

ある縮退した拡散方程式系の解の 漸近的性質

京大・工 三村昌泰

§1. 序

ここでは次のような縮退した拡散系の初期値問題を半空間
 $t > 0$ において設定する。

$$(E_1) \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - d_1 u_1 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - d_3 u_2 u_4 + d_2 u_1 u_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = d_3 u_2 u_4 - d_2 u_1 u_3 \\ \frac{\partial u_4}{\partial t} = -d_1 u_1 u_4 - d_3 u_2 u_4 \end{cases} \quad (1)$$

初期条件

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = u_{10}(x) \geq 0 \\ u_2(x, 0) = u_{20}(x) \geq 0 \\ u_3(x, 0) = 0 \\ u_4(x, 0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 d_1, d_2, d_3 はすべて非負とする。

問題 (1), (2) 式がどのような物理現象を表現しているのか、
又その解の存在、一意性は保証されているかという問題はすでに
昨年この研究会で報告をしたので今回は問題 (1), (2) 式の
解の漸近挙動とその初期データにどのような関係が成り立
っているかを報告する。しかしここで得られる結果はまだそ
ののための一段階でしかなく、今後の研究が必要であることを
記して本論に入る。

§ 2. 準備

まず最初に次の定理をあげておく。

[定理. 1]

初期値問題 (1), (2) 式に対して非負の初期値 $u_{10}(x), u_{20}(x)$ が
 C^2 クラスに属していれば、非負の解が一意に存在する。

この定理を用いて、(1), (2) 式より次の 2 式を得る。

$$u_4(x, t) = e^{-d_1 \int_0^t u_1(x, \tau) d\tau - d_3 \int_0^t u_2(x, \tau) d\tau} \quad (3)$$

$$e^{-D \int_0^t u_1(x, \tau) d\tau} = u_3(x, t) + u_4(x, t) \leq e^{-d \int_0^t u_1(x, \tau) d\tau} \quad (4)$$

ただし $D = \max(d_1, d_2, d_3)$, $d = \min(d_1, d_2, d_3)$

同様に (1) 式より

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_3 - u_4) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(u_2 + u_3) = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

を得るから、両式を t に関して積分すれば次式を得る。

$$u_1(x, t) - [u_3(x, t) + u_4(x, t)] - u_{10}(x) + 1 = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, \tau) d\tau \quad (5)$$

$$u_2(x, t) + u_3(x, t) - u_{20}(x) = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, \tau) d\tau \quad (6)$$

又、(E₁) と係数だけ異なり、同じ初期値 (2) をもつ次のような系 (E₂), (E₃) を考える。

$$(E_2) \begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - d v_1 v_4 - d v_1 v_3 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - d v_2 v_4 + d v_1 v_3 \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} = D v_2 v_4 - D v_1 v_3 \\ \frac{\partial v_4}{\partial t} = -D v_1 v_4 - D v_2 v_4 \end{cases} \quad (7)$$

$$(E_3) \begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - D w_1 w_4 - D w_1 w_3 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - D w_2 w_4 + D w_1 w_3 \\ \frac{\partial w_3}{\partial t} = d w_2 w_4 - d w_1 w_3 \\ \frac{\partial w_4}{\partial t} = -d w_1 w_4 - d w_2 w_4 \end{cases} \quad (8)$$

§ 3. ここでは前に準備した (3) ~ (8) 式を用いて解の漸近挙動を調べる。^[1]

(i) $\lim_{t \rightarrow \infty} u_3(x, t)$ の考察

(4), (5) 式より

$$u_1(x, t) - e^{-\frac{d}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_1(x, t)}{\partial x^2}} - u_{10}(x) + 1 \leq \frac{\partial^2 \Gamma_1(x, t)}{\partial x^2} \leq u_1(x, t) - e^{-D \Gamma_1(x, t)} - u_{10}(x) + 1 \quad (9)$$

ただし $\Gamma_1(x, t) = \int_0^t u_1(x, \tau) d\tau, \quad u_1 \in C_x^2$

ここで $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_1(x, t) < +\infty$ の場合を考えよ。この時 $\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(x, t) = 0$ となるから、(9) 式において $t \rightarrow \infty$ とすれば、

$$-e^{-\frac{d}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_1(x)}{\partial x^2}} - u_{10}(x) + 1 \leq \frac{\partial^2 \Gamma_1(x)}{\partial x^2} \leq -e^{-D \Gamma_1(x)} - u_{10}(x) + 1 \quad (10)$$

を得る。ただし $\Gamma_1(x) = \int_0^{\infty} u_1(x, \tau) d\tau$

こうして点 x において $t \rightarrow \infty$ までに反応に参加した $u_1(x, t)$ の量と考えられる $\Gamma_1(x)$ は (10) 式の微分不等式を満たさなければならぬことがわかる。

ここで簡単な初期条件として、 $u_{10} \equiv \text{const.}, u_{20} \equiv \text{const.}$ の場合を考えよう。この時 $u_i(x, t)$ ($i=1, 2, 3, 4$) は x に関して定常となるから、(10) 式は簡単な不等式となる。

$$1 - e^{-\frac{d}{2} \Gamma_1} \leq u_{10} \leq 1 - e^{-D \Gamma_1} \quad (11)$$

それ故、次の事がわかる。

- $u_{10} > 1$ であれば、不等式 (11) 式を満たす U_1 が存在しない。
- $1 > u_{10} > 0$ であれば、不等式 (11) 式を満たす U_1 が存在する。

こうして、 $u_{10} > 1$ の時 $\lim_{t \rightarrow \infty} U_1(t) = \infty$ となることがわかる。×

(3), (4) 式より

$$e^{-D U_1(x,t)} - e^{-d_1 U_1(x,t) - d_3 U_2(x,t)} \leq u_3(x,t) \leq e^{-d U_1(x,t)} - e^{-d_1 U_1(x,t) - d_3 U_2(x,t)} \quad (12)$$

が得られるから、結局 $\lim_{t \rightarrow \infty} u_3(x,t) = 0$ が導かれる。

次に初期データ u_0 が const. でない場合を考える。

[補助定理 1]

同じ初期条件 u_0 をもつ (E_1) , (E_2) , (E_3) の解 $u(x,t)$, $v(x,t)$, $w(x,t)$ に関して次の不等式が成り立つ。

$$v_1(x,t) > u_1(x,t) > w_1(x,t) > 0 \quad (13)$$

$$w_3(x,t) + w_4(x,t) > u_3(x,t) + u_4(x,t) > v_3(x,t) + v_4(x,t) > 0.$$

又 (E_2) , (E_3) から次の 2 つの式をとりだすとこれらの式は独自の系として解くことができる。

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - d(v_4 + v_3)v_1, \\ \frac{\partial}{\partial t}(v_4 + v_3) = -D(v_4 + v_3)v_1, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - D(w_4 + w_3)w_1, \\ \frac{\partial}{\partial t}(w_4 + w_3) = -d(w_4 + w_3)w_1, \end{cases} \quad (15)$$

この時、(14)、(15)式は係数だけ異なる同じタイプの系であり、この系に対しては次の補助定理が成り立つ。

[補助定理2]

初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d'uw \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -d''uw \end{cases}$$

初期条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x)$$

と考える時、次の比較定理が成り立つ。

$$\begin{array}{l} \tilde{u}_0(x) \geq u_0(x) \geq 0 \\ w_0(x) \geq \tilde{w}_0(x) \geq 0 \end{array} \quad \text{ならば} \quad \begin{array}{l} \tilde{u}(x, t) \geq u(x, t) \geq 0 \\ w(x, t) \geq \tilde{w}(x, t) \geq 0 \end{array}$$

(E₁)の系について、const. な初期値の場合、 $u_{10} \gg 1$ であれば $\lim_{t \rightarrow \infty} V_1(t) = \infty$ となることがわかったが、(E₂)、(E₃)の系についても同様な結果が得られる。ie

$$\begin{array}{l} \bullet u_{10} \gg d/D \text{ であれば } \lim_{t \rightarrow \infty} V_1(t) = \infty \\ \bullet u_{10} \gg D/d \text{ であれば } \lim_{t \rightarrow \infty} W_1(t) = \infty \end{array} \quad (16)$$

ただし $V_1(t) = \int_0^t v_1(t) dt$, $W_1(t) = \int_0^t w_1(t) dt$

そこで $u_{10}(x) \gg D/d$ の const. でない初期値を考えると, 補助定理 2 の結果より,

$$v_1(x,t) \Big|_{u_{10}(x)} \gg v_1(t) \Big|_{D/d}, \quad w_1(x,t) \Big|_{u_{10}(x)} \gg w_1(t) \Big|_{D/d} \quad (17)$$

がわかり, (16) 式より,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(x,t) \Big|_{u_{10}(x)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w_1(x,t) \Big|_{u_{10}(x)} \rightarrow \infty$$

が得られる。故に補助定理 1 の結果より $\lim_{t \rightarrow \infty} U_1(x,t) \Big|_{u_{10}(x)} = \infty$ となり, 結局,

$$u_{10}(x) \gg D/d \text{ であれば } \lim_{t \rightarrow \infty} u_3(x,t) = 0 \text{ となる。}$$

次はいかなる $u_{10}(x)$ に対して微分不等式 (10) 式を満たす $U_1(x)$ が存在するかという問題を考える。(10) 式をそのまま取り扱うのは困難なのでここでは $d=D=d_0$ という特殊な場合を考える。この時 (10) 式は次のような非線形常微分方程式となる。

$$\frac{d^2 U_1}{dx^2} = -e^{-d_0 U_1} - u_{10}(x) + 1 \quad (18)$$

境界条件としては物理上の要請から次式を考える。

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi_1(x) = 0 \quad (19)$$

この時、次の定理が与えられる。

[定理. 2]

$u_{10}(x)$ が非負の compact supp. の函数であれば、境界値問題 (18), (19) 式は非負の解を唯一つ持つ。

$d = D$ 場合

それゆえ、上の定理より、 $u_{10}(x)$ が compact supp. の函数であることは $\lim_{t \rightarrow \infty} u_3(x, t) \neq 0$ となるための必要条件の一部であることがわかる。

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} u_4(x, t)$ の考察

ここでの話は (i) の場合とまったく平行に進められる。

$\lim_{t \rightarrow \infty} (\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)) < +\infty$ の場合を考える。この時

$\lim_{t \rightarrow \infty} (u_1(x, t) + u_2(x, t)) = 0$ となるから (6), (12) 式において $t \rightarrow \infty$ とすれば、

$$\begin{aligned} e^{-D\psi_1(x)} - e^{-d_1\psi_1(x) - d_2\psi_2(x)} - u_{20}(x) &\leq \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} \leq e^{-d\psi_1(x)} - \\ &- e^{-d_1\psi_1(x) - d_2\psi_2(x)} - u_{20}(x) \end{aligned} \quad (20)$$

ならば以前もとめた (10) 式

$$-e^{-d\psi_1(x)} - u_{10}(x) + 1 \leq \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} \leq -e^{-D\psi_1(x)} - u_{10}(x) + 1 \quad (11)$$

が得られる。これら2つの式に対して $u_{10} \equiv \text{const.}$, $u_{20} \equiv \text{const.}$ なる初期値を考えるならば、次のような不等式を得る。

$$e^{-D\Gamma_1} e^{-d_1\Gamma_1 - d_3\Gamma_2} \leq u_{20} \leq e^{-d\Gamma_1} e^{-d_1\Gamma_1 - d_3\Gamma_2} \quad (21)$$

$$1 - e^{-d\Gamma_1} \leq u_{10} \leq 1 - e^{-D\Gamma_1} \quad (11)$$

それゆえ、 $u_{10} \gg 1$. あるいは、 $u_{20} \gg (1 - u_{10})^{d/D}$ の場合には、(21)式かつ(11)式を満たす Γ_1, Γ_2 は存在しないことがわかる。そこでこの場合には、(3)式より $\lim_{t \rightarrow \infty} u_4(x, t) = 0$ を得る。

初期データ u が const. でない場合も同様に考えられる。

この時も(14), (15)式と同様な次の式を考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (v_1 + v_2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_1 + v_2) - d(v_1 + v_2)v_4 \\ \frac{\partial}{\partial t} v_4 = -D(v_1 + v_2)v_4 \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (w_1 + w_2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_1 + w_2) - D(w_1 + w_2)w_4 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_4 = -d(w_1 + w_2)w_4 \end{cases} \quad (23)$$

(22), (23)式に対しては補助定理.2が成り立ち、又補助定理.1に対応する次の補助定理が与えられる。

[補助定理, 3]

同じ初期条件 (2) をもつ (E_1) , (E_2) , (E_3) の解 $u(x, t)$, $v(x, t)$, $w(x, t)$ に関して次の不等式が成り立つ。

$$v_1(x, t) + v_2(x, t) \geq u_1(x, t) + u_2(x, t) \geq w_1(x, t) + w_2(x, t) \geq 0$$

$$w_4(x, t) \geq u_4(x, t) \geq v_4(x, t) \geq 0$$

(E_3) の場合, (20), (11) 式に対応する式は次のような微分方程式で与えられる。

$$\frac{d^2 W_2(x)}{dx^2} = \frac{D}{d} e^{-dW_1(x)} [1 - e^{-dW_2(x)}] - u_{20}(x) \quad (24)$$

$$\frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} = \frac{D}{d} (1 - e^{-dW_1(x)}) - u_{10}(x) \quad (25)$$

そこで, この場合, const. な初期値を考えると, $u_{10} \geq \frac{D}{d}$.

あるいは, $\frac{D}{d} > u_{10} \geq 0$ かつ $u_{20} \geq \frac{D}{d} (1 - \frac{d}{D} u_{10})$ であれば,

$\lim_{t \rightarrow \infty} (W_1(t) + W_2(t)) = \infty$ となる。こうして補助定理 2 より,

$u_{10}(x) \geq \frac{D}{d}$, あるいは, $\frac{D}{d} > u_{10}(x) \geq 0$, かつ $u_{20}(x) + u_{10}(x) \geq \frac{D}{d}$

であれば, $\lim_{t \rightarrow \infty} (W_1(x, t) + W_2(x, t)) = \infty$ となる。そして補助定

理 3 から $\lim_{t \rightarrow \infty} (L_1(x, t) + L_2(x, t)) = \infty$ となる。結局, (3) 式よ

り, $u_{20}(x) + u_{10}(x) \geq \frac{D}{d}$ であれば $\lim_{t \rightarrow \infty} u_4(x, t) = 0$ となる

ことがわかる。

こうして, 初期条件 (2) 式がいかなる場合に, $\lim_{t \rightarrow \infty} u_3(x, t) = 0$

あるいは $\lim_{t \rightarrow \infty} u_+(x, t) = 0$ となるかという問題は考察されたが、それ以外の場合はまだ判っていない。これらの問題が今後の課題である。

[参考文献]

- [1] I.M. Gelfand: Some Problems in the Theory of the Quasilinear Equations. *Uspehi. Mat. Nauk*, 14 (1959), no. 2 (86), 87-158.
- [2] 三村: 喘息患者血清中の抗原抗体反応について. 応用力学連合会講演論文集 (1969), 39-40.
- [3] M. Mimura: On the Cauchy Problem for a Simple Degenerate Diffusion System. *the Publ. of R.I.M.S.* vol. 5, No. 1 (1969) 11-20.