

Montague の Hierarchy と順序数上の Recursive Function について

東教大 理 福山 克

§1. 序

最近の recursion theory では recursiveness やそれに
関連した諸概念を自然数上の関数以外の対象(例えば自然数
上の finite type の functional とか順序数上の関数)につい
て定義し研究することが盛んである。そのような拡張の際
recursiveness と computability の面から捉える流れと both
quantifier-forms による definability の面から捉える流れと
が認められる。Kleene の finite type の functional の理論や
Kripke による α -recursiveness の概念は前者の例である。
後者の例としては Montague [1] が挙げられる。これはある
種の higher-order structure に於ける definability を用
い任意の集合上に recursiveness, recursive enumerability,
hierarchy などの概念を導入する構想であり、特に自然数上
でのこの recursiveness は普通の recursiveness と一致する

ことが示された。本稿では(1)の理論の一部を紹介し彼の *recursiveness* を順序数上で考えたときそれが Takeuti-Tugue による *recursiveness* と $\mathcal{V}=\mathcal{L}$ の下で一致することを示す。

Montague の hierarchy は, higher-order language におけるものであるが, binary predicate \in を持つ first-order language におけるいわゆる Lévy の hierarchy と類似する。Lévy の hierarchy と自然数上或いは順序数上の recursion theory との関連は既に Takahashi [2], [3] により研究されており, 本稿への直接の stimulation となった。

§2. Montague の higher-order language と formula の分類

1. 諸記号 1.1) 各自然数 n について type n の individual variable を以下のように記す: $v_{0,n}, v_{1,n}, v_{2,n}, \dots$

(二重添字の前の v をその variable の index という。1.2), 1.3) でも同様。)

1.2), 1.3) 自然数の空でない有限列 s について,

type s の predicate variable を以下のように記す: $Q_{0,s}, Q_{1,s}, \dots$

type s の predicate constant を以下のように記す: $P_{0,s}, P_{1,s}, \dots$

1.4) Epsilon predicate: \in

1.5) 論理記号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

2. Formula 2.1) u, v が individual variable, $\text{type}(u)+1 = \text{type}(v) \Rightarrow u \in v$ は formula.

2.2) P は predicate variable または predicate constant
 $\text{type}(P) = \langle k_0, \dots, k_{n-1} \rangle$; u_0, \dots, u_{n-1} は individual variable
 $\text{type}(u_i) = k_i, 0 \leq i \leq n-1 \Rightarrow P u_0 \dots u_{n-1}$ は (atomic) formula.

2.3) ~ 2.8) $\neg \phi, \phi_1 \wedge \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2, \phi_1 \rightarrow \phi_2, \wedge u \phi, \forall u \phi$ については
 普通の通り。Predicate variable は quantify $\pm u \pm \alpha u$ 。

3 Elementary formula 3.1) Atomic formula は
 elementary formula。

3.2) ϕ_1, ϕ_2 が elementary formula $\Rightarrow \phi_1 \wedge \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2$ は elemen-
 tary formula。

3.3) ϕ は elementary formula; u, v は individual variable,
 $\text{type}(u)+1 = \text{type}(v) \Rightarrow \wedge u [u \in v \rightarrow \phi], \forall u [u \in v \wedge \phi]$ は elemen-
 tary formula。

4 Σ_n -formula $\Sigma_1 = \{ \forall v \phi \mid \phi \text{ は elementary formula} \}$
 $\Sigma_{n+1} = \{ \forall v \neg \phi \mid \phi \in \Sigma_n \} \quad (n \geq 1)$

5. Σ -formula 5.1) Atomic formula は Σ -formula。

5.2) ϕ_1, ϕ_2 が Σ -formula $\Rightarrow \phi_1 \wedge \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2$ は Σ -formula。

5.3) ϕ は Σ -formula, u, v は individual variable, $\text{type}(u)+1$
 $= \text{type}(v) \Rightarrow \wedge u [u \in v \rightarrow \phi], \forall u [u \in v \wedge \phi]$ は Σ -formula。

5.4) ϕ は Σ -formula, u は individual variable $\Rightarrow \forall u \phi$ は
 Σ -formula。

§3 Montague の higher-order structure と relation の分類

6. 集合 A , 濃度 ω と与える。 $P_\omega A = \{x \mid x \in A \wedge \bar{x} < \omega\}$ 。

$\mathcal{U}^{0,\omega} A = A$, $\mathcal{U}^{n+1,\omega} A = P_\omega(\mathcal{U}^{n,\omega} A)$ 。

自然数の有限列 $\lambda = \langle k_0, \dots, k_{n-1} \rangle$ に対して,

$\mathcal{U}^\lambda A = P(\mathcal{U}^{k_0,\omega} A \times \dots \times \mathcal{U}^{k_{n-1},\omega} A)$ 。

7. structure $\langle A, F, \omega \rangle$ が structure \Leftrightarrow

7.1) A は空でない集合。

7.2) F は function。 DF は predicate constant $\forall \langle \tau \rangle$ かより成る。各 $P \in DF$ について, $F(P) \in \mathcal{U}^{\text{type}(P),\omega} A$ 。

7.3) ω は $\omega \geq 3$ なる濃度。

8. Assignment σ が assignment connected with $\langle A, F, \omega \rangle$

$\Leftrightarrow \sigma$ は function。 $DO = (\text{individual variable の全体}) \cup (\text{predicate variable の全体})$ 。各 $t \in DO$ について, $\sigma(t) \in \mathcal{U}^{\text{type}(t),\omega} A$ 。

9. ϕ が interpretable in $\langle A, F, \omega \rangle \Leftrightarrow \phi$ 中の predicate constant は全て DF に属する。

10. Valuation $\mathcal{U} = \langle A, F, \omega \rangle$ に対して, \mathcal{U} に於ける valuation

\mathcal{V} を定義する。 \mathcal{V} は assignment σ connected with \mathcal{U} , ϕ interpretable in \mathcal{U} に対して, $\mathcal{V}(\sigma, \phi) \in \{0, 1\}$ なる値と与える。

10.1) $\phi = u \in \mathcal{V}$ のとき, $\mathcal{V}(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow \sigma(u) \in \sigma(\mathcal{V})$

10.2) $\phi = P u_0 \dots u_{n-1}$ のとき, $\mathcal{V}(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow \langle \sigma(u_0), \dots, \sigma(u_{n-1}) \rangle \in F(P)$

10.3) $\phi = Q u_0 \dots u_{n-1}$ のとき, $\mathcal{V}(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow \langle \sigma(u_0), \dots, \sigma(u_{n-1}) \rangle \in \sigma(Q)$

10.4) ~ 10.7) $\neg \phi$, $\phi_1 \wedge \phi_2$, $\phi_1 \vee \phi_2$, $\phi_1 \rightarrow \phi_2$, については普通の通り。

10.8) $\phi = \bigwedge u \phi_i$ のとき, $\forall(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow t \neq u$ のとき $\sigma_i(t) = \sigma_i(t)$

となる任意の σ_i について $\forall(\sigma_i, \phi_i) = 1$

10.9) $\phi = \bigvee u \phi_i$ のとき, $\forall(\sigma, \phi) = 1 \Leftrightarrow t \neq u$ のとき $\sigma_i(t) = \sigma_i(t)$

となるある σ_i について $\forall(\sigma_i, \phi_i) = 1$

11. Relational type, typed relation, etc.

11.1) 自然数または自然数の空でない有限列より成る, 空でない有限列を relational type と言う。

11.2) $\mathcal{O} = \langle A, F, \sigma \rangle$ を与える。 $\langle \langle s_0, \dots, s_{n+1} \rangle, X \rangle$ が (typed) relation connected with $\mathcal{O} \Leftrightarrow \langle s_0, \dots, s_{n+1} \rangle$ は relational type.

$$X \subseteq \bigcup^{s_0, \sigma} A \times \dots \times \bigcup^{s_{n+1}, \sigma} A.$$

Typed relation $R = \langle \langle s_0, \dots, s_{n+1} \rangle, X \rangle$ に対して, $\langle s_0, \dots, s_{n+1} \rangle$ (= type(R)) を R の type と言ひ, $X (= R^*)$ を R の extension と言ひ。

$R^{\mathcal{O}} =$ (typed relation connected with \mathcal{O} の全体.)

11.3) $R = \langle \langle s_0, \dots, s_{n+1} \rangle, X \rangle \in R^{\mathcal{O}}$ に対して, $\bar{R} = \langle \langle s_0, \dots, s_{n+1} \rangle, \bigcup^{s_0, \sigma} A \times \dots \times \bigcup^{s_{n+1}, \sigma} A - X \rangle$ 。

12. Definability $\mathcal{O} = \langle A, F, \sigma \rangle$, $R \in R^{\mathcal{O}}$, ϕ を与える。

type(R) = $\langle s_0, \dots, s_{n+1} \rangle$ とする。 ϕ defines R in $\mathcal{O} \Leftrightarrow$

12.1) variable の列 t_0, \dots, t_{n+1} があり, type(t_i) = s_i , $0 \leq i \leq n+1$;

各 t_i の index を l_i とするとき $l_0 < l_1 < \dots < l_{n+1}$ 。 ϕ は t_0, \dots, t_{n+1} 以外の free variable を含まない。

12.2) ϕ は interpretable in \mathcal{O} 。

12.3) ν を Ω に於ける valuation とするとき, 任意の $\langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle \in \bigcup_{i=0, \dots, n-1} \Omega^i \times \dots \times \bigcup_{i=0, \dots, n-1} \Omega^i$ について,
 $\langle f_0, \dots, f_{n-1} \rangle \in R^* \Leftrightarrow \sigma$ が "assignment connected with Ω である",
 $\sigma(t_i) = f_i, 0 \leq i \leq n-1$ であるとき, $\nu(\sigma, \phi) = 1$.

13 Relative definability $\Omega = \langle A, F, \Omega \rangle, R \in R^\Omega, \phi, K \in R^\Omega$
 を与える。 ϕ defines R in Ω in terms of members of $K \Leftrightarrow$

13.1) Function G があり, DG は predicate constant $\wedge K$ からより成り, $DG \wedge DF = \Lambda$ 。さらに各 $P \in DG$ について, $\langle \text{type}(P), G(P) \rangle \in K$ 。

13.2) ϕ defines R in $\langle A, F \cup G, \Omega \rangle$ 。

14. Ω , formula より成る集合 $\Gamma, K \in R^\Omega$ に対して,

$\Gamma^\Omega(K) = \{ R \mid R \in R^\Omega, \exists \phi (\phi \in \Gamma \wedge \phi \text{ defines } R \text{ in } \Omega \text{ in terms of members of } K) \}$ 。

以下で特に $\Sigma_n^\Omega(K)$ (4.21)

$\Pi_n^\Omega(K) = \{ R \mid \bar{R} \in \Sigma_n^\Omega(K) \}$ (4.21)

$\Delta_n^\Omega(K) = \Sigma_n^\Omega(K) \cap \Pi_n^\Omega(K)$ (4.21) を扱う。

15 任意の Ω について, 次の補助的諸概念を導入する。

$\Omega = \langle A, F, \Omega \rangle$; $\mathcal{U}_n = \bigcup_{i=0, \dots, n-1} \Omega^i A, n=0, 1, 2, \dots$; $a, b, \dots \in \bigcup \{ \mathcal{U}_n \mid n < \omega \}$

とする。23 に於いても同様。

15.1) $\{a\}_0 = a, \{a\}_{n+1} = \{ \{a\}_n \}$ 。

15.2) $\langle a, b \rangle_{n, k} = \{ \{a\}_{k+1}, \{a\}_k, \{b\}_n \}$ 。

$$15.3) \langle\langle a_0 \rangle\rangle = a_0, \langle\langle a_0, \dots, a_n \rangle\rangle = \langle\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle, a_n \rangle_{2^{(n+1)}, 0}$$

$$15.4) A \subseteq \mathcal{O}^n \text{ には } \exists \text{ し, } \underline{A} = \{ \langle\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle \mid \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in A \}$$

$$15.5) PF_n = \{ f \mid f \in P\mathcal{O}_0^{n+1} \wedge f \text{ は } \mathcal{O}_0^n \rightarrow \mathcal{O}_0 \text{ 上の } \exists \text{ partial function} \}$$

$$PF_n^* = \{ f \mid f \in PF_n \wedge \bar{f} \subseteq \mathcal{O}_2 \}$$

$$TF_n = \{ f \mid f \in PF_n \wedge f \text{ は total (i.e. } Df = \mathcal{O}_0^n \text{)} \}$$

$$15.6) f: TF_0 \times \dots \times TF_{m-1} \times \mathcal{O}_0^n \rightarrow \mathcal{O}_0 \text{ 上の function } f \text{ について}$$

$$f^0 = \{ \langle \underline{h}_0, \dots, \underline{h}_{m-1}, a_0, \dots, a_{n-1}, b \rangle \mid \underline{h}_i \in PF_{i,0}^*, 0 \leq i \leq m-1, \}$$

$$\langle \underline{h}_0^c, \dots, \underline{h}_{m-1}^c, a_0, \dots, a_{n-1}, b \rangle \in f \}$$

ここで \underline{h}^c は \underline{h} の completion i.e. $\underline{h} \in PF_{i,0}^*$ のとき, $\underline{h}^c =$

$$\underline{h} \cup \{ \langle c_0, \dots, c_{i-1}, 0 \rangle \mid \langle c_0, \dots, c_{i-1} \rangle \notin \mathcal{O}_0^i - D\underline{h} \} \text{ (e } TF_i \text{)}.$$

$$f^0 = \{ \langle \underline{h}_0, \dots, \underline{h}_{m-1}, a_0, \dots, a_{n-1}, b \rangle \mid \langle \underline{h}_0, \dots, \underline{h}_{m-1}, a_0, \dots, a_{n-1}, b \rangle \in f^0 \}$$

§4 Peano structure と自然数上の recursiveness

16 Peano structure \mathcal{P} を次の様に定める。

$$\mathcal{P} = \langle N, F_1, x_0 \rangle. \text{ ここで, } N = \text{自然数全体の集合.}$$

$$DF_1 = \{ P_0, \langle 0 \rangle, P_0, \langle 0, 0 \rangle \}. \text{ (} P_0, \langle 0 \rangle = 0, P_0, \langle 0, 0 \rangle = S \text{ と略す.)}$$

$$F_1(\mathcal{Z}) = \{ 0 \}, F_1(S) = \{ \langle a, a+1 \rangle \mid a \in N \}.$$

17 THEOREM ($\mathcal{O}_0^n, *N = \mathcal{O}_n$ と略す.)

$$17.1) f: \overbrace{TF_1 \times \dots \times TF_1}^m \times \mathcal{O}_0^n \rightarrow \mathcal{O}_0 \text{ 上の partial function } f \text{ について}$$

ついで, f が partial recursive \Leftrightarrow

$$\text{type}(R) = \langle \langle 0, 0 \rangle, \dots, \langle 0, 0 \rangle, \overbrace{0, \dots, 0}^n, 0, 0 \rangle, R \in \Sigma^P W \text{ 上の } R \text{ が存在し,}$$

$$f = \overbrace{(TF_1 \times \dots \times TF_1 \times \mathcal{O}_0^{n+1})}^m \cdot R^*.$$

17.2) $f: 0_0^n \rightarrow 0_0$ なる function f について,
 f が partial recursive $\Leftrightarrow \langle \langle 0, \dots, 0 \rangle, f \rangle \in \Sigma_1^1(\mathbb{N})$.

17.3) $X \subseteq 0_0^n$ であるとき,
 X が recursive $\Leftrightarrow \langle \langle 0, \dots, 0 \rangle, X \rangle \in \Delta_1^1(\mathbb{N})$.

17.4) $X \subseteq 0_0^n$, $k \geq 1$ であるとき,
 X が Σ_k^0 $\Leftrightarrow \langle \langle 0, \dots, 0 \rangle, X \rangle \in \Sigma_k^1(\mathbb{N})$.

Π, Δ についても同様。

17 は [17] の結果である。本稿の以下の部分で、 $\mathcal{F} = \mathcal{L}$ を仮定すればこれらがそっくり、順序数上の Tarski-Tyngé の recursive-ness によって成立することと示す。

35. Structure \mathcal{F} と順序数上の recursive-ness

18 順序数上で \mathcal{F} に相当するものとして structure \mathcal{F} を考える。Regular initial ordinal ω_r に対応する \mathcal{F} は次の様に定義される。 $\mathcal{F} = \langle W(\omega_r), \bar{\pi}_2, \bar{\alpha}_r \rangle$ 。ここで、

$W(\omega_r) = \omega_r$ より小さい順序数の全体。

$DF_2 = \{ P_1, \langle 0, 0 \rangle, P_0, \langle 1, 0 \rangle \}$ 。 ($P_1, \langle 0, 0 \rangle = I$, $P_0, \langle 1, 0 \rangle = \emptyset$ と略す。)

$F_2(I) = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in W(\omega_r) \}$ 。

$F_2(\emptyset) = \{ \langle X, a \rangle \mid X \subseteq W(\omega_r), \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_r, a = \sup X \}$ 。 ($\sup X = X$ 中の順序数のうちよりも真に大きい最小の順序数。)

19 $r=0$ のときの \mathcal{F} と、 \mathcal{F} とは次の意味で同等である。

THEOREM

$\gamma=0$ のとき, 任意の $K \subseteq R^? (=R^?)$ について,

$$\Sigma_R^?(K) = \Sigma_R^?(K) \quad n \geq 1 \quad \Pi, \Delta \text{ についても同様。}$$

従って, [1] Theorem 10 により, \mathcal{P}, \mathcal{F} で definable な relation 全体も一致する。

20. THEOREM (\mathcal{O}^{n+1} の $\mathcal{W}(\mathcal{W}) = \mathcal{O}_n$ と略す。)

20.1) $f: TF_0 \times \dots \times TF_{m-1} \times \mathcal{O}^? \rightarrow \mathcal{O}_0$ なる partial function f について,

f が partial recursive \Leftrightarrow

$$\text{type}(R) = \langle \langle \underbrace{0, \dots, 0}_{l_0+1} \rangle, \dots, \langle \underbrace{0, \dots, 0}_{l_{m-1}+1} \rangle, \underbrace{0, \dots, 0}_n \rangle, R \in \Sigma_1^{\mathcal{F}}(\mathcal{W}) \text{ なる}$$

K が存在し, $f = (TF_0 \times \dots \times TF_{m-1} \times \mathcal{O}_0^{n+1}) \cap R^*$ 。

20.2) $f: \mathcal{O}_0^n \rightarrow \mathcal{O}_0$ なる function f について,

f が partial recursive $\Leftrightarrow \langle \langle \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1} \rangle, f \rangle \in \Sigma_1^{\mathcal{F}}(\mathcal{W})$ 。

20.3) $X \subseteq \mathcal{O}_0^n$ であるとき,

X が recursive $\Leftrightarrow \langle \langle \underbrace{0, \dots, 0}_1 \rangle, X \rangle \in \Delta_1^{\mathcal{F}}(\mathcal{W})$

20.4) $X \subseteq \mathcal{O}_0^n, k \geq 1$ であるとき,

X が Σ_R^{ord} ($\Sigma_R^?$; $\gamma=0$ のとき) $\Leftrightarrow \langle \langle \underbrace{0, \dots, 0}_n \rangle, X \rangle \in \Sigma_R^{\mathcal{F}}(\mathcal{W})$ 。

Π, Δ についても同様。

20.1) ~ 20.3) において, 'partial recursive', 'recursive' は

$\gamma=0$ のときは普通の意味, $\gamma>0$ のときは Takeuti-Tugue の意味

とする。但し後者において, function variable は total function の n を指にとるとする。

§ 6 \mathcal{W} についての lemma

次の lemma は §9 - §11 に於ける Σ_1 -definability の証明に用
 りらる。

21 LEMMA ϕ が Σ -formula $\Rightarrow \Sigma_1$ -formula ψ があって,

21.1) ϕ, ψ の predicate constant, free variable は一致する。

21.2) ϕ, ψ が \mathcal{O}_i interpretable のとき, \mathcal{O}_i の valuation
 と \forall とすると, 任意の assignment σ connected with \mathcal{O}_i
 について, $\forall(\sigma, \phi) = \forall(\sigma, \psi)$ 。

22 LEMMA 任意の $K \in R^{\mathcal{O}_i}$ について, $\Sigma_1^{\mathcal{O}_i} \Sigma_1^{\mathcal{O}_i}(K) = \Sigma_1^{\mathcal{O}_i}(K)$ 。

23 LEMMA $I_0, \bar{I}_0 \in \Sigma_1^{\mathcal{O}_i}(N) \Rightarrow$ 以下の relation (extension
 の $\#$ を示す) は Σ_1 -definable ($\in \Sigma_1^{\mathcal{O}_i}(N)$ に属す)。

$I_n: \{ \langle a, a \rangle \mid a \in \mathcal{O}_n \}$; $E_n: \{ \langle a, b \rangle \mid b \in \mathcal{O}_{n+1}, a \in b \}$; \bar{I}_n ; \bar{E}_n ;

$I_{n,k}: \{ \langle a, b \rangle \mid b \in \mathcal{O}_n, a = \langle b, c \rangle_{n,k} \text{ for some } c \in \mathcal{O}_k \}$; $2_{n,k}$

$H_n: \{ a \mid a = \underline{k} \text{ for some } k \in \mathcal{O}_n^+, \bar{k} \in \mathcal{O}_2 \}$

$Fnc_n: \{ a \mid a = \underline{k} \text{ for some } k \in PPF_n^* \}$

24 LEMMA \mathcal{F} に於いて, 以下の relation (extension
 の $\#$ を示す) は Σ_1 -definable。

I_0 ; \bar{I}_0 ; $Sup: \{ \langle a, b \rangle \mid a \subseteq W(\omega r), \bar{a} \in \mathcal{R}_r, b = \sup a \}$

$I_g: \{ \langle a, b \rangle \mid a < b < \omega r \}$; $Seg: \{ \langle a, b \rangle \mid b < \omega r, a = W(b) \}$

$\{ e \}$ for $e < \omega$ 。

§7 Type の reduction

本稿の以下の部分では \mathcal{F} を fix し, $\mathcal{O}_n^* \text{ or } W(\omega r) = \mathcal{O}_n$ と略す。

25 GCH を仮定すれば w_r が regular なるとき,

$\text{Card}(\{X \mid X \subseteq W(w_r), \bar{X} < \aleph_r\}) = \aleph_r$, 即ち, $\bar{U}_1 = \aleph_1$ であるから U_1 から U_0

への injection が存在する。ここではこの injection で '素性
がかなりはつきりしているもの' を具体的に構成する必要がある
るので $V=L$ を仮定する。直接には Tugué [4] による次の事実
と利用する。

u, \dagger, j, S, S^* etc は [4] で定義されたものとする。 $k(a, c)$
 $= u(a \dagger j(0, c, 0))$ とおけば,

$$S^*(a; A, b) \leftrightarrow S(a, b) \wedge (x)_{x < b} (A(x) = k(a, x))$$

$$S(a; A, b) \leftrightarrow S^*(a; A, b) \wedge (x)_{x < a} \rightarrow S^*(x; A, b) \quad \text{である。このとき,}$$

$V=L$ の下で 次のことが成立する。

任意に与えられた $b < w_r$, $h: W(b) \rightarrow W(w_r)$ に対して, $a < w_r$ か
 $\rightarrow S(a; h, b)$ となる a が唯一存在する。

26 26.1) 先ず $F: U_1 \rightarrow U_0$ を次の様に定義する。

$X \in U_1$ とすると, $\bar{X} < w_r$ 。従って, $b (= \bar{X}) < w_r$, $h: W(b) \rightarrow X$ で,

h は bijection, $(b_1)(b_2)(b_1, b_2 < b \wedge b_1 < b_2 \rightarrow h(b_1) < h(b_2))$ となるもの

がそれだけ唯一存在する。さらにこの b, h に対して, $a < w_r$

$S(a; h, b)$ となる a が唯一存在する。そこで $F(X) = j(a, b)$ とする。

次に, $F_n: U_n \rightarrow U_0$, $n=0, 1, 2, \dots$ を

$F_0 = U_0$ 上の identity function

$F_{n+1}(X) = F(\{F_n(a) \mid a \in X\})$ for $X \in U_{n+1}$ と定める。このとき

$$26.2) \quad X \in \mathcal{U}_1 \Rightarrow X = \{k(y_0(F(x), x) \mid x < g_1(F(x)))\}.$$

$$26.3) \quad F_1 = F$$

26.4) F_n は injection.

26.5) $\mathcal{Q}F_n$ は primitive recursive.

(\because $C \in \mathcal{Q}F_n \mapsto$

$$S(g_0(c), g_1(c)) \wedge (b_1)(b_2) (b_1, b_2 < g_1(c) \rightarrow b_1 < b_2 \rightarrow k(g_0(c), b_1) < k(g_0(c), b_2)) \\ \wedge (y)(y < g_0(c) \rightarrow \neg S(y, g_1(c)) \vee \exists x (x < g_1(c) \wedge k(g_0(c), x) \neq k(y, x))).$$

$$C \in \mathcal{Q}F_{n+1} \mapsto (b)(b < g_1(c) \rightarrow k(g_0(c), b) \in \mathcal{Q}F_n) \wedge C \in \mathcal{Q}F_n.$$

27 $R \in R^F$ で $\text{type}(R)$ が 自然数の4より成るとき, rR を次の様に定める。 $\text{type}(R) = \langle k_0, \dots, k_{n+1} \rangle$ とおく。

$$\text{type}(rR) = \langle \overbrace{0, \dots, 0}^n \rangle$$

$$(rR)^* = \{ \langle F_{k_0}(a_0), \dots, F_{k_{n+1}}(a_{n+1}) \rangle \mid \langle a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R^* \}$$

§8 20. の証明の概略

$r=0$ の場合は, 17, 19 より直ちに出る。以下では $r > 0$ とする。
また 20-2) 以下は 20-1) より容易に導かれるので 20-1) の証明に専念する。

28 28.1) $f: TF_0 \times \dots \times TF_{m+1} \times \mathcal{U}_0^n \rightarrow \mathcal{U}_0$ が primitive recursive $\Rightarrow \langle \langle 2l+1, \dots, 2l_{m+1}+1, \overbrace{0, \dots, 0}^n, 0 \rangle, f^0 \rangle \in \Sigma_1(\mathcal{U})$ 。

28.2) $f: \mathcal{U}_0^n \rightarrow \mathcal{U}_0$ が primitive recursive $\Rightarrow \langle \langle \overbrace{0, \dots, 0}^{n+1}, f \rangle \in \Delta_1(\mathcal{U})$ 。

28.3) $X \subseteq \mathcal{U}_0^n$ が primitive recursive $\Rightarrow \langle \langle 0, \dots, 0 \rangle, X \rangle \in \Delta_1(\mathcal{U})$ 。

28.1) は [4] の schema に従い induction で証明する (§9)。

28.2) の $\Sigma(\mathcal{N})$ の方は 28.1) の特別な場合であり, $\Pi(\mathcal{N})$ の方はそれから, f が total であることを用いれば容易に得られる。28.3) は 28.2) より明らか。28.3) と [4] の normal form theorem から 20.1) の ' \Rightarrow ' が出る (§10)。

29. 29.1) $R \in R^{\mathcal{F}}$, $\text{type}(R)$ は自然数のみより成るとき,

$$R \in \Sigma_1(\mathcal{N}) \Rightarrow (R)^* \text{ は } \Sigma_1^{\text{ord}}.$$

29.2) $R \in R^{\mathcal{F}}$, $\text{type}(R) = \langle s_0, \dots, s_{m+1}, k_0, \dots, k_{n+1} \rangle$ 。ここで各 s_i

は自然数の有限列, 各 k_i は自然数とする。このとき $R \in \Sigma_1(\mathcal{N})$

$$\text{ならば } \langle \bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{m+1}, a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R^*$$

$$\Rightarrow \exists p_0 \dots \exists p_{m+1} (p_i \in \bar{y}_i, \bar{p}_i \in \bar{x}_r, 0 \leq i \leq m+1, \langle p_0, \dots, p_{m+1}, a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R^*).$$

29.3) $R \in R^{\mathcal{F}}$, $\text{type}(R) = \langle s_0, \dots, s_{m+1}, k_0, \dots, k_{n+1} \rangle$ 。ここで各 s_i は

x_i の 0 より成る。各 k_i は自然数とする。このとき R^0 と

$$\text{type}(R) = \langle 2t_0-1, \dots, 2t_{m+1}-1, k_0, \dots, k_{n+1} \rangle$$

$$(R^0)^* = \{ \langle \underline{h}_0, \dots, \underline{h}_{m+1}, a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \mid \bar{h}_i \in \bar{x}_r, 0 \leq i \leq m+1,$$

$$\langle h_0, \dots, h_{m+1}, a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R^* \} \quad \text{と定めると}$$

$$R \in \Sigma_1(\mathcal{N}) \Rightarrow R^0 \in \Sigma_1(\mathcal{N}).$$

29.1) ~ 29.3) は R を定義する Σ -formula の構成に関する induction で証明する (§11)。20.1) の ' \Leftarrow ' は 29 を用い §12 で証明する。

§9 28.1) の証明

[4]の schemata のうち (VI) と (XIII) 以外については容易である。

(VI) 即ち $j(a, b)$ についてはこれが $j(a, b) = \sup\{j(c, d) \mid \langle c, d \rangle \prec \langle a, b \rangle\}$

(ここで $\langle c, d \rangle \prec \langle a, b \rangle \Leftrightarrow \max(c, d) < \max(a, b)$

$$\vee (\max(c, d) = \max(a, b) \wedge (d < b \vee (d = b \wedge c < a)))$$

という recursion で定義されることに注意すれば recursion

の schema (XIII) の場合とほぼ同様に証明される。以下で (XIII) の

$l = n = 1$, h が unary の場合の証明を述べる。

$f(h, a, b) = g(\lambda z f^a(h, z, b), h, a, b)$, g については 28.1) を仮定。

$$30. f^a(h, a, b) = g^a(\{\langle c, d \rangle \mid \langle h, c, b, d \rangle \in f^a, c < a\}, h, a, b)$$

$$31. \langle h, b, l \rangle \in A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} h, l \in PF_{1, \lambda}^*(a)(a) (\exists d (\langle a, d \rangle \in l) \wedge a < a \rightarrow \exists d (\langle a, d \rangle \in l))$$

$$\wedge (a)(a) (\langle a, d \rangle \in l \rightarrow \{\langle p, q \rangle \mid \langle p, q \rangle \in l \wedge p < a\}, h, a, b, d) \in g^a)$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle h, b, l \rangle \mid \langle h, b, l \rangle \in A\} \quad \text{とすると,}$$

$$31.1) \langle p, b, q \rangle \in B \Leftrightarrow p, q \in \text{Func}_{1, \lambda}(r) (r \in q \rightarrow (c) (c_1 < 1(r) \rightarrow \exists n, n \in q, 1(n) = c))$$

$$\wedge (r) (r \in q \rightarrow \exists \lambda ((n) (n \in s \rightarrow n \in q \wedge 1(n) < 1(r)) \wedge (n) (n \in q \rightarrow 1(n) \geq 1(r) \vee r \in s))$$

$$\wedge \langle A, p, 1(r), b, 2(r) \rangle \in g^0)$$

ここで, $r = \langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle_{0,0}$ ($a, b \in U_0$) に対して, $1(r) = a$, $2(r) = b$ 。

$$31.2) \langle \langle 3, 0, 3 \rangle, B \rangle \in \Sigma_1(A)。$$

(\because 31.1) の右辺の ' $<$ ' で bound された quantifier (uv の部分)

は (c) ($c \in W(1(r)) \rightarrow \dots$) と書きなおす。仮定より, $\langle \langle 3, 3, 0, 0, 0 \rangle,$

$g^0 \rangle$ を定義する Σ_1 -formula が存在する。これと (22), 23, 24 を

用い, 31.1) の右辺は $\langle \langle 3, 0, 3 \rangle, B \rangle$ を定義する Σ -formula に翻

記される。

$$31.3) \langle h, a, b, d \rangle \in f^A \Leftrightarrow \exists e (\langle a, d \rangle \in e, \langle h, b, e \rangle \in A)$$

(\because 次の順に証明する。

$$31.3.1) \langle h, b, e_1 \rangle, \langle h, b, e_2 \rangle \in A, \langle a, c_1 \rangle \in e_1, \langle a, c_2 \rangle \in e_2 \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$31.3.2) \langle h, b, c \rangle \in PF_1^* \times U^2 \Rightarrow \exists d, \exists e, \langle c, d \rangle \in e, \langle h, b, e \rangle \in A$$

ここで ω_r の regularity が用いられる。

$$31.3.3) f^{AA} \stackrel{df}{=} \{ \langle h, a, b, d \rangle \mid \exists e (\langle a, d \rangle \in e, \langle h, b, e \rangle \in A) \} \quad \text{とすると}$$

f^{AA} は, $f^{AA}: PF_1^* \times U^2 \rightarrow U$ とする function z

$$\langle h, a, b, d \rangle \in f^{AA} \Leftrightarrow \langle \{ \langle c, d \rangle \mid \langle h, c, b, d \rangle \in f^{AA}, c \langle a \}, h, a, b, d \rangle \in f^{AA}$$

$$31.3.4) f^A = f^{AA} \quad)$$

$$31.4) \langle p, a, b, d \rangle \in f^0 \Leftrightarrow \exists q \exists t (t \in q, 1(t) = a, 2(t) = d, \langle p, b, q \rangle \in B)$$

$$32 \quad \langle \langle 3, 0, 0, 0 \rangle, f^0 \rangle \in \Sigma_1(1)$$

§10 20.1) ' \Rightarrow ' の証明

20.1) ' \Rightarrow ' を証明するが簡単の爲 $m = n = k = 1$ とする。

$$33 \quad \sigma_1(h, y) \stackrel{df}{=} \{ u, w \mid S(u, h, y) \} \quad \text{とすると}$$

$$33.1) \langle h, y, z \rangle \in \sigma_1 \Leftrightarrow S(z, y) \wedge (\forall x (x < y \rightarrow \exists w (h(x) = w, k(z, x) = w)))$$

$$\wedge (w (u < z \rightarrow \neg S(u, y) \vee \exists x (x < y \wedge \exists w (h(x) = w, k(u, x) \neq w))) \text{ for } \forall \langle h, y, z \rangle \in TF_1 \times U^2$$

$$33.2) R_1 \in \Sigma_1(1) \text{ があり, } \text{type}(R_1) = \langle \langle 0, 0 \rangle, 0, 0 \rangle$$

$$\sigma_1 = (TF_1 \times U^2) \wedge R_1^*$$

(\because 33.1) の右辺で S, k は primitive recursive ゆえ $S, \neg S$ etc を定義する Σ_1 -formula が存在する。それをを用い 33.1) の右辺を Σ

-formula θ_1 に翻訳する。 $h(x)=w$ の部分は $\text{type}(0,0,0)$ の predicate variable Q を用い Qxw とする。 θ_1 が定義する relation を R_1 とすればよい。)

34 $f: T\mathcal{F}_1 \times \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathcal{U}_0$ が partial recursive とすると $\langle \omega \rangle$ が存在し
 $f(h, x) \approx \bigvee \mu z T_1(\sigma_1(h, z), c, x, z)$ 即ち,

$$\langle h, x, y \rangle \in f \Leftrightarrow \exists z_0, \exists z_1, \exists z_2 (\langle h, z_0, z_1 \rangle \in \sigma_1, z_2 = c, T_1(z_1, z_2, x, z_0), \bigvee z_0 = y)$$

この右辺を θ_1 および σ_1, T_1, \bigvee を定義する Σ_1 -formula を用い、 Σ_1 -formula θ に翻訳する。 θ が定義する relation を R とすれば
 $\text{type}(R) = \langle \langle 0, 0 \rangle, 0, 0 \rangle$, $R \in \Sigma_1 \mathcal{W}$, $f = (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{U}_0^2) \cdot R^*$ 。

§11 29 の証明

35 29.1) の証明。 R を定義する Σ -formula を $\phi[u_0, \dots, u_{n+1}]$ と

する。 35.2) $\phi = \bigvee u_i, u_{i_2}$ のとき: $\langle b_0, \dots, b_{n+1} \rangle \in ({}^r R)^* \Leftrightarrow$

$$b_i \in \mathcal{QF}r_{i_1}, 0 \leq i \leq n+1 \wedge \langle b_{i_1}, b_{i_2} \rangle \in ({}^r \text{Sup})^* \quad \text{そして,}$$

$$\langle a, b \rangle \in ({}^r \text{Sup})^* \Leftrightarrow a \in \mathcal{QF}_1 (\exists x (x < g_1(a) \rightarrow h(g_0(a), x) < b))$$

$$\wedge (y) (y < b \rightarrow \exists x (x < g_1(a), y \leq h(g_0(a), x)))$$

35.5) $\phi = \bigwedge w (w \in u_i \rightarrow \phi_i)$ のとき: ϕ_i が定義する relation を R_i とすると
 $\langle a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R^* \Leftrightarrow (a) (a \in a_i \rightarrow \langle a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R_i^*)$ 。 従って

$$\langle b_0, \dots, b_{n+1} \rangle \in ({}^r R)^* \Leftrightarrow b_i \in \mathcal{QF}r_{i_1}, 0 \leq i \leq n+1$$

$$\wedge (c) (c < g_1(b_i) \rightarrow \langle b_0, \dots, b_{n+1}, h(g_0(b_i), c) \rangle \in ({}^r R_i)^*)$$

36. 29.2) の証明。 $m=1$ の場合を述べる。 R を定義する Σ -formula を $\phi[Q, u_0, \dots, u_{n+1}]$ とする。

36.6) $\phi = \bigwedge w (w \in u_i \rightarrow \phi_i)$ のとき: ϕ_i が定義する relation $\in R_i$ とする。 $\langle g, a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R^* \Leftrightarrow (\forall a \in a_i \rightarrow \langle g, a_0, \dots, a_{n+1}, a \rangle \in R_i^*)$

$\Leftrightarrow (\forall a \in a_i \rightarrow \exists g_1 (g_1 \subseteq g \wedge \bar{g}_1 \in X_r \wedge \langle g_1, a_0, \dots, a_{n+1}, a \rangle \in R_i^*))$

$\stackrel{*}{\Leftrightarrow} \exists g_1 (g_1 \subseteq g \wedge \bar{g}_1 \in X_r \wedge (\forall a \in a_i \rightarrow \langle g_1, a_0, \dots, a_{n+1}, a \rangle \in R_i^*))$

$\Leftrightarrow \exists g_1 (g_1 \subseteq g \wedge \bar{g}_1 \in X_r \wedge \langle g_1, a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R^*)$

* の \Rightarrow : 各 $a \in a_i$ について $g_a \subseteq g, \bar{g}_a \in X_r, \langle g_a, a_0, \dots, a_{n+1}, a \rangle \in R_i^*$

なる g_a が存在する。 $g_1 = \bigcup \{g_a \mid a \in a_i\}$ とすると $g_1 \subseteq g, \bar{g}_1 \in X_r$ (\because

w_r は regular)。そして, $g_a \subseteq g_1$ より $\langle g_1, a_0, \dots, a_{n+1}, a \rangle \in R_i^*$ 。

37 29.3) の証明。 $m=1$ の場合を述べる。 R を定義する Σ -formula $\in \mathcal{P}[Q, u_0, \dots, u_{n+1}]$ とする。

37.6) $\phi = \bigwedge w (w \in u_i \rightarrow \phi_i)$ のとき: ϕ_i が定義する relation $\in R_i$

とす。 $\langle b, a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R^* \Leftrightarrow \exists h (b = h \wedge \bar{h} \in X_r \wedge \langle h, a_0, \dots, a_{n+1} \rangle \in R^*)$

$\Leftrightarrow \exists h (b = h \wedge \bar{h} \in X_r \wedge (\forall a \in u_i \rightarrow \langle h, a_0, \dots, a_{n+1}, a \rangle \in R_i^*))$

$\Leftrightarrow b \in H_{t_0}^* \wedge (\forall a \in u_i \rightarrow \exists h (b = h \wedge \bar{h} \in X_r \wedge \langle h, a_0, \dots, a_{n+1}, a \rangle \in R_i^*))$

$\Leftrightarrow b \in H_{t_0}^* \wedge (\forall a \in u_i \rightarrow \langle b, a_0, \dots, a_{n+1}, a \rangle \in R_i^*)$

S/2 20.1) (⇐) の証明

38 38.1) $F(\{a, b\})$ は recursive

($\because P(x, a, b) \Leftrightarrow (Eg(a, b) = 0 \wedge S(x, 1) \wedge k(x, 0) = a)$)

$\vee (Eg(a, b) = 1 \wedge S(x, 2) \wedge k(x, 0) = \min(a, b) \wedge k(x, 1) = \max(a, b))$

$\ell(a, b) \simeq \mu x P(x, a, b)$

とすると $\ell(a, b)$ は recursive

そして, $F(\{a, b\}) = j(\ell(a, b), Eg(a, b) + 1)$ 。

38.2) $F_2(\langle a, b \rangle)$ は recursive

38.3) $D(h, c) \stackrel{\text{def}}{\mapsto} (d)(d \in g_0(c) \rightarrow \exists d_1 \exists d_2 (h(d_1) = d_2 \wedge F_2(\langle d_1, d_2 \rangle)) = h(g_1(c), d)) \wedge c \in U$

とすると D は Σ_1^{ord} か

$D(h, c) \mapsto \exists p (p \subseteq \mathbb{N} \wedge \bar{p} \in \mathcal{R}_r, c = F_2(p))$ for $\forall h \in TF_1, \forall c \in U_0$

39 $f: TF_1 \times U_0 \rightarrow U_0$ は partial function $f \neq \emptyset$ かつ,

$\text{type}(R) = \langle \langle 0, 0 \rangle, 0, 0 \rangle$, $R \in \Sigma_1(\mathbb{N})$ ならば R が存在し, $f = (TF_1 \times U_0^2) \cap R^*$

とする。任意の $h \in TF_1, a, b \in U_0$ に対して,

$\langle h, a, b \rangle \in f \Leftrightarrow \langle h, a, b \rangle \in R^* \Leftrightarrow \exists h_1 (h_1 \subseteq h \wedge \bar{h}_1 \in \mathcal{R}_r, \langle h_1, a, b \rangle \in R^*)$

$\Leftrightarrow \exists c (D(h, c) \wedge \langle c, a, b \rangle \in (R^*)^*)$

最後の式は Σ_1^{ord} 中の recursive predicate $S(h, a, b, c)$ がある

$\langle h, a, b \rangle \in f \Leftrightarrow \exists c S(h, a, b, c)$ for $\forall h \in TF_1, a, b \in U_0$, EP 5,

$f(h, a) \simeq g_0(\mu c S(h, a, g_0(c), g_1(c)))$ " .

参考文献

- [1] R. Montague Recursion Theory as a Branch of Model Theory, Logic, Methodology and Philosophy of Science III (North-Holland Pub. Co. 1968) pp. 63~86.
- [2] M. Takahashi Ackermann's Model and Recursive Predicates, Proc. Japan Acad. 44 (1968) pp 41~42.
- [3] M. Takahashi Recursive Functions of Ordinal Numbers and Lévy's Hierarchy, Commentarii Mathematici

Universitatis Sancti Pauli, 17 (1949) pp 21~29

[4] T. Tuguē On the Partial Recursive Functions of Ordinal Numbers, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964) pp 1~32.