicate に対応するものを定義することは容易である. すなわち, 任意の recursively enumerable predicate $\exists y\, R(x,y)$ に対し, ある e が存在して, $\exists y\, R(x,y) \iff \exists y\, S^*(e,x,y)$ を満たすような predicate S^* が定義できる. 勿論, S^* は primitive recursive であるが, diophantine か否かは分からない.

S^* を定義する一連の meta-mathematical predicate の内容と form に照し, 少々の制限を加えることにより次のような predicate $S^{(n)}$ が得られる:

<u>Th. V</u> 任意の recursively enumerable predicate $\exists y\, R(x,y)$ に対し次を満たすような predicate $S^{(n)}$ が存在する:

(i) $\exists y\, R(x,y) \iff \exists n\, \exists y\, S^{(n)}(e,x,y)$

を満たす自然数 e が存在する.

(ii) $\exists y\, S^*(e,x,y) \iff \exists n\, \exists y\, S^{(n)}(e,x,y)$

(iii) $\lambda xyz\, S^{(n)}(z,x,y)$ は diophantine predicate

<u>§3.</u> 以下, 各 e に対し次のような $\hat{e}$ を対応させる:

$$\exists y\, S^*(e,x,y) \iff \exists y\, S^*(\hat{e},x,y)$$

上式に於いて, e の代りに $\hat{e}$ を用いる利点は以下に示される

ように, $\hat{e}$ の represent する system of equations の内容がつねに明確なことにある.

今, 任意に e を固定しよう. このとき $f(x) = \mu y\, S^*(e, x, y)$ を定義する description を考える. この description としては, S^* を定義する一連の metamathematical predicate の representing function と, それらに必要ないくつかの auxiliary function の列を考えれば十分である. これを e の naive description と呼び, その結果得られる description を, e の normal description と呼ぶ. normal description を得るための変更は次のようである:

e の naive description を構成する函数の中で recursion を用いて記述されているものに注目する. $+$, $\dot{-}$, $\times$ に対応する function が initial function として formal system に入っていることに注意すれば, それらは次のような function としてよい.

(a) term であることを表現する述語の representing function,

(b) bounded $\forall$-quantifier のついた述語の representing function,

(c) bounded $\exists$-quantifier のついた述語の representing function,

(d) deduction from e を表す predicate $D(e, y)$.

さて, $\lambda xy\, S^*(e, x, y)$ が定義されるために必要な term の construction の深さは e をこえることはない. e は given constant であるから, (a) に関係する representing function は, いずれも recursion を用いないものに replace できる.

次に、S^*の定義の途中に現れるbounded ∀-quantifierは、いずれもeからのprimitive recursive procedureによって得られるvalueでおさえられるから、(b)に属するfunctionも、recursionを用いないものにreplaceできる。

さらに、$(\exists q)_{q \leq b}[\psi(x_1 \cdots x_n, q) = 0]$なるpredicateのrepresenting functionがeのnaive descriptionに現れるときは、これを次のようなpartial recursive functionによってreplaceする：

$$g(x_1 \cdots x_n, b) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} (\tau(\psi(x_1 \cdots x_n, q), q) \dot{-} b))$$

$$\tau(0, q) = q.$$

この操作により、(c)に属するfunctionもrecursionを用いないものにreplaceされる。naive descriptionを構成する列の最後のfunction ($f(x) = \mu y[s^*(e, x, y) = 0]$) に現れるμ-operatorは、

$$f(x) = \tau(s^*(e, x, y), y),$$ (s^*はS^*のrepresenting function)

$$\tau(0, y) = y,$$

でreplaceすれば、以上のような変更をnaive descriptionにほどこして得られる函数の列の中で、recursionによって表現されているのは、今や$D(e, y)$のrepresenting functionのみである。このfunctionに対し、以下のような変更を行う：

$g(a, b, c, d)$を a が d からの deduction であること ($D(d, a)$) を表すrepresenting functionとする。ここで b, c は各々 $D(d, [a]_0)$, $D(d, [a]_1)$ を表す。さらに、$T_y(w)$を次のような函数とする：

するなら、 $\lambda y w\ T_y(w)$ は recursive function, かつ、

$\lambda y w z\ [T_y(w) = z]$ は diophantine predicate

で、 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を任意の整数とするとき、

$$T_i(w_0) = a_i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

であるような w_0 が存在する。

今、 $\delta(e, y) = T_y[\mu w[T_0(w) = \langle d(e,0)\rangle \;\&\; T_1(w) = \langle d(e,1), d(e,0)\rangle$ $\&\; (\forall\eta)_{\eta<y}[T_{\eta+1}(w) = \langle g(\eta, [T_{[\eta]_1}(w)]_0, [T_{[\eta]_2}(w)]_0, e), T_\eta(w)\rangle]]$

とおき、

$$d(e, y) = [\delta(e, y)]_0$$

と定義すれば、これは明らかに $D(e, y)$ の representing function であり、

(4) $\quad (\forall\eta)_{\eta<y}(T_{\eta+1}(w) = \langle g(\eta, [T_{[\eta]_1}(w)]_0, [T_{[\eta]_2}(w)]_0, e), T_\eta(w)\rangle)$

のみが recursion によって定義される函数の列を、その description にすることができる。その様な列によって naive description の $D(e, y)$ に相当する部分を replace すれば、それが求めるものとなる description である。このような description を e の normal description と呼び、これを formalize し、それから得られた system of equations の Gödel number を $\hat{e}$ で記す。

以上の定義の方法から、明らかに

$$\exists y\, S^*(e, x, y) \iff \exists y\, S^*(\hat{e}, x, y)$$

が成立する。

§4. 前節で定義した $\hat{e}$ を用いて、述語 $S^{q(n)}(e,x,y)$ を定義することが、この節の目的である。

$\hat{e}$ に於いて、(H) を否定する function f の function letter に添字をもつものを用い、(H) が成立するとき $f=0$ とする inference rule C_n^q を作り、$S^{(n)}$ を定義する一連の predicate の中の inference rule の部分に、これを加える。このようにして定義しなおした述語を $S^{q(n)}$ と記す。尚、C_n^q には (H) を記述する部分があり、この部分は diophantine か否かは分らない。しかし、定義の方法から、(H) の quantifier を除いた部分は、diophantine であり、その否定も又 diophantine となる。さて、$\hat{e}$ と $S^{q(n)}$ の定義から次の定理が得られる：

Th. VI　ある函数 θ が存在して、任意の e に対し

$$\exists n \exists y\, S^{q(n)}(e,x,y) \iff \exists y\, S^{q(\theta(e))}(e,x,y)$$

~~したがって Th.V と Th.VI から~~ また、定義から明らかに、

Th. VII　$\exists y\, S^{*}(e,x,y) \iff \exists n \exists y\, S^{q(n)}(e,x,y)$

したがって Th.V, Th.VI, Th.VII から次の定理が得られる。

Th. VIII　任意の recursively enumerable predicate $\exists y R(x,y)$ に対し、ある自然数 e が存在して、

$$\exists y\, R(x,y) \iff \exists y\, S^{q(\theta(e))}(e,x,y)$$

が成立する。

上の Theorem から Davis によるよく知られた結果（Th. I）

が Corollary として得られることになる。また、$S^{(n)}$ の定義を詳細に眺めれば、Th II, Th IV の Davis, Putnam, Robinson らの結果も得られる。

§5. $S^{\natural(n)}$ は ($\natural$) を含むため、diophantine か否かは分らない。($\natural$) によって $S^{\natural(n)}$ を定義したように、いくつかの predicate ($\sharp_0$), ($\sharp_1$), …, ($\sharp_n$) を用意して各々 $S^{\sharp_i(n)}$ を定義すると、種々な興味ある system が得られる。($\sharp_0$) … ($\sharp_n$) が如何なるものであるにせよ、Th II に相当する Theorem は得られるから、適当な diophantine predicate ($\sharp$) が定義できて

$$\exists y\, S^{\natural(\theta(e))}(e, x, y) \Longleftrightarrow \exists y\, S^{\sharp(\theta'(e))}(e, x, y)$$

が成立すれば、Σ_1^0-predicate は diophantine となるし、いくつかの ($\sharp_0$) … ($\sharp_1$) の組合せによって $\exists y\, S^{\natural(\theta(e))}(e, x, y)$ が表現されるとすれば、Conjecture I が成立することもあり得るであろう。

$\natural$-system に於ける ($\natural$)、$\sharp_i$-system に於ける ($\sharp_i$) を各々の system に随伴する predicate という。

$\natural$-system に随伴する predicate に関しては、いくつかの興味ある結果が得られているが、これについては、あらためて報告しようと思う。

文献

[1] M. Davis, Arithmetical problems and recursively enumerable predicates, J. Symb. Logic, vol. 18, 1953.

[2] M. Davis and H. Putnam, Reduction of Hilbert's 10th problem, J. Symb. Logic, vol. 23, 1958.

[3] M. Davis, H. Putnam and J. Robinson, The decision problem for exponential diophantine equations, Ann. of Math., vol. 74, 1961.

[4] K. Hirose, A conjecture on Hilbert's 10th problem, Comm. Math. St. Pauli XVII, 1968.

[5] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, New York, Tronto, Amsterdam and Groningen, 1952.