

Constructive infinitely long expressions  
をもった logic の hierarchy

九大理 上江洲 忠弘

§ 1. 序

$\omega$ -type の conjunction, quantification をもつ simple type theory で, その formula, variety を Kino-Takeuti [K/T] の意味で 'constructive' なものに限った形式的体系 STCI を考える. STCI $^{\alpha, \beta}$  を formula や variety の  $\omega$ -type の conjunction の深さ,  $\omega$ -type の quantification の深さが夫々 ordinal  $\alpha, \beta$  より小さいものに限った STCI の subsystem とし, STCI $^{\alpha, \beta}$  に数論の公理をつけ加えて得られる体系を NSTCI $^{\alpha, \beta}$  とする.  $\alpha, \beta$  を動かすことにより得られる NSTCI $^{\alpha, \beta}$  の hierarchy について述べる.

§ 2. 体系 STCI

2.1. 定義. Type.

- (1) 0 と 1 は type である.
- (2)  $t_1, \dots, t_n$  が type ならば  $(t_1 \dots t_n)$  は type である.
- (3) 以上により得られるものの  $\forall$  が type である.

各 type  $t$  に対し、次の様に GN  $\ulcorner t \urcorner$  が対応している:

$$\ulcorner 0 \urcorner = 1, \ulcorner 1 \urcorner = 3, \ulcorner (t_1 \dots t_n) \urcorner = \langle \ulcorner t_1 \urcorner, \dots, \ulcorner t_n \urcorner \rangle,$$

但し  $\langle m_1, \dots, m_n \rangle$  は数  $2^{m_1} \dots P_{n-1}^{m_n}$  を示す。

以後 type とその GN を同一視することがある。

## 2.2. 定義. Type 列.

値が type の GN である recursive function を type 列と呼ぶ。

## 2.3. STCI で用いる記号.

論理記号:  $\neg, \wedge, \vee$ .

変数記号: free s-variables:  $\delta_0^{\tau}, \delta_1^{\tau}, \dots$  ( $\tau$  は type 列).

bound s-variables:  $\varphi_0^{\tau}, \varphi_1^{\tau}, \dots$  ( " ) .

free variables:  $a_0^t, a_1^t, \dots$  ( $t$  は type).

bound variables:  $x_0^t, x_1^t, \dots$  ( " ) .

constant variable:  $0$  (type は  $0$ ).

他の記号:  $' , \in , \lambda , ( , ) , \rightarrow , \circ , \_$ .

これらの記号には各異なる GN が対応しているものとする。

記号  $S$  に対しその GN を  $\ulcorner S \urcorner$  で表わす。

## 2.4. 定義. $Qf$ とその GN, $c-nn$ , $q-nn$ .

(1)  $\delta^{\tau}$  が s-variable ならば,  $\delta^{\tau}(j)$  は type  $\tau(j)$  の  $qf$   $\tau$ , その

$c-nn$ ,  $q-nn$  は共に  $0$ ,  $\langle \ulcorner \delta^{\tau} \urcorner, j+1 \rangle$  はその GN.

(2)  $0$  は type  $0$  の  $qf$   $\tau$ , その  $c-nn$ ,  $q-nn$  は共に  $0$ ,  $\ulcorner 0 \urcorner$  は

その GN.

- (3)  $d^t$  が variable ならば,  $d^t$  は type  $t$  の qf  $\tau$ ,  $\tau$  の c-nm,  $g$ -nm は共に 0,  $\ulcorner d^t \urcorner$  は  $\tau$  の GN.
- (4)  $T$  が type 0 の qf  $\tau$   $a$  が  $T$  の GN ならば,  $T'$  は type 0 の qf  $\tau$ ,  $\tau$  の c-nm,  $g$ -nm は共に 0,  $\langle \ulcorner \neg \urcorner, a \rangle$  が  $\tau$  の GN.
- (5)  $V_1, \dots, V_k$  及  $W \in V$  が夫々 type  $t_1, \dots, t_k, (t_1, \dots, t_k)$  の qf  $\tau$ ,  $a_1, \dots, a_k, a$  が夫々  $V_1, \dots, V_k, V$  の GN ならば,  $V_1 \dots V_k \in V$  は type 1 の qf  $\tau$ , c-nm,  $g$ -nm は各  $\max\{N_{t_c}(V_1), \dots, N_{t_c}(V_k), N_{t_c}(V)\}$ ,  $\max\{N_{t_g}(V_1), \dots, N_{t_g}(V_k), N_{t_g}(V)\}$ ,  $\langle \ulcorner \exists \urcorner, \langle a_1, \dots, a_k \rangle, a \rangle$  が GN  $\tau$  である, 但し,  $N_{t_c}(E)$ ,  $N_{t_g}(E)$  は夫々  $E$  の c-nm,  $g$ -nm を示す.
- (6)  $A$  が type 1 の qf,  $a$  が  $A$  の GN ならば,  $\neg A$  は type 1 の qf  $\tau$ , c-nm,  $g$ -nm は夫々  $A$  の c-nm,  $g$ -nm に等しく,  $\langle \ulcorner \neg \urcorner, a \rangle$  は  $A$  の GN  $\tau$  である.
- (7)  $A, B$  が type 1 の qf,  $a, b$  が各  $A, B$  の GN ならば,  $(A \wedge B)$  は type 1 の qf  $\tau$ , c-nm,  $g$ -nm は夫々  $\max\{N_{t_c}(A), N_{t_c}(B)\}$ ,  $\max\{N_{t_g}(A), N_{t_g}(B)\}$   $\tau$ ,  $\langle \ulcorner \wedge \urcorner, a, b \rangle$  は  $\tau$  の GN.
- (8)  $A_0, A_1, \dots$  が type 1 の qf  $\tau$ ,  $f$  が recursive function の Gödel number  $\tau$ , 各  $i$  に対し  $f(i)$  が  $A_i$  の GN ならば,  $\wedge(A_0, A_1, \dots)$  は type 1 の qf  $\tau$ , c-nm,  $g$ -nm は夫々  $\sup(N_{t_c}(A_0)+1, N_{t_c}(A_1)+1, \dots)$ ,  $\sup(N_{t_g}(A_0)+1, N_{t_g}(A_1)+1, \dots)$ ,

$\langle \ulcorner \lambda \urcorner, f \rangle$  がその GN.

(9)  $x^t$  が bound variable,  $A$  が type 1 の  $gf$ ,  $a$  が  $A$  の GN ならば,  $\forall x^t A$  は type 1 の  $gf$  で,  $G_{nm}$ ,  $q_{-nm}$  は共に  $A$  のそれらに等しく,  $\langle \ulcorner \forall \urcorner, \ulcorner x^t \urcorner, a \rangle$  が GN.

(10)  $\varphi^c$  が bound variable,  $A$  が type 1 の  $gf$  で,  $a$  が  $A$  の GN ならば,  $\forall \varphi^c A$  は type 1 の  $gf$  で,  $G_{nm}$  は  $A$  の  $G_{nm}$  に等しく,  $q_{-nm}$  は  $N_{t_0}(A)+1$ ,  $\langle \ulcorner \forall \urcorner, \ulcorner \varphi^c \urcorner, a \rangle$  はその GN である.

(11)  $y_1^{t_1}, \dots, y_k^{t_k}$  が夫々 type  $t_1, \dots, t_k$  の bound variable,  $A$  が type 1 の  $gf$ ,  $a$  が  $A$  の GN ならば,  $\lambda y_1^{t_1} \dots y_k^{t_k} A$  は type  $(t_1, \dots, t_k)$  の  $gf$  で,  $G_{nm}$ ,  $q_{-nm}$  は共に  $A$  のそれらに等しく,  $\langle \ulcorner \lambda \urcorner, \langle \ulcorner y_1^{t_1} \urcorner, \dots, \ulcorner y_k^{t_k} \urcorner \rangle, a \rangle$  はその GN.

(12) (1) ~ (11) により得られるもののみが  $gf$  である.

## 2.5. 定義. Variety, formula, variety 列.

free variable, free s-variable を高々有限個しか含まず, bound variable, bound s-variable を free に含まない type  $t$  の  $gf$  を type  $t$  の variety といい, 特に type 1 の variety を formula という.  $\tau$  が type 列で,  $V_0, V_1, \dots$  が type  $\tau(0), \tau(1), \dots$  の variety で, 各  $n$  に対し  $\Phi(n)$  が  $V_n$  の GN としたような recursive function  $\Phi$  が存在するとき,  $(V_0, V_1, \dots)$  を variety 列と呼ぶ, 但し,  $(V_0, V_1, \dots)$  は free variable, free s-variable を高々有

限個しか含まれるものとする。

2.6. 定義. *Sequent*.

$A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$  が formula  $\tau$ ,  $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$  が夫々の GN のとき,  $A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$  を *Sequent* と呼ぶ.  $\langle \tau \rightarrow, \langle a_1, \dots, a_m, 1 \rangle, \langle b_1, \dots, b_n, 1 \rangle \rangle$  はその GN  $\tau$  である.

証明に関する概念は, Gentzen 流に定義する, 但し, 推論に *Extensionality* を含むものとする.

2.7. 定理. 全ての  $\mathfrak{g}$  の全ての GN の集合は  $\Pi_1$ -set であり,  $\Pi_1$ -set に関し *complete* である.

2.8. 定理. 各  $\mathfrak{g}$  の  $\text{cnn}$ ,  $\mathfrak{g}\text{-nn}$  は  $\omega_1$  (the least ordinal not constructive) より小さい.

2.9. 定義. *c-subformula*, *g-subformula*.

Variety  $B$  が variety  $A$  の *c-subformula*  $\tau$  である ( $B \leq_c A$ ) ということは,

(1)  $B$  は  $A$   $\tau$  である,

(2)  $A$  が  $V_1 \dots V_n \in V$  の形  $\tau$ ,  $B \leq_c V_1, \dots, B \leq_c V_n$  又は

$B \leq_c V$   $\tau$  である,

(3)  $A$  が  $\neg A_0$   $\tau$ ,  $B \leq_c A_0$   $\tau$  である,

(4)  $A$  が  $(A_0 \wedge A_1)$   $\tau$ ,  $B \leq_c A_0$  又は  $B \leq_c A_1$   $\tau$  である,

(5)  $A$  が  $\forall x^t A_0(x^t)$   $\tau$ ,  $B \leq_c A_0(a^t)$  なる  $A$  に含まれる  $a^t$

が存在する,

(6)  $A$  が  $\lambda y_1^{t_1} \dots y_n^{t_n} A_0(y_1^{t_1}, \dots, y_n^{t_n})$  で,  $B \leq_c A_0(b_1^{t_1}, \dots, b_n^{t_n})$

なる  $A$  に含まれない互に異なる  $b_1^{t_1}, \dots, b_n^{t_n}$  が存在する, 又は

(7)  $A$  が  $\forall \varphi^r A_0(\varphi^r)$  で  $B \leq_c A_0(\alpha^r)$  なる  $A$  に含まれない  $\alpha^r$  が

存在する,

ということである.

$g$ -subformula は上の  $\leq_c$  を  $\leq_g$  にあてかえ, (7) を次のものにかえて定義せよ.

(7')  $A$  が  $\bigwedge (A_0, A_1, \dots)$  で, ある  $n$  に対し  $B \leq_g A_n$ .

2.10. 定義. STCI の subsystem  $STCI^{\alpha, \beta}$ .

$0 < \alpha, \beta \leq \omega_1$  なる ordinal number  $\alpha, \beta$  に対し,  $c-m$ ,  $g-m$  を夫々  $\alpha, \beta$  より小さい variety のみに限った STCI の subsystem を  $STCI^{\alpha, \beta}$  とする.

2.11. 定理.  $0 < \alpha, \beta \leq \omega_1$  ならば,  $STCI^{\omega \times \alpha, \omega \times \beta}$  で cut-elimination theorem が成り立つ.

§ 3.  $STCI^{\alpha, \beta}$  上の number theory  $NSTCI^{\alpha, \beta}$

3.1. 定義.  $NSTCI^{\alpha, \beta}$ .

(1)  $\alpha > 1$  のとき,  $STCI^{\alpha, \beta}$  に公理として  $\overline{\mathbb{N}}$  を加えたもの

のが  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  である, 但し,  $\overline{\mathbb{N}}$  は次の三つの公理である

:  $N_1: \forall x_0 \neg x_0' = 0,$

$N_2: \forall x_0 \forall x_1 (x_0' = x_1' \vdash x_0 = x_1),$

$N_3: \forall x_0^{(0)} (0 \in x_0^{(0)} \wedge \forall x_1^{(0)} (x_1^{(0)} \in x_0^{(0)} \vdash x_1^{(0)} \in x_0^{(0)})) \vdash \forall x_0^{(0)} x_0^{(0)} \in x_0^{(0)}$ ,  
 但し,  $a^0 = b^0$  は  $\forall x^{(0)} (a^0 \in x^{(0)} \vdash b^0 \in x^{(0)})$  の略であり,  
 $A \vdash B$  は  $\neg(A \wedge \neg B)$  の略である.

(2)  $\alpha = 1$  のとき,  $STCI^{\alpha, \beta}$  に公理として  $\Gamma_N$  を加え, 更に  $\omega$ -rule を加えたものが  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  である.

注意.  $\alpha > 1$  のとき,  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  で  $\omega$ -rule が導かれる. 即ち,  $\forall x^{(0)} (\wedge (0 \in x^{(0)}, 1 \in x^{(0)}, 2 \in x^{(0)}, \dots)) \vdash \forall x^{(0)} x^{(0)} \in x^{(0)}$  が  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  で証明可能である, 但し,  $1, 2, \dots$  は  $0', 0'', \dots$  を示す.

$\Gamma$  を formal expression のある集合とする. このとき,  $\Gamma$  の全ての元の GN の集合を  $N \sqsubseteq \Gamma$  で表わすことにする.  $X^{\alpha, \beta}$  を  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  の全ての証明可能な formula の集合とすると,  $N \sqsubseteq X^{\alpha, \beta}$  は  $\Pi_1$ -set であり,  $A_\omega \subset X^{\alpha, \beta}$  である, 但し,  $A_\omega$  は  $[G/M/R]$  の才 2 階述語論理の上の number theory の全ての証明可能な formula の集合である. 従って  $\Pi_1$ -set は  $X^{\alpha, \beta}$  で representable であるから, 次の定理を得る.

3.2. 定理.  $P_n(a^0)$  を “ $a^0$  は  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  で証明可能である” ということを表わす formula とすると,  $n \in N \sqsubseteq X^{\alpha, \beta}$  ならば,  $P_n(n)$  は  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  で証明可能である.

3.3. 定理.  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  が無矛盾ならば,  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  の無矛盾性は  $NSTCI^{\alpha, \beta}$  では証明出来ない.

## §4. NSTCI $^{\alpha, \beta}$ の hierarchy

### 4.1. NSTCI $^{\alpha, \beta}$ の subsystem NSTCI $^{\alpha, \beta}_{\#}$ .

NSTCI $^{\alpha, \beta}_{\#}$  は NSTCI $^{\alpha, \beta}$  を次の様にして制限して得られる体系である。

(1) type は 0, (0), ((0)), ... のみに制限する。

( ( ) が  $n$  個 0 についた type を  $\bar{n}$  で表わす。 )

(2) type 列は  $\tau_0$  のみ、但し、 $\tau_0(i) = \lceil \bar{i} \rceil$ 。

4.2. 定理. NSTCI $^{\alpha, \beta}$  と NSTCI $^{\alpha, \beta}_{\#}$  は同等である。

4.3. 定理.  $0 < \beta < \alpha \leq \omega_1$  のとき、NSTCI $^{\alpha, 1}$  は本質的に NSTCI $^{\beta, 1}$  より強い体系である。

証明. NSTCI $^{\beta, 1}_{\#}$  の truth definition を NSTCI $^{\alpha, 1}$  の中で行なう。

まず、次の様な gfs を考える。以下に現われる論理記号

$\exists, \exists!, \forall, \vdash, \dashv$  は  $\vee, \wedge, \neg$  を用いて通常の様子に組

合わせて得られたものの省略記号である。

$$\left\{ \begin{array}{l} a^0 \doteq b^0 \equiv a^0 = b^0 . \\ a^0 \doteq b^{\overline{m+1}} \equiv \forall x^0 (x^0 < a^0 \vdash \exists y^{\overline{n}} (x^0 \doteq y^{\overline{n}} \wedge y^{\overline{n}} \in b^{\overline{m+1}})) \\ \quad \wedge \forall y^{\overline{n}} (y^{\overline{n}} \in b^{\overline{m+1}} \vdash \exists x^0 (y^{\overline{n}} \doteq x^0 \wedge x^0 < a^0)) . \\ a^{\overline{m+1}} \doteq b^0 \equiv b^0 \doteq a^{\overline{m+1}} . \\ a^{\overline{m+1}} \doteq b^{\overline{n+1}} \equiv \forall x^{\overline{m}} (x^{\overline{m}} \in a^{\overline{m+1}} \vdash \exists y^{\overline{n}} (x^{\overline{m}} \doteq y^{\overline{n}} \wedge y^{\overline{n}} \in b^{\overline{n+1}})) \\ \quad \wedge \forall y^{\overline{n}} (y^{\overline{n}} \in b^{\overline{n+1}} \vdash \exists x^{\overline{m}} (y^{\overline{n}} \doteq x^{\overline{m}} \wedge x^{\overline{m}} \in a^{\overline{m+1}})) . \end{array} \right.$$



$$\begin{cases} a^\circ \in b^\circ \equiv a^\circ < b^\circ. \\ a^{\bar{n}} \in b^{\bar{n}} \equiv \exists x^{\bar{n}} (a^{\bar{n}} \doteq x^{\bar{n}} \wedge x^{\bar{n}} \in b^{\bar{n}}). \end{cases}$$

$V(x^\circ, y^\circ) \equiv$  "  $x^\circ$  is type  $y^\circ$  of variable  $\tau$  is  $\exists$ ."

$$F_m(x^\circ, y^{\bar{n}}) \equiv \begin{cases} x^\circ = 0 \vdash \exists y_1^\circ (y_1^\circ \doteq y^{\bar{n}}). \\ x^\circ = a^{\circ'} \vdash \forall y_1^{\bar{n}} (y_1^{\bar{n}} \in y^{\bar{n}} \vdash F_m(a^{\circ'}, y_1^{\bar{n}})). \end{cases}$$

$$A_m(a^{(\bar{n}^\circ)}) \equiv \forall x^\circ \forall y^\circ (V(x^\circ, y^\circ) \vdash \exists! y_1^{\bar{n}} (y_1^{\bar{n}} x^\circ \in a^{(\bar{n}^\circ)} \wedge F_m(y^\circ, y_1^{\bar{n}}))).$$

$$E_{m,n}(f^{(\bar{n}^\circ)}, g^{(\bar{n}^\circ)}, x^\circ) \equiv \forall y^\circ \forall z^\circ (V(y^\circ, z^\circ) \wedge \tau y^\circ = x^\circ \vdash \\ \exists y_1^{\bar{n}} \exists z_1^{\bar{n}} (y_1^{\bar{n}} y^\circ \in f^{(\bar{n}^\circ)} \wedge z_1^{\bar{n}} y^\circ \in g^{(\bar{n}^\circ)} \wedge y_1^{\bar{n}} \doteq z_1^{\bar{n}})) \\ \wedge A_m(f^{(\bar{n}^\circ)}) \wedge A_m(g^{(\bar{n}^\circ)})).$$

$Form(x^\circ, y^\circ, z^\circ) \equiv$  "  $x^\circ$  is  $c$ -m or constructive ordinal  $y^\circ$  is  $\tau$   $q$ -m or constructive ordinal  $z^\circ$  is  $\tau$  formula."

$$SF_c(w^\circ, x^\circ, y^\circ, z^\circ) \equiv Form(w^\circ, y^\circ, z^\circ) \wedge "x^\circ \text{ is } w^\circ \text{ of } c\text{-subformula}."$$

$$SF_q(w^\circ, x^\circ, y^\circ, z^\circ) \equiv Form(w^\circ, y^\circ, z^\circ) \wedge "x^\circ \text{ is } w^\circ \text{ of } q\text{-subformula}."$$

$$B_{m,n}(i^\circ, f^{(\bar{n}^\circ)}, u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ)})} \equiv$$

$$\{i^\circ = \bar{0}^\tau \vdash i^\circ \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))}\}$$

$$\wedge \{i^\circ = \bar{a}^\tau \vdash \forall x^{\bar{n}} (i^\circ x^{\bar{n}} \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))} \vdash x^{\bar{n}} \bar{a}^\tau \in f^{(\bar{n}^\circ)})\}$$

$$\wedge \{i^\circ = \bar{\tau}^\tau \vdash \forall x^\circ (i^\circ x^\circ \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))} \vdash \exists y^\circ (\bar{\tau}^\tau y^\circ \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))} \wedge x^\circ = y^\circ))\}$$

$$\wedge \{i^\circ = \bar{v} \in \bar{v}^\tau \vdash (i^\circ \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))} \vdash \exists x^{\bar{n}} \exists y^{\bar{n}} (\bar{v}^\tau x^{\bar{n}} \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))} \wedge \bar{v}^\tau y^{\bar{n}} \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))} \wedge x^{\bar{n}} \doteq y^{\bar{n}}))\}$$

$$\wedge \{i^\circ = \bar{A}^\tau \vdash (i^\circ \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))} \vdash \bar{A}^\tau \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))})\}$$

$$\wedge \{i^\circ = \bar{(A \wedge B)}^\tau \vdash (i^\circ \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))} \vdash \bar{A}^\tau \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))} \wedge \bar{B}^\tau \text{ of } f^{(\bar{n}^\circ)} \in u^{(0\bar{n}(\bar{n}^\circ))})\}$$

$$\wedge \{ i^\circ = \ulcorner \forall x^k \sigma(x^k) \urcorner \wedge k \leq n \vdash (i^\circ \text{ of } f^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} \vdash \forall g^{(k^\circ)} (E_{m,n}(f^{(k^\circ)}, g^{(k^\circ)}, a^{\bar{k}}) \vdash \ulcorner \sigma(a^{\bar{k}}) \urcorner \circ g^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})}))) \}$$

$$\wedge \{ i^\circ = \ulcorner \forall x^k \sigma(x^k) \urcorner \wedge k > n \vdash \forall j^\circ \forall h^{(k^\circ)} \forall x^{\bar{n}} \neg j^\circ x^{\bar{n}} h^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} \}$$

$$\wedge \{ i^\circ = \ulcorner \lambda x^k \sigma(x^k) \urcorner \wedge k \leq n \vdash \forall x^{\bar{n}} (i^\circ x^{\bar{n}} f^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} \vdash \forall z^{\bar{n}} (z^{\bar{n}} \in x^{\bar{n}} \vdash \exists g^{(k^\circ)} (E_{m,n}(f^{(k^\circ)}, g^{(k^\circ)}, a^{\bar{k}}) \wedge z^{\bar{n}} \ulcorner a^{\bar{k}} \urcorner \in g^{(k^\circ)} \wedge \ulcorner \sigma(a^{\bar{k}}) \urcorner \circ g^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})}))) \}) \}$$

$$\wedge \{ i^\circ = \ulcorner \lambda x^k \sigma(x^k) \urcorner \wedge k > n \vdash \forall j^\circ \forall x^{\bar{n}} \forall h^{(k^\circ)} \neg j^\circ x^{\bar{n}} h^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} \}$$

$$S_{m,n}^1(h^\circ, u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})}) \equiv \forall i^\circ \forall x^\circ \forall f^{(k^\circ)} (Form(i^\circ, 2, 2) \wedge i^\circ x^\circ f^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} \vdash x^\circ = 0 \vee x^\circ = 1) \wedge \forall i^\circ \forall f^{(k^\circ)} (SF_C(h^\circ, i^\circ, 2, 2) \wedge A_n(f^{(k^\circ)}) \vdash B_{m,n}(i^\circ, f^{(k^\circ)}, u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})}).$$

$$Sat_m^k(h^\circ, f^{(k^\circ)}) \equiv V(\exists u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} (S_{0,n}^k(h^\circ, u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})}) \wedge h^\circ \text{ of } f^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})}), \dots) \wedge A_m(f^{(k^\circ)}),$$

$$\exists u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} (S_{m,n}^k(h^\circ, u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})}) \wedge h^\circ \text{ of } f^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})}, \dots) \wedge A_m(f^{(k^\circ)}),$$

但し、 $k = 1$  又は  $k = 2^k$ .

$$Sat_m^{3^k} (h^\circ, f^{(k^\circ)}) \equiv V(Sat_m^{[k^k(0)]} (h^\circ, f^{(k^\circ)}), Sat_m^{[k^k(1)]} (h^\circ, f^{(k^\circ)}), \dots)$$

$$S_{m,n}^{2^k} (h^\circ, u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})}) \equiv \forall i^\circ \forall x^\circ \forall f^{(k^\circ)} (Form(i^\circ, 2^{2^k}, 2) \wedge i^\circ x^\circ f^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} \vdash x^\circ = 0 \vee x^\circ = 1) \wedge \forall i^\circ \forall f^{(k^\circ)} (SF_C(h^\circ, i^\circ, 2^{2^k}, 2) \wedge A_n(f^{(k^\circ)}) \vdash B_{m,n}(i^\circ, f^{(k^\circ)}, u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} \wedge \{ i^\circ = \ulcorner \wedge (A_0, A_1, \dots) \urcorner \vdash (i^\circ \text{ of } f^{(k^\circ)} \in u^{(0, \bar{n}^{(k^\circ)})} \vdash \forall j Sat_m^k(A_j, f^{(k^\circ)}) \})).$$

$$St_m^k(i^\circ, f^{(k^\circ)}) \equiv i^\circ = \ulcorner A_1, \dots, A_r \rightarrow B_1, \dots, B_s \urcorner \vdash \exists l \rightarrow Sat_m^k(\ulcorner A_l \urcorner, f^{(k^\circ)}) \vee \exists l Sat_m^k(\ulcorner B_l \urcorner, f^{(k^\circ)})$$

Prov( $i^\circ, j^\circ, k^\circ$ )  $\equiv$  “ $j^\circ, k^\circ$  がお互に order type  $\alpha, \beta$  の constructive ordinal ならば、 $i^\circ$  は NSTCI $_{\#}^{\alpha, \beta}$  で証明可能な formula である。”

すると、次の事が成り立つ。

$$A_n(f^{(k^\circ)}), Prov(i^\circ, n, 2) \rightarrow St_m^n(i^\circ, f^{(k^\circ)})$$

は,  $\text{NSTCI}^{\omega,1}$  で証明可能である。但し,  $n \in \mathbb{O}$  で  $|n| < \omega$ 。  
従って,  $\beta < \omega$  に対し,  $\text{NSTCI}_{\#}^{\beta,1}$  の無矛盾性が  $\text{NSTCI}^{\omega,1}$  でいえた。

同様に, 次の定理が成り立つ。

4.4. 定理.  $0 < \beta < \omega \leq \omega$  のとき  $\text{NSTCI}^{\omega, \beta}$  は本質的に  $\text{NSTCI}^{\omega, \beta}$  より強い体系である。

#### 参考文献

- [G/M/R] A. Grzegorzczk, A. Mostowski and C. Ryll-Nardzewski, The classical and the  $\omega$ -complete arithmetic, J. S. L., 23 (1958), 188-206.
- [K/T] A. Kino and G. Takeuti, On predicates with constructive infinitely long expressions, J. Math. Soc. Japan, 15 (1963), 176-190.