数理解析研究所講究録
第 92 巻 1970 年 98-109

プラズマの非線形横振動について

慶応義塾大学工学部
鬼頭史城

(1) 緒言 プラズマの非線形横振動に関して，且って

J. Enoch, Nonlinearized Theory of Transverse Plasma Oscillations (The Physics of Fluids, April, 1962)

という論文が出ている。今のこの報文では，J. Enoch の論文に対する補足事項を記したものである。すなわち

(イ) 任意波形の単一進行波 $\varphi(kx-\omega t)$ が存在し得るかどうかの問題

(ロ) 波形を定めない一般の場合に対する電場 $E_y(x,t)$ に対する非線形波動方程式

について記してある。広く文献をあさる便宜が得られないので，同じ趣旨のことが既に発表さ

れていないとも限らない。

(2) 記 号

f＝分布関数，$\boldsymbol{v}$＝粒子速度，$\mathbf{E}$＝電場の強さ，$\mathbf{B}$＝磁束密度（$\mathbf{H}$＝磁場の強さ），$\boldsymbol{r}(x, y, z)$＝粒子の位置（直角座標），e＝電子の荷電量，m＝陽子の質量，ρ＝場の荷電密度，$\mathbf{j}$＝場の電流密度

以下において，v_x, v_y, v_z に対する積分は，原則的には $-\infty$ から $+\infty$ まで行なうものとする。

(3) 基礎方程式

Maxwell-Boltzmann の方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{e}{m}\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = 0 \qquad \text{--(1)}$$

[衝突項は無視している。]

Maxwell の電磁方程式

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+4\pi\boldsymbol{j} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi\rho \end{aligned}\right\}\cdots(2)$$

荷電密度と電流密度

$$\left.\begin{aligned} \rho &= en-e\iiint f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t)\,d\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{j} &= -\frac{e}{c}\iiint \boldsymbol{v} f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t)\,d\boldsymbol{v} \end{aligned}\right\}(3)$$

以上は，ベクトル的に略記号で表わしてある。

(4) 問題の設定

(a) 分布関数 $f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$ は y, z に無関係，(b) $E_x\equiv 0$, $E_z\equiv 0$，とし E_y だけを考える。以上の仮定の下に方程式 (1) は

$$\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{e}{m}E_y\frac{\partial f}{\partial v_y}+v_x\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad (4)$$

となる。この (4) は f に対する第1階の偏微分方程式であり，その特性曲線の方程式は下記のごとくになる。

$$\frac{dt}{1} = \frac{dv_y}{\left[-\frac{e}{m}E_y(x,t)\right]} = \frac{dx}{v_x} \quad \cdots (5)$$

すなわち

$$\left.\begin{aligned} dx - v_x\,dt = 0 \\ \frac{e}{m}E_y(x,t)dt + dv_y = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots (6)$$

従って

$$\left.\begin{aligned} c_1 = x - v_x t \\ c_2 = v_y + \frac{e}{m}\int_0^t E_y(c_1 + v_x\tau, \tau)\,d\tau \end{aligned}\right\} (7)$$

$$f(x, t, v_x, v_y, v_z) = F(c_1, c_2, v_x, v_z) \quad \cdots (8)$$

$F(\cdots)$ は c_1, c_2, v_x, v_z の任意関数。Fの具体的の形は初期値（および境界條件）によってきまる。plasma の neutrality の條件は

$$\iiint f(x, t, v_x, v_y, v_z)\,d\boldsymbol{v} = n \quad (9)$$

これを F の項で書き表わせば

$$\iiint F(x-v_x t, v_y^*, v_x, v_z)\, dv_x\, dv_y^*\, dv_z$$
$$= n \qquad \text{---}(10)$$

便宜上下記の関数 $g(\cdots)$を導入する。

$$g(x-v_x t, t, v_x)$$
$$= \frac{1}{n}\iint F(x-v_x t, v_y^*, v_z)\, dv_y^*\, dv_z \qquad \text{----}(11)$$

条件式(10)より

$$\int g(x-v_x t, v_x)\, dv_x = 1 \qquad \text{---}(12)$$

この(12)式の右辺は x, t に無関係であるから、左辺も又そうであると推論される。故に以下において

$$g(x-v_x t, v_x) = g(v_x)$$

と書くものとする。

(5) 任意波形の進行波 $\varphi(kx-\omega t)$ の場合の検討

この目的に対して［$\sin(kx-\omega t)$ とおく代りに］

$$E_y(x,t) = \varphi'(kx-\omega t) \qquad \text{---}(13)$$

とおき，この値を (7) に代入すれば

$$C_2 = v_y + \frac{e}{m}\frac{\varphi(kx-\omega t)-\varphi\{k(x-v_x t)\}}{(kv_x-\omega)}$$

$$= v_y + S \qquad \text{---}(14)$$

となる。これに対して電流 j_y は

$$j_y = -\frac{e}{c}\iiint v_y F[x-v_x t, v_y+S, v_x, v_z]\cdot$$
$$\cdot dv_x\, dv_y\, dv_z$$

さらに

$$v_y^* = v_y + S$$

とおくと

$$\frac{\partial(v_x, v_y^*, v_z)}{\partial(v_x, v_y, v_z)} = 1$$

であるから

$$j_y = -\frac{e}{c}\iiint v_y^* F(x-v_x t, v_y^*, v_x, v_z)\cdot$$
$$\cdot dv_x\, dv_y^*\, dv_z$$
$$+\frac{e}{c}\iiint S F(x-v_x t, v_y^*, v_x, v_z)\cdot$$
$$\cdot dv_x\, dv_y^*\, dv_z \qquad \text{--}(15)$$

式 (15)の右辺の第2積分は，v_x については

$$(-\infty, \frac{\omega}{k}-\varepsilon), (\frac{\omega}{k}-\varepsilon, \frac{\omega}{k}+\varepsilon), (\frac{\omega}{k}+\varepsilon, +\infty)$$

の3段階に分け，あとで $\varepsilon \to 0$ とおく。その結果［PはCauchyの主値を意味するものとして］

$$j_y = -\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x-v_x t, v_x)\, dv_x$$

$$+\frac{e^2 n}{mc}\varphi(kx-\omega t)\, P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(v_x)}{kv_x-\omega}\, dv_x$$

$$-\frac{e^2 n}{mc} P\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\{k(x-v_x t)\}\frac{g(v_x)}{kv_x-\omega}\, dv_x \quad \text{---(16)}$$

ここで

$$G(x-v_x t, v_x) = \iint v_y F(x-v_x t, v_y, v_x, v_z)\cdot dv_y\, dv_z \quad (17)$$

電磁波の方程式は現在の場合には

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \dot{j}_y}{\partial t} \quad \text{---(18)}$$

となるが，(13)の値で計算すると

$$j_y = \frac{c}{4\pi}\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi''(kx-\omega t)\cdot\frac{1}{\omega} \quad \text{----(19)}$$

これを上記の(16)の j_y に等しいとおけば

$$\frac{1}{4\pi}\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\left(\frac{c}{\omega}\right)\varphi''(kx-\omega t)$$

$$= -\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x-v_x t, v_x)\, dv_x$$

$$+\frac{e^2 n}{mc}\varphi(kx-\omega t)\cdot P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(v_x)}{kv_x-\omega}dv_x$$

$$-\frac{e^2 n}{mc}P\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\{k(x-v_x t)\}\frac{g(v_x)}{kv_x-\omega}dv_x$$

---- (19a)

この (19a) の各項は $(kx-\omega t)$ の関数でなくてはならない。そこで

$$G = G_1 + G_2$$

且つ

$$G_1(x-v_x t, v_x) = A\delta\left(v_x-\frac{\omega}{k}\right)\varphi\{k(x-v_x t)\}$$

$$\frac{e}{c}G_2(x-v_x t, v_x) = -\frac{e^2 n}{mc}\varphi\{k(x-v_x t)\}\frac{g(v_x)}{kv_x-\omega}$$

とおき、積分はCauchyの主値をとるものとすると

$$\int_{-\infty}^{+\infty}G_1\,dv_x = A\varphi\left\{k\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)\right\} = A\varphi(kx-\omega t)$$

$$\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}G_2\,dv_x = -\frac{e^2 n}{mc}P\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\{k(x-v_x t)\}\cdot$$

$$\cdot\frac{g(v_x)}{kv_x-\omega}dv_x$$

であるから (19a) 式は

$$\frac{1}{4\pi}\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi''(kx-\omega t)\left(\frac{c}{\omega}\right)$$

$$
= -\frac{e}{c} A\varphi(kx-\omega t)
$$
$$
\boxed{+\frac{e^2 n}{mc}\varphi(kx-\omega t)\, P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(v_x)}{kv_x-\omega}\,dv_x} \quad (20)
$$

[11頁，注，参照]

となる。これは
$$
\varphi''(kx-\omega t) = B\varphi(kx-\omega t)
$$
のときだけ変数分離可能である。故に
$$
\varphi(\xi) = \sin\lambda\xi, \text{ 又は } \cos\lambda\xi
$$
の場合しかあり得ないことになる。

(6) 一般の非線形波動方程式

$E_y(x,t)$ の関数形に対して何も仮定しないものとする。

$$
\begin{cases} c_1 = x - v_x t \\ c_2 = v_y + \frac{e}{m}\int_0^t E(c_1 + v_x\tau, \tau)\,d\tau \\ \quad\; = v_y + S \end{cases}
$$

として
$$
v_y = v_y^* - S
$$
$$
S = \frac{e}{m}\int_0^t E(x - v_x t + v_x\tau, \tau)\,d\tau
$$
とおく。

電流 j_y に対して下記の値をとる。ここで、やはり

$$\frac{\partial(v_x, v_y^*, v_z)}{\partial(v_x, v_y, v_z)} = 1$$

であることに注意する。

$$j_y = -\frac{e}{c}\iiint v_y F(x - v_x t, v_y + S, v_x, v_z) \cdot dv_x dv_y dv_z$$

$$= -\frac{e}{c}\iiint v_y^* F(x - v_x t, v_y^*, v_x, v_z) \cdot dv_x dv_y^* dv_z$$

$$+ \frac{e}{c}\iiint S F(x - v_x t, v_y^*, v_x, v_z) \cdot dv_x dv_y^* dv_z$$

$$= -\frac{e}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} G(x - v_x t, v_x) dv_x$$

$$+ \frac{e}{cn}\int_{-\infty}^{+\infty} S\, g(x - v_x t, v_x) dv_x$$

すなわち

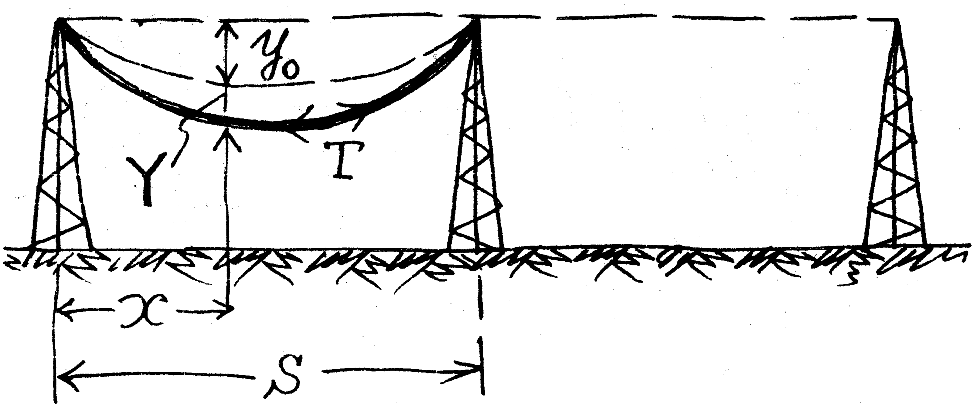
$$j_y = -\frac{e}{c} G_0(x, t)$$

$$+ \frac{e}{cn}\int_{-\infty}^{+\infty} g(v_x) dv_x \cdot \int_0^t E_y[x - v_x(t-\tau), \tau] d\tau \quad \text{—— (21)}$$

この値を波動(電磁)方程式 (18) に代入すれば

$E_y(x,t)$ に対し汎関数的波動方程式が得られる。G, g は分布関数 F の線形汎関数であり，式(18)+(21) は終局においては E に対する非線形の波動方程式となっている。

(7) 工学上における非線形波動方程式の例（送電線の電線の振動）



E＝弾性係数，A＝電線の断面積，T＝張力

$$T\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}-\frac{w}{g}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}=\frac{T-T_0}{T_0}w$$

$$T=T_0+\frac{AE}{2S}\int_0^S\left[\left\{\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial y_0}{\partial x}\right\}^2-\left(\frac{\partial y_0}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

w＝電線の重量／単位長さ。

［注］．p.9，(20)式において，$\boxed{\quad\quad}$ 内の項は $\int G_2\, dv_x$ と cancell されて，消失する。

参考文献

(1) W. F. Ames, Non-linear Partial Differential Equations in Engineering, 1965, Academic Press.

(2) T. L. Saaty, Moden Nonlinear Equations, 1967, McGraw-Hill Co.

(3) A. Jeffrey-T. Taniuti, Nonlinear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics, 1964, Academic Press.

(4) 鬼頭，工学における偏微分方程式の応用例，数理解析研究所講究録，**51**, 1968, 京都大学数理解析研究所.

〈以上〉