数理解析研究所講究録
第 88 巻 1970 年 66-85

Potential 散乱

東大 理　黒田 成俊

§1. 序.

散乱理論の発展に際して，つねに念頭におかれている具体的作用素の一つは，Schrödinger 作用素

$$(H_2u)(x) = -\Delta u(x) + q(x)u(x) \quad \text{in } L^2(R^3)$$

である．$q(x)$ にどのような仮定を課せば，散乱理論の主要な結論（wave operator $W_\pm$ の存在と完備性［＝ $W_\pm$ の値域が一致すること］，一般固有函数展開など）が成立するかを問題とするわけである．ここで $W_\pm$ は

$$(H_1u)(x) = -\Delta u(x) \qquad \text{とおいて，}$$

$$W_\pm = \underset{t\to\pm\infty}{\text{s-}\lim}\, e^{itH_2}e^{-itH_1}$$

によって定義される．$q(x)$ は一般には有界と仮定しないから，q の local singularity の強さをどの位にできるかも問題になるが，主な関心は $q(x) = O(1/|x|^\delta)$，$|x|\to\infty$，としたとき，δ をどれぐらい小さくとれるかにある．前から

わかっていたことは：

(1)　$\delta = 2+\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, なら O.K. (Ikebe [4]).

(2)　$\delta = 1$ ではだめ. 詳しく云うと, $q(x) = \mathrm{const}/|x|$ だと wave operator は存在しない (Dollard [3]).

(3)　$\delta = 1+\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, なら wave operator の存在は云える (Kuroda [10]) が完備性はわからない.

その後, いくつかの一般論もでて, その結果として, x-空間の次元を一般の n にしたり, q に関する仮定を $(1+|x|)^{\alpha} q(x) \in L^{p}(R^{n})$ という形にすることはできた (結論が多少弱くなることもある). しかし wave operator の完備性については, 久しく $\delta = 2+\varepsilon$ をでないままであった. ところが, 昨年の国際会議での講演の中で T. Kato ([7]) は

(3′)　$\delta = 1+\varepsilon,\ \varepsilon > 0$, のとき wave operator は完備である

ことを示した (なお, それにさきだって, Rejto [15] は $\delta = 4/3 + \varepsilon$ まで改良した). Kato の結果は任意の次元 n に対して成立する.

Rejto, Kato の方法は, いずれも球座標を使って角変数を分離した上で, Bessel 函数に関する評価を使う. Kato により用いられたのは, 次の結果である (Kuroda [12]).

$\nu \geqq 0$, $p > 1/2$, $t, t' > 0$ に対して

$$A_\nu(t,t';p) = \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^{2p}} \{ J_\nu(t'^{1/2}x) - J_\nu(t^{1/2}x) \}^2 dx$$

とおく。p と，$(0,\infty)$ の Compact 集合 K を固定したとき，ν によらない定数 $c > 0$ と $\theta > 1$ があって，

$$A_\nu(t,t';p) \leqq c\,|t'-t|^\theta, \quad \forall t, t' \in K.$$

$1/2 < p < 3/2$ のとき（これは $1 < \delta < 3$ に相当する）この結果を証明するのには，超幾何函数を使う面倒（tedious）な計算をせねばならなかった．この話の目的の一つは，(3′) に対して上の結果を使わない形の証明を与え，あわせて q に関する仮定を $(1+|x|)^\alpha q(x) \in L^p(R^n)$ の形の範囲でなるべく一般にすることである．方法の要点は，大ざっぱに云って，「spectral density の "平方根" が Fourier space における球面上への trace operator になる」（定理3.1）ということにある。この定理は，$-\Delta + q(x)\cdot$ 以外の問題についても応用可能で，$\delta = 2+\varepsilon \longrightarrow \delta = 1+\varepsilon$ に相当する改良をもたらすのではないかと思うが，詳しいことはまだ調べていない。

Wave operator $W_\pm$ が存在して完備であると，scattering operator $S = W_+^* W_-$ が unitary になる．（Potential 散乱の場合.）S は $H_1 = -\Delta$ と可換：$SH_1 = H_1 S$ である

から，一般論にみあって $L^2(R^n)$ のかわりに $\mathcal{H}$ とかりて，何らかの意味での direct integral による H_1 のスペクトル表示

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \oplus \mathcal{H}(\lambda) d\lambda, \quad \tilde{H}_1\{u(\lambda)\} = \lambda\{u(\lambda)\},$$

を考えると，S は decomposable operator

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \oplus \mathcal{S}(\lambda) d\lambda$$

になる．Schrödinger作用素のときは，$H_1 = -\Delta$ だから，$\mathcal{H}(\lambda) = L^2(S_{\sqrt{\lambda}}^{n-1})$（ただし $S_{\sqrt{\lambda}}^{n-1}$ は Fourier space における半径 $\sqrt{\lambda}$ の球面），$\lambda > 0$，とればよい．

$\mathcal{S}(\lambda)$ は $\mathcal{H}(\lambda)$ 上の unitary 作用素になる．

$$\mathcal{K}(\lambda) = \mathcal{S}(\lambda) - I$$

は energy λ における散乱の度合いをあらわすもので，いい性質をもつ（e.g. 完全連続，Hilbert-Schmidt 型，…）と期待されている．実際，$\delta > 3$ ならば（3次元空間の場合），$\mathcal{K}(\lambda)$ が球面上の Hilbert-Schmidt型作用素になることが Ikebe [5] によって示されており，また Birman and Entina [2] によれば，同じ条件のもとで，$\mathcal{K}(\lambda)$ がほとんど到るところの λ に対して trace型作用素になることが示される．定理3.1の方法によると，$\mathcal{K}(\lambda)$ の属する class は，

trace operator の属する class と密接に関係することがわかる．これによって，δ に応じて，$\mathbb{K}(\lambda)$ の class を "連続的" に定めることができ，特に $\delta > 1$ で $\mathbb{K}(\lambda)$ は完全連続，$\delta > 2$ で Hilbert-Schmidt 型，$\delta > 3$ で trace 型になることが証明される．

次節以下では，次の記号を用いる．

$B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ： ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への線型連続作用素全体．

$B(\mathcal{H})$ ： $B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ の略記．

$B_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ： $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の元で完全連続なものの全体．

$B_\alpha(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $0 < \alpha < \infty$ ： $B_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の元 A で，A^*A の固有値（0 でないもののみ）を重複度もこめて $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$ とならべるとき，$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{\frac{\alpha}{2}} < \infty$ となるものの全体．$B_2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ は Hilbert-Schmidt 族，$B_1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ は trace 族．

$C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ： $\mathcal{H}_1$ から $\mathcal{H}_2$ への線型閉作用素で，定義域が $\mathcal{H}_1$ で稠密なものの全体．

$D(A)$ ： 作用素 A の定義域

A^a ： 作用素 A の closure．

§2. 一般論からの準備.

暫く一般的な話をする. すなわち, ヒルベルト空間$\mathcal{H}$における二つの自己共役作用素 H_1, H_2 に対する散乱理論の一般論を, 以下の話の出発点として都合のよい形にのべる.

まず, H_2 をどうきめるかからはじめる. ここでは Form の理論によることにする. 以下, この節では $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ をヒルベルト空間, H_1 は $\mathcal{H}_1$ での非負である自己共役作用素 ($H_1 \geq 0$), $A \in C(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, $C \in B(\mathcal{H}_2)$ かつCは自己共役 とする.

__補題 2.1.__ (Birman [1]) H_1, A に対して

(2.1) $$D(A^*) \supset D(H_1^{1/2}), \quad A^*(H_1+1)^{-1/2} \in B_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2),$$

が成り立つならば, $D(H_1^{1/2}) \times D(H_1^{1/2})$ を定義域とする Hermitian sesqui-linear form

$$h_2[u,v] = (H_1^{1/2}u, H_1^{1/2}v) + (CA^*u, A^*v)$$

は下に有界かつ closed である. ($\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ における内積を, 共に (,) で表わす.)

下に有界な closed form h_2 に対して, $\mathcal{H}_1$ における自己共役作用素 H_2 で, 十分小さい実数 γ に対して

$$D((H_2-\gamma)^{1/2}) = D(H_1^{1/2})$$

$$h_2(u,v) = ((H_2-\gamma)^{1/2}u, (H_2-\gamma)^{1/2}v) + \gamma(u,v)$$

となるものが一意的に定まる. 以下, このようにして H_2 を定める. 大ざっぱに云って, $H_2 \simeq H_1 + ACA^*$.

出発点となるのは次の定理である.

<u>定理 2.2.</u> (2.1) に加えて, 次の条件 a), b) をみたす作用素値函数 $M_1 : (0, \infty) \longrightarrow B(\mathcal{H}_2)$ が存在すると仮定する.

a) $M_1(\lambda)$ は $(0, \infty)$ で作用素のノルムの意味で局所 Hölder 連続である. b) $(0, \infty)$ に含まれる任意の有界区間 I に対して $\left(H_1 = \int \lambda \, dE_1(\lambda) \right)$

$$(2.2) \qquad (A^* E_1(I) A)^a = \int_I M_1(\lambda) d\lambda \ .$$

このとき, H_2 を上のようにきめると, H_1, H_2 に対して, 散乱理論の主要な結論が成り立つ. すなわち:

(1) H_1, H_2 の絶対連続な部分はユニタリ同値;

(2) そのユニタリ同値を与える作用素 $\Omega_\pm$ が定常的方法で構成される. 一方 wave operator

$$W_\pm = \underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim} \, e^{itH_2} e^{-itH_1} P_1$$

(P_1 は H_1 に関して絶対連続な部分空間への射影) が存在して, $\Omega_\pm$ と一致する. 従って $W_\pm$ は完備: $W_+ \mathcal{H}_1 = W_- \mathcal{H}_1$ である.

(3) $W_\pm$ に対して Invariance principle が成り立つ.

(4) H_2 の絶対連続な部分は, H_1 の絶対連続な部分と同じ型の一般固有函数展開をもつ.

((2)〜(4) の詳しい定式化についての説明は省略する.)

注意2.3. 定理2.2の仮定の下で，$[A^*(H_1-z)^{-1}A]^a \in B(\mathcal{H}_2)$ となり，かつ任意の $\lambda \neq 0$ に対して

$$G(\lambda \pm i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\{1 + C[A^*(H_1-(\lambda \pm i\varepsilon))^{-1}A]^a\}$$

がノルムによる收束の意味で存在する．さらに，ほとんど到るところの λ に対して $G(\lambda \pm i0)^{-1} \in B(\mathcal{H}_2)$ が存在する（なお除外集合は閉集合）．このことは，定理の証明に必要なことでもあるが，のちに $\mathcal{K}(\lambda)$ の形を書き下すときにも必要になる．

定理2.2の証明は省略する．この種の定理は，いろいろの形に述べられているが，上の形は Kato [7] による．証明は既知であるが，丁度この形で証明してあるところはない．Kuroda [11] にほとんど証明してあるが，[11]の方法はごたごたしたところがある．印刷がおくれているが，Kato and Kuroda [8] にある改良された証明に [7], [11] の一部を加えれば，現在のところ一番具合のいい完全な証明ができる．やや特殊の場合に限って大体の様子を理解して頂くには，Kato and Kuroda [9] が手軽かもしれない．

§3. Schrödinger作用素.

この節では，$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L^2(R^n)$ とし，簡単のため $n \geqq 3$ とする．また $q(x)$ を実数値函数とし，H_1 は $-\Delta$ により

自然に定まる $L^2(R^n)$ の自己共役作用素, A は $u(x)\longrightarrow |q(x)|^{1/2}\cdot u(x)$, C は $u(x)\longrightarrow \mathrm{sgn}\, q(x)\cdot u(x)$ で定まる掛け算作用素とする. また, Fourier 変換を $\mathcal{F}$ で表わす:

$$(\mathcal{F}u)(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n} u(x)e^{-i\xi\cdot x}dx .$$

$L^2_0(R^n)$ は $L^2(R^n)$ の元で, 有界な台をもつものの全体. ($L^\infty_0(R^n)$なども同様)

<u>定理3.1.</u> 仮定: i) (2.1) が成り立つ; ii) 次の条件 c), d) をみたす作用素値函数 $T:(0,\infty)\to B(L^2(R^n),L^2(S^{n-1}))$ が存在する: c) $T(\lambda)$ は $(0,\infty)$ で作用素のノルムの意味で局所 Hölder 連続; d) 任意の $u\in L^\infty_0(R^n)$ と任意の $\lambda>0$ に対して,*)

$$(3.1)\qquad (T(\lambda)u)(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{\frac{n-2}{4}}\left(\mathcal{F}(|q|^{1/2}u)\right)(\lambda^{1/2}\omega),\quad \omega\in S^{n-1}.$$

結論: (1) $M_1(\lambda)=T(\lambda)^*T(\lambda)$ として定理2.2の仮定が成り立つ; (2) $Q(\lambda+i0)$ を注意2.3で述べたものとすれば, 注意2.3の除外集合に属する λ を除いて

$$(3.2)\qquad \mathcal{K}(\lambda)=T(\lambda)Q(\lambda+i0)^{-1}CT(\lambda)^*.$$

したがって,

$$T(\lambda)\in B_\alpha(L^2(R^n),L^2(S^{n-1}))$$

ならば

$$\mathcal{K}(\lambda)\in B_{\frac{\alpha}{2}}(L^2(S^{n-1}))$$

である.

*) $D(|q|^{1/2})\supset D((-\Delta)^{1/2})$ より $|q|^{1/2}\in L^{2,loc}$ がでる. したがって, $u\in L^\infty_0(R^n)$ ならば, $\mathcal{F}(|q|^{1/2}u)$ は連続になる. (3.1) ではこれを用いている.

証明からわかるように，定理3.1の仮定(ii)から定理2.2の条件a)，b)がでるのであるが，Hölder連続性を別にすれば，その逆も成り立つ．

命題3.2. 定理2.2の条件b)をみたす$M_1(\lambda)$があれば，定理3.1の条件d)をみたす$T(\lambda)$があって，$M_1(\lambda) = T(\lambda)^* T(\lambda)$となる．

この命題で，$M_1(\lambda)$がHölder連続と仮定しても，$T(\lambda)$のHölder連続性を導くことは一般にはできないであろう．

Hölder連続性を$T(\lambda)$に関して検証しておく一つの利点は，定理3.1の形だと，仮定がqに関する線型演算で保存されることになり，従ってlocal singularityと∞でのdecayの様子とを別々に考えることができることにある．すなわち，次の命題が成り立つ．

命題3.3. q_1, q_2が定理3.1の仮定をみたすならば，$\alpha q_1 + \beta q_2$（α, βは実数）も同様．

証明. $\alpha = \beta = 1$の場合だけみれば，あとはtrivial. 有界函数$b(x)$によって，$|q_1(x) + q_2(x)|^{1/2} = b(x) \times \{|q_1(x)|^{1/2} + |q_2(x)|^{1/2}\}$とかける．$b(x)$を掛ける作用素を$B$とし，$q_1$, q_2に対して，定理3.1の作用素をそれぞれT_1, T_2として，$T(\lambda) = \{T_1(\lambda) + T_2(\lambda)\} B$ととればよい．

さて，いよいよ目標とした定理を述べる．

定理 3.4. 次の (3.3)—(3.5) を仮定する．

(3.3) $$\sup_{x\in R^n}\int_{|x-y|<1}\frac{|q(y)|}{|x-y|^{n-2}}\,dy<\infty,$$

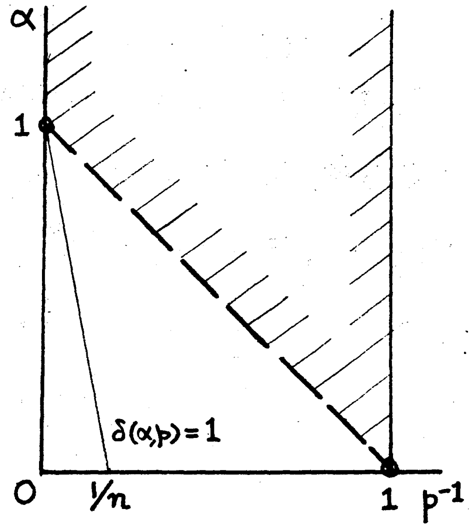
(3.4) $$\lim_{\delta\to 0}\int_{|x-y|<\delta}\frac{|q(y)|}{|x-y|^{n-2}}\,dy=0 \quad (x\text{につき一様収束}),$$

(3.5) $$\begin{cases}(1+|x|)^{\alpha}q(x)\in L^p(R^n), & \text{ここで }\alpha,\ p\text{ は}\\ 0\leqq p^{-1}\leqq 1,\quad \alpha>1-p^{-1} & \text{をみたすある数.}\end{cases}$$

そのとき，定理 3.1 の仮定が成立する．さらに，$p>1$ ならば

(3.6) $$\eta>(n-1)/\{\alpha-(1-p^{-1})\}$$

をみたす任意の η に対して，$K(\lambda)\in B_\eta(L^2(S^{n-1}))$ である．（ただし，除外集合に属する λ の値は除かねばならない．）$q(x)$ が上の仮定をみたす函数の有限和であるときも同様である．ただし η の範囲は，おのおのの summand に関する範囲の共通部分をとる．



(3.5) をみたす α, p の範囲は，右図で斜線でかこった部分である．$|q(x)|=O(|x|^{-\delta})$, $|x|\to\infty$, として $q(x)$ が (3.5) をみたすようにするには，$\delta>\delta(\alpha,p)\overset{\mathrm{def}}{=}\alpha+np^{-1}$ をみ

たさねばならない．$\delta(\alpha,p)=1$の線をかけば図のようになり，定理3.4の結果が$|q(x)|\leq \mathrm{const}/(1+|x|)^{1+\varepsilon}$の場合を含むことがわかる．斜線の範囲が，$\delta(\alpha,p)=1$の線までのびてくるのが理想的であるが，まだそこまでできていない．

§4．定理の証明．

定理3.1の証明．簡単のため$f(x)=|q(x)|^{1/2}$とかきさらに

$$\delta_\varepsilon(H_1-\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\{(H_1-(\lambda+i\varepsilon))^{-1}-(H_1-(\lambda-i\varepsilon))^{-1}\}$$

とおく．任意に$u,v\in L_0^\infty(R^n)$をとる．すると，$fu,fv\in L_0^2(R^n)\subset L_0^1(R^n)$だから，単純な計算で

$$\begin{aligned}&(\delta_\varepsilon(H_1-\lambda)fu,fv)\\&=\frac{1}{\pi}\int_{R^n}\frac{\varepsilon}{(\xi^2-\lambda)^2+\varepsilon^2}(\mathcal{F}fu)(\xi)\overline{(\mathcal{F}fv)(\xi)}\,d\xi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varepsilon}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}(T(\mu)u,T(\mu)v)_{L^2(S^{n-1})}d\mu\end{aligned}$$

を得る．ここで$\varepsilon\downarrow 0$とすれば，左辺は$(d/d\lambda)(E_1(\lambda)fu,fv)$にほとんど到るところ収束する．一方右辺では，$(T(\cdot)u,T(\cdot)v)\in L^1(0,\infty)$はすぐわかるので，右辺は$L^1(0,\infty)$で$(T(\lambda)u,T(\lambda)v)$に収束する．すなわち，ほとんど到るところで$(d/d\lambda)(E_1(\lambda)fu,fv)=(T(\lambda)u,T(\lambda)v)$．

したがって，有界区間 I に対して，

$$(AE_1(I)Au, v) = \int_I (T(\lambda)u, T(\lambda)v)d\lambda.$$

ところが，(2.2) の右辺の積分の存在（作用素のノルムの意味での）はわかっているから，上のことより (2.2) がでる．

なお，上の計算はおおむね逆行可能で，それより命題 3.2 が証明される．

(3.2) は定理 2.2 の証明と，$M_1(\lambda) = T(\lambda)^* T(\lambda)$ からの自然な帰結であるが，その証明は省略する．以上で定理 3.1，命題 3.2 の証明を終る．

定理 3.4 に移る．　　(2.1) は (3.3)，(3.4) および (3.5) からでる条件

$$\int_{|x-y|\leq 1} |q(y)|\,dy \to 0, \quad |x| \to \infty,$$

を用いて証明される（Schechter [16] 参照）．

仮定 (3.5) により，$g = fu = |q|^{1/2}u$ として，

(4.1)　$(1+|x|)^s g(x) \in L^r(R^n)$,　$s = \alpha/2$,　$r^{-1} = 2^{-1}(1+p^{-1})$,

であり，$\alpha > 1-p^{-1}$ という仮定は，$s > 1-r^{-1}$ という仮定になる．したがって，定理 3.4 は Sobolev 型の空間の埋蔵定理*) に帰するわけであるが，$\mathcal{K}(\lambda)$ に関する陳述を別とすれば，簡単に証明される．すなわち，次のようにする．

*) x, ξ の役割りが普通と逆になっている．

$x=(x',x_n)$, $\xi=(\xi',\xi_n)$ とおいて, $\mathcal{F}g$ の $n-1$ 次元超平面への trace を考えると,

$$(\mathcal{F}g)(\xi',\xi_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^{n-1}} e^{-i\xi'x'}d\xi'\int_{-\infty}^{\infty} g(x',x_n)\,e^{-i\xi_n x_n}\,dx_n.$$

ここで $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots=\tilde{g}(x')$ とおくと, $(r'^{-1}+r^{-1}=1)$

$$|\tilde{g}(x')|\leqq\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_n}{(1+(|x'|^2+|x_n|^2)^{1/2})^{\delta r'}}\right\}^{1/r'}\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^{\delta r}|g(x',x_n)|^r dx_n\right\}^{1/r}.$$

ここで, 仮定 $\delta>1-r^{-1}=r'^{-1}$ により, 第一の因子の積分は収束し, その値は x' に無関係な数でおさえられる. 一方 (4.I) により第二の因子 $\in L^r(R^{n-1})$. ところが, $r^{-1}=2^{-1}(1+p^{-1})$ により, $1/2\leqq r^{-1}\leqq 1$ だから, $\tilde{g}\in L^r$ の Fourier 変換として $(\mathcal{F}g)(\cdot,\xi_n)\in L^{r'}(R^{n-1})$ である. ところが, $r'\geqq 2$ であるから, R^{n-1} の任意の compact 部分集合 K に対して $(\mathcal{F}g)(\cdot,\xi_n)\in L^2(K)$. また, ξ_n が変るとき, $(\mathcal{F}g)(\cdot,\xi_n)$ が ξ_n につき Hölder 連続になることも容易にわかる. 以上のことから, 定理3.1にいうところの $T(\lambda)$ の存在を示すのは何でもない.

$p\neq 1$, したがって $r\neq 1$ ならば $T(\lambda)$ は実は $L^2(R^n)$ を $H^{\delta',2}(S^{n-1})$ にうつす. ただし, δ' は $\delta-\delta'>1-r^{-1}=2^{-1}-2^{-1}p^{-1}$ をみたす任意の正数である. このことを, 上と同様に初等的な議論で証明する

ことはできていないので，一般の埋蔵定理を使うことにする．

xとξの役割りをとりかえて，普通の用法にもどし，

$$B^{s,r}(R^n)=\{u \mid (1+|\xi|)^s \mathcal{F}u \in L^r\}$$

$$H^{s,r'}(R^n)=\{u \mid \mathcal{F}^{-1}\{(1+|\xi|)^s \mathcal{F}u\} \in L^{r'}\}$$

とし，$W^{s,r}(R^n)$ をノルム

$$\sum_{|k|\le[s]} \|D^k u\|_{L^r}^r + \sum_{|k|=[s]} \iint \frac{|D^k u(x)-D^k u(y)|^r}{|x-y|^{n-r(s-[s])}}\,dx\,dy$$

によるバナッハ空間とする．$1\leqq r\leqq 2$であるから，

$$B^{s,r}(R^n)\subset H^{s,r'}(R^n)\overset{(*)}{\subset} W^{s-\varepsilon,r'}(R^n)\overset{(**)}{\longrightarrow} W^{s',r'}(R^{n-1})$$

(ただし $s-s'>1-r^{-1}$) がなりたつ．(*) は例えば，

Lions et Magenes [13]，(**) は例えば Muramatsu [14]

参照．さて，$g\in B^{s,r}(R^n)$ が compact な台をもてば，

$r'\geq 2$ を 2 にかえて，$g\in W^{s',2}(R^{n-1})$

$=H^{s',2}(R^{n-1})$ としてよい．これより，$T(\lambda):L^2(R^n)\longrightarrow$

$H^{s',2}(S^{n-1})$ がでる．($W_0^{s,r'}\subset W_0^{s-\delta,2}$, $\delta>0$, となるから).

さて，$H^{s',2}(S^{n-1})\longrightarrow L^2(S^{n-1})$ なる injection は

$B_t(H^{s',2}(S^{n-1}),L^2(S^{n-1}))$, $t>(n-1)/s'$, に属する．

$(n-1)/s'$ は $(n-1)/\{s-(1-r^{-1})\}$ より大きい任意の数となり得るが，$(n-1)/\{s-(1-r^{-1})\}=2(n-1)/\{\alpha-(1-p^{-1})\}$

であるから，(3.2) により，$K(\lambda)\in B_\eta(L^2(S^{n-1}))$ がでる．

§5. 一般化.

定理3.1は一般化できる. 簡単のため $H_1 \geqq 0$ は絶対連続であるとし, H_1 のスペクトル表示により

$$(5.1) \qquad \mathcal{H} \cong \int_0^\infty \oplus \mathcal{H}(\lambda)\, d\lambda$$

と表現されているとしよう. $u \in \mathcal{H}$ に対して, (5.1)による u の表現 $\{u(\lambda)\}$, $u(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$, を対応させる作用素を $\mathcal{F}$ とかく. また, あるヒルベルト空間 $\mathcal{X}$ があって, $\mathcal{H}(\lambda)$ は $\mathcal{X}$ と同型であると仮定する. したがって, $\mathcal{H}(\lambda) \to \mathcal{X}$ なるユニタリ作用素 $U(\lambda)$, $\lambda \in (0,\infty)$, が存在するが, そのような $\{U(\lambda)\}$ を一つ固定して考える.

そのとき, $T : (0,\infty) \longrightarrow B(\mathcal{H}, \mathcal{X})$ で次の条件 c′), d′) をみたすものが存在するならば, $M_1(\lambda) = T(\lambda)^* T(\lambda)$ として, 定理2.2の条件 a), b) が成り立つ: c′) $T(\lambda)$ は $(0,\infty)$ で作用素のノルムの意味で局所 Hölder 連続; d′)

$$T(\lambda)u = U(\lambda)(\mathcal{F}A u)(\lambda).$$

別の一般化として, λ についての"局所化"がある. すなわち, 定理2.2の条件 a), b) を局所化して, $(0,\infty)$ のある開集合 Γ に対して, $M_1 : \Gamma \longrightarrow B(\mathcal{H}_2)$ が存在して, a), b) が Γ の中でのみ成立することを仮定すると, 定理の結論も局所的な形で成り立つことがわかっている. これにみあっ

て，前段の議論も局所化される．すなわち，Γ 上においてのみ $\mathscr{H}(\lambda)$ が $\mathscr{K}$ と同型で，Γ 上で条件 c′), d′) をみたすような $T: \Gamma \to B(\mathscr{H}_2)$ の存在を仮定するのである．

局所的に成り立った結論を再びつなぎあわすことができる．従って，H_1 のスペクトルの多重度が局所的に一定であれば，今まで述べた議論を用いて散乱問題を論ずることができる可能性があることになる．

附録．

命題3.2を用いて，ある種の埋蔵定理が得られる．簡単のため $n=3$ の場合にのべる．Sobolev の定理により，$M_1(\lambda)$ が存在することがわかっている場合があるので，それから $T(\lambda)$ の存在がわかるのである．

<u>定理 A.1.</u> $n=3$ とする．u の Fourier 変換が L^p, $\frac{6}{5} \leqq p \leqq 1$，に属するならば，2次元球面上への u の L^2-trace がある．詳しく云えば，15頁の記号を使って，

$$T: B^{0,p}(R^3) \longrightarrow L^2(S^2)\ .\ \left(\frac{6}{5} \leqq p \leqq 1\right)$$

なる埋蔵作用素が存在する．

注意．T の Hölder 連続性はわからない．つまり，球面の中心を固定し，半径をかえたとき，T は半径をパラメーターとして Hölder 連続であるかどうかはわからない．

証明 $p=\frac{6}{5}$ として証明する. (他の場合は interpolation.) $q\in L^{\frac{3}{2}}(R^3)$ ならば, 定理2.2の $M_1(\lambda)$ が存在して,

$$\|M_1(\lambda)\| \leqq c(\lambda)\|q\|_{L^{3/2}} = c(\lambda)\| |q|^{1/2}\|^2_{L^3}$$

となることがわかっている(例えば[6],[8]参照). 要点は次の通り. $A(H_1-(\lambda\pm i\varepsilon))^{-1}A$ は積分作用素で, その核は $|q(x)|^{1/2}\ e^{i\sqrt{\lambda\pm i\varepsilon}|x-y|}\cdot|x-y|^{-1}|q(y)|^{1/2}$ となる. Sobolev の不等式によれば, $\varepsilon\downarrow 0$ のとき, この核は Hilbert-Schmidt ノルムの意味で

$$K_\pm(\lambda;x,y)=|q(x)|^{\frac{1}{2}}\frac{e^{\pm i|\lambda|^{1/2}|x-y|}}{|x-y|}|q(y)|^{1/2}$$

に収束する. そこで $M_1(\lambda)$ を $(2\pi i)^{-1}\{K_+(\lambda;x,y)-K_-(\lambda;x,y)\}$ を核とする積分作用素とすればよい.

これを使って, 定理A.1を証明するために, x, ξ の役割りを, 再び普通と逆にする. すなわち, 14頁以前の用法にもどして考える. そこで $f(x)\in L^{6/5}$ のとき $\mathcal{F}f(\xi)$ の球面上への trace を考えればよい. 任意の $f\in L^\infty_0$ をとる.

$$f=g\cdot h\ ,\quad g=|f|^{\frac{2}{5}}\ ,\quad h=|f|^{\frac{3}{5}}e^{i\theta(x)}$$

とし, $g=|q|^{1/2}$ とみて $M_1(\lambda)$, $T(\lambda)$ を作ったとすると,

$$\|T(\lambda)h\|_{L^2(S^2)}\leqq \|T(\lambda)\|\|h\|_{L^2}\leqq$$

$$\leqq c(\lambda)^{1/2} \| g \|_{L^3} \| h \|_{L^2} = c(\lambda)^{1/2} \| f \|_{L^{6/5}}.$$

一方 $f \in L^\infty_0$ に対しては，$T(\lambda)h$ は $c_2(\lambda)(\mathcal{F}f)(\sqrt{\lambda}, \omega)$, $\omega \in S^{n-1}$, と一致する．　　　　証明終り．

文　　献

[1] Birman, M. Sh., On the spectra of singular boundary value problems, Mat. Sb. 55(97)(1961), 125-174 = Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol 53, 23-80.

[2] Birman, M. Sh. and S. B. Entina, A stationary approach in the abstract theory of scattering, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 31(1967), 401-430 = Math. USSR-Izvestia 1(1967), 391-420.

[3] Dollard, J. D., Asymptotic convergence and the Coulomb interactions, J. Mathematical Phys. 5(1964), 729-738.

[4] Ikebe, T., Eigenfunction expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to scattering theory, Arch. Rat. Mech. Anal. 5(1960), 1-34.

[5] Ikebe, T., On the phase-shift formula for the scattering operator, Pacif. J. Math. 15(1965), 511-523.

[6] Kato, T., Wave operators and similarity for non-selfadjoint operators, Math. Ann. 162(1966), 258-279.

[7] Kato, T., Some results on potential scattering, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics 1969, to appear.

[8] Kato, T. and S. T. Kuroda, Theory of simple scattering and eigenfunction expansions, to appear in F. E. Browder, ed., Functional Analysis and Related Fields, Springer.

[9] Kato, T. and S. T. Kuroda, The abstract theory of scattering, Lecture notes, Summer 1969.

[10] S. T. Kuroda, On the existence and the unitary property of the scattering operator, Nuovo Cimento 12(1959), 431-454.

[11] S. T. Kuroda, An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory, J. Analyse Math. 20(1967), 57-117.

[12] S. T. Kuroda, On the Hölder continuity of an integral involving Bessel functions, to appear in Quart. J. Math.

[13] Lions, J. L. et E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes (III), (原文イタリヤ語) Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 15(1961), 41-103.

[14] Muramatsu, T., On imbedding theorems for Sobolev spaces and some of their generalization, Publ. RIMS. Kyoto Univ. Ser. A 3(1968), 393-416.

[15] Rejto, P., On partly gentle perturbations III, J. Math. Anal. Appl. 27(1969), 21-67.

[17] Schechter, M., Essential spectra of elliptic partial differential equations, Richerche Mat. 16(1967), 3-26.