数理解析研究所講究録
第93巻 1970年 56-75

線形作用素の半群の滑らかさについて

東大 教養　　牛島照夫

§0. はじめに

バナッハ空間Xにおける線形作用素Aについて次のXに値をとる常微分方程式の初期値問題が考えられる：

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (t>0), \qquad x(0) = x \in X.$$

この問題に対応する解作用素T_tを次のコーシー積分：

(1) $$T_t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1}d\lambda$$

で構成しようとするのは自然であろう。ここでΓはAのスペクトルを囲む適当な積分路である。

さて，Xの有界作用素の半群：

$$\{T_t : T_t T_s = T_{t+s} \text{ for } t, s > 0\}$$

をその生成作用素Aのレゾルヴェント：$(\lambda - A)^{-1}$で，特徴づけることは，次の二つの典型的な場合がよく研究されている。

$$(C_0)\quad \left\{ \begin{array}{l} \{T_t\} \text{ は } t=0 \text{ で強連続である：} \\ s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} T_t x = x \quad \text{for } \forall x \in X. \end{array} \right.$$

$$(H)\quad \left\{ \begin{array}{l} \{T_t\} \text{ は，} (0,\infty) \text{ を含むある角領域} \\ \quad \Sigma = \{t : |\arg t| < \theta\} \\ \text{に解析的に拡張され任意の } \varepsilon > 0 \text{ につき} \\ \quad \Sigma' = \{t : |\arg t| \leqq \theta - \varepsilon,\ |t| \leqq 1\} \\ \text{で一様に有界である。} \end{array} \right.$$

半群 $\{T_t\}$ の生成作用素は，公式

$$Ax = s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(T_t x - x)$$

によって定義される。ただし右辺が収束するような元 x の全体を定義域とするのである。Hille, Yosida, Feller, Miyadera, Phillips 等の結果から C_0-半群の生成作用素 A は

$$(A_0)\quad \left\{ \begin{array}{l} A \text{ は稠密な定義域をもつ閉作用素で，ある実数 } \omega \\ \text{と正数 } C \text{ が存在して} \\ \quad \Lambda = \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda \geqq \omega\} \subset \rho(A)^{*)} \\ \text{であり，} \lambda \in \Lambda \text{ なら} \\ \quad \|(\lambda - A)^{-n}\| \leqq C(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{-n},\ (n = 1, 2, \cdots), \end{array} \right.$$

なる条件で特徴づけられる。又 C_0-半群が H-半群になるための一つの使い易い充分条件は，ある ω が存在して，全て

---

*) $\rho(A) = A$ のレゾルヴェント集合

$= \{\lambda$：有界な逆 $(\lambda - A)^{-1}$ が存在$\}$

の$\varepsilon > 0$について次の(A_H, ε)をみたすことである。（Kato[4]）。

$$(A_H, \varepsilon)\begin{cases} \Lambda = \{\lambda : |\arg(\lambda - \omega)| \leqq \frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon\} \\ \quad \subset \rho(A) \\ \text{であり，定数 } C = C_\varepsilon \text{ が存在して，} \lambda \in \Lambda \text{ なら，} \\ \|(\lambda - A)^{-1}\| \leqq C|\lambda|^{-1}. \end{cases}$$

なお，(H)におけるθと，(A_H, ε)におけるθとが異なっても良ければ，(A_H, ε)は，H－半群の必要条件でもある。（Yosida [11] 参照）.

ところで，クラスC_0とクラスHとの中間を考えると

問題1．$\{T_t\}$の$t > 0$における微分可能性。

問題2．$\{T_t\}$は微分可能として，$\frac{d}{dt}T_t = AT_t$の，

$t = 0$における特異性。

などに着目して分類することが考えられる。これから以後，簡単のためC_0半群のみを考える。まず，問題1であるが，$\{T_t\}$が，$t > 0$で強微分可能――全ての$x \in X$につき，$T_t x$はXの位相で微分可能――と仮定すると，実は，$\{T_t\}$は，有界作用素の作るバナッハ空間$L(X)$に値をとる関数として，$t > 0$で，作用素ノルムの意味で，無限回微分可能になることが，半群性からしたがう（Hille-Phillips [3]，Theorem 10.3.5）。そこでこのような半群を，

C^{∞}－半群と呼ぶことにする。すなわち，

$$(C^{\infty})\quad \left\{ \begin{array}{l} \{T_t\} \text{は，} L(X) \text{値関数として，} t>0 \text{で無限回} \\ \text{微分可能である。} \end{array} \right.$$

C^{∞}－半群の特徴づけは，Pazy［8］によって，すべての $\varepsilon>0$ について，次の条件（A_{∞}，ε）がなりたつこととして与えられている。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{実数} \delta=\delta_{\varepsilon} \text{と，正数} C=C_{\varepsilon} \text{が存在して} \\ \Lambda=\{\lambda=\xi+i\eta : \varepsilon\xi \geqq -\log|\eta|+\delta\} \subset \rho(A) \\ \text{であり，} \lambda\in\Lambda \text{なら} \\ \|(\lambda-A)^{-1}\| \leqq C|\lambda|. \end{array} \right.$$

問題２に関しては，§３で簡単に触れることにして，本稿では問題１について，（C^{∞}）と（H）との中間を埋める結果を報告する。（C^{∞}）を仮定した後の滑らかさのクラスとして，

（M）　準解析的でないジェブレクラス，

（M_{∞}）　準解析的なクラス，

（C^{ω}）　実解析的なクラス，

が考えられる。§１では，M－半群のレゾルヴェントによる特徴づけを与える。同時に M_{∞}－半群の生成作用素に対するある充分条件も得られる。§２では，その証明の概略を述べる。C^{ω}－半群については，Masuda［７］による特徴づけを§３で紹介する。

§1. 主な結果.

これから，$M=\{M_n : n=0,1,\cdots\}$ で対数的に凸な正の数列を表わすことにする：

(M.1) $\quad M_n^2 \leqq M_{n-1}M_{n+1}, \quad n=1,2,\cdots.$

このような数列 M に附随する関数 $M(u)$ を，

$$M(u)=\sup_{n\geqq 0}\log\left(u^n\frac{M_0}{M_n}\right) \quad \text{for } u\geqq 0$$

と定義する。さらに M が，

(M.2) $\quad \sum_{n=1}^{\infty}(M_{n-1}/M_n)<\infty$

をみたすとき，M を 非準解析的，上の和が無限大のとき，準解析的ということにする。よく使われる 次数 s のジェブレクラスは，

$$M=M_s=\{n^{ns} : n=0,1,\cdots\}$$

によって定められる。この M_s が，非準解析的なのは，$s>1$ のとき，およびそのときに限ってである。このとき

(2) $\quad s/e\cdot u^{1/s}-s \leqq M(u) \leqq s/e\cdot u^{1/s}$

と評価される。

さて，C_0—半群 $\{T_t\}$ が，クラス M であるとは，

(M) $\begin{cases} \{T_t\}\text{ は，}C^{\infty}\text{—半群であり，}0<a<b<\infty \\ \text{なる任意の }a,\ b\text{ について，ある正数 }h\text{ が存在して，} \\ \sup_{a\leqq t\leqq b,\ n\geqq 0}\left\|\dfrac{T_t^{(n)}}{h^nM_n}\right\|<\infty, \end{cases}$

をみたすこととする。

ここで C_0－半群の生成作用素に対する次の条件を考える。

(A.ε) 正数 $h = h_\varepsilon$ と実数 $\delta = \delta_\varepsilon$ と正数 $C = C_\varepsilon$ が存在して，

$$\Lambda = \{\lambda = \xi + i\eta : \varepsilon\xi \geq -M(\tfrac{|\lambda|}{h}) + \delta\} \subset \rho(A)$$

であり，$\lambda \in \Lambda$ ならば

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq C e^{\varepsilon|\xi|}.$$

我々の結果は，次のように言える。

__定理 1.__ 正数列 M は (M.1) および，

(M. 2′) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{M_n}{n M_{n-1}} = 0$，

をみたすとする。C_0－半群の生成作用素 A が，すべての $\varepsilon > 0$ につき，(A.ε) をみたすならば，$\{T_t\}$ は，クラス M である。

__定理 2.__ 正数列 M は，非準解析的であるとする。C_0－半群 $\{T_t\}$ が，クラス M であるならば，その生成作用素 A は，すべての $\varepsilon > 0$ につき，(A, ε) をみたす。

M が，非準解析的なときは，(M. 2′) は常にみたされるから，上の二つの定理の系として

系. 正数列Mは，非準解析的であるとする。C_0一半群が，クラスMであるための必要充分条件は，その生成作用素Aが，すべての$\varepsilon>0$につき$(A.\varepsilon)$をみたすことである。

ところで，正数列$M_s=\{n^{ns}\}$ $(s>1)$の場合は，評価(2)から全ての$\varepsilon>0$について$(A.\varepsilon)$がなりたつことは，全ての$\varepsilon>0$について次の条件(A_s,ε)がなりたつことと同値である。

(A_s,ε)
正数$\alpha=\alpha_\varepsilon$，実数$\beta=\beta_\varepsilon$，正数$C=C_\varepsilon$が存在して
$$\Lambda=\{\lambda=\xi+i\eta:\varepsilon\xi\geqq-\alpha|\eta|^{1/s}+\beta\}\subset\rho(A)$$
であり　$\lambda\in\Lambda$ならば
$$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqq Ce^{\varepsilon|\xi|}.$$

このことに注意すると，C_0一半群$\{T_t\}$が，クラスM_sであるための充分条件として

$(A_s)'$
正数α，実数β，正数Cが存在して
$$\Lambda=\{\lambda=\xi+i\eta:\varepsilon\xi\geqq-\alpha|\eta|^{1/s}+\beta\}\subset\rho(A)$$
であり　$\lambda\in\Lambda$ならば
$$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqq C,$$

$(A_s)''$ $\begin{cases} \text{実数}\xi_0\text{が存在して} \\ \displaystyle\lim_{|\eta|\to\infty}\sup |\eta|^{1/s}\|(\xi_0+i\eta-A)^{-1}\| < \infty, \end{cases}$

が，得られる。実際

$$(A_s)'' \Rightarrow (A_s)' \Rightarrow (A_s, \varepsilon),\ \forall\varepsilon>0$$

を容易に示すことができる。

簡単な例を挙げておこう。

1) $X = L^2(R^n)$, $A = i\Delta^2 + \Delta$ は $(A_2)'$ をみたす。

2) $X = L^2(R^1)\times L^2(R^1)$ で，

$$A\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1''\\u_1'''+u_2''\end{pmatrix}\left(u'' = \frac{d^2}{dx^2}u,\ u''' = \frac{d^3}{dx^3}u\right)$$

を考えると，$\mathrm{Re}\lambda > 0$ では，

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq C|\lambda|^{-\frac{1}{2}}$$

と評価できるから $(A_2)''$ をみたしている。

§2. 証明の概略.

定理1の証明には，(A, ε) がなりたつとき，積分(I)で T_t が構成できることを示す。ここで Γ は $|\lambda|$ が充分大きいとき

$$\varepsilon\xi = -M\left(\frac{|\lambda|}{h}\right) + \delta$$

で決められる積分路である。この積分路について必要な知識

は，次の補題にまとめられる。

補題 1.　1）正数列Mは(M.1)，(M.2')をみたすとする。(ξ, Y)を

$$\varepsilon\xi = -M\left(\frac{\sqrt{\xi^2+Y}}{h}\right) + \delta, \quad Y \geqq 0$$

をみたす点とする。このときあるαが存在して，$\xi \leqq \alpha$では関係(ξ, Y)が一価の強単調減少連続関数$Y(\xi)$を定める。

2）$\eta(\xi) \equiv Y(\xi)^{1/2}$とする。$\xi^{(n)}$を

$$\xi^{(n)2} + \eta^{(n)2} = h^2(M_n/M_{n-1})^2, \quad \eta^{(n)} = \eta(\xi^{(n)})$$

をみたす点とすると

$$\xi^{(n)} > \xi^{(n+1)} > \cdots\cdots \longrightarrow -\infty$$

であり，$\xi \neq \xi^{(n)}$では，$\eta(\xi)$は微分可能で，

$$\left|\frac{d\eta}{d\xi}\right| \leqq C|\lambda|^2 \quad (\lambda = \xi + i\eta(\xi))$$

をみたす。

証明．
$$m(u) \equiv \begin{cases} n & : M_n/M_{n-1} \leqq u < M_{n+1}/M_n \ (n \geqq 1) \\ 0 & : 0 \leqq u < M_1/M_0 \end{cases}$$

とおくと，

$$M(u) = \int_0^u \frac{m(r)}{r}\,dr$$

と表わせる(Roumieu[10])。この表現に注意して，初等的な考察を加えれば主張が得られる。

補題1から，C_0−半群の生成作用素Aが，$(A.\varepsilon)$をみたすならば，あるξ_0とωとが存在して

$$\Gamma^{\pm} \equiv \{\lambda = \xi \pm i\eta(\xi) : \xi \leq \xi_0\},$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{0} \equiv\ & \{\lambda = \xi + i\eta(\xi_0) : \xi_0 \leq \xi \leq \omega\} \\ & \cup \{\lambda = \omega + i\eta \quad : |\eta| \leq \eta(\xi_0)\} \\ & \cup \{\lambda = \xi - i\eta(\xi_0) : \xi_0 \leq \xi \leq \omega\},\end{aligned}$$

$$\Gamma \equiv \Gamma^{+} \cup \Gamma^{0} \cup \Gamma^{-}$$

とおくと，$\Gamma \subset \rho(A)$であることがわかる。これから

<u>命題 1.</u> C_0−半群の生成作用素Aが$(A.\varepsilon)$をみたすとき，上に定められたΓに対して積分

$$S_t \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

は，$t > 3\varepsilon$で$L(X)$値の無限回微分可能関数を定義しそこで一様に次の評価をみたす：

$$\sup_{n \geq 0} \left\| \frac{S_t^{(n)}}{h^n M_n} \right\| \leq C\left(e^{t\omega} + e^{t\frac{\delta}{\varepsilon}}\right).$$

証明. 形式的には

$$\frac{1}{h^n M_n} S_t^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\lambda^n}{h^n M_n} e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

である。$f_n(t,\lambda) = \dfrac{\lambda^n}{h^n M_n} e^{t\lambda}(\lambda - A)^{-1}$とおくと

$$\|f_n(t,\lambda)\| \leq \exp\left(t\xi + M\left(\frac{|\lambda|}{h}\right)\right)\|(\lambda - A)^{-1}\|$$

である。ここで

$$S_t = \int_{\Gamma^+} + \int_{\Gamma^0} + \int_{\Gamma^-} = S_t^{+} + S_t^{0} + S_t^{-}$$

と積分を分けて，それぞれの積分路の上での $\|(\lambda-A)^{-1}\|$ の評価を代入し，補題1での $\left|\frac{d\eta}{d\xi}\right|$ の評価を使えば，結論が得られる。

定理1の証明のためには，命題1で与えた S_t が，もとの T_t と $t>3\varepsilon$ では一致することを示せば充分である。これは $\|(\lambda-A)^{-1}\|$ の評価を使って，S_t を C^{∞}－半群に対する類似の表現に帰着させることによって示すことができる。

定理2の証明には，次の近似レゾルヴェントを使うのが，便利である。この方法は，Chazarain[1] に示唆されたものである。

今連続関数 $\varphi(t)$ が，

(Φ.1)　$\varphi(t)\geqq 0$,

(Φ.2)　$\mathrm{supp}(\varphi)\subset[\varepsilon/2,\ \varepsilon]$　$(\varepsilon>0)$.

(Φ.3)　$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt=1$,

をみたすものとする。$\psi(t)\equiv\int_t^{\infty}\varphi(t)\,dt$ とおくと

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & : t\leqq \varepsilon/2\\ 0 & : t\geqq \varepsilon\end{cases},\qquad \leqq\psi(t)\leqq 1$$

である。C_0－半群 $\{T_t\}$ に対して，積分

$$R_{\binom{\varphi}{\psi}}(\lambda)x=\int_0^{\infty}\binom{\varphi}{\psi}(t)e^{-\lambda t}T_t x\,dt$$

によって，有界作用素 $R_{\varphi}(\lambda)$，$R_{\psi}(\lambda)$ が定義される。

$R_\psi(\lambda)$ を近似レゾルヴェントと呼ぶ。その意味は次の補題で明らかになる。

補題 2. 任意の実数 ω について

$$\Lambda_\omega = \{\lambda = \xi + i\eta : \|R_\varphi(\lambda)\| \leqq \tfrac{1}{2},\ \xi \leqq \omega\} \subset \rho(A)$$

であり，ある定数 C が存在して，$\lambda \in \Lambda_\omega$ なら

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqq C e^{-\varepsilon\xi}.$$

証明　簡単な計算で，

$$(\lambda - A) R_\psi(\lambda) = 1 - R_\varphi(\lambda),$$

$$R_\psi(\lambda)(\lambda - A)x = x - R_\varphi(\lambda)x, \quad x \in D(A)$$

が示せる。このことから $\lambda \in \Lambda_\omega$ なら

$$(\lambda - A)^{-1} = (1 - R_\varphi(\lambda))^{-1} R_\psi(\lambda)$$

は有界作用素として確定し，さらに

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqq 2\,\|R_\psi(\lambda)\|。$$

$\|R_\psi(\lambda)\|$ の評価は容易である。

定理2の証明：Mが，非準解析的なときは，無限回微分可能な関数 φ で (Ⅲ.1)〜(Ⅲ.3) をみたし，かつある $k > 0$ に対して

$$\|\varphi\|_k = \sup_{\substack{n \geqq 0 \\ -\infty < t < \infty}} \left| \frac{\varphi^{(n)}(t)}{k^n M_n} \right| < \infty$$

をみたすものが存在する（Mandelbrojt [6]）。$\{T_t\}$ は
クラス M であるから、ある $l>0$ に対し、

$$\sup_{\substack{n\geq 0\\ \xi/2\leq t\leq \varepsilon}} \left\| \frac{T_t^{(n)}}{l^n M_n} \right\| = L < \infty$$

と仮定してよい。部分積分によって

$$\lambda^n R\varphi(\lambda) = \int_{\xi/2}^{\varepsilon} \lambda^n e^{-\lambda t}(\varphi(t)T_t)\,dt$$
$$= \int_{\xi/2}^{\varepsilon} e^{-\lambda t}\left(\frac{d}{dt}\right)^n(\varphi(t)T_t)\,dt$$

となる。条件（M.1）は、$M_jM_{n-j}\leq M_0M_n\ (0\leq j\leq n)$
を意味するから

$$\left\|\left(\frac{d}{dt}\right)^n(\varphi(t)T_t)\right\| \leq \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\|\varphi^{(j)}(t)\,T_t^{(n-j)}\|$$
$$\leq \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\|\varphi\|_k M_j k^j\, L M_{n-j}\, l^{n-j}$$
$$\leq \|\varphi\|_k L\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} k^j l^{n-j} M_0M_n$$
$$= LM_0M_n\|\varphi\|_k (k+l)^n$$

となる。ここで、$h=k+l$ とおくと

$$\left\|\frac{\lambda^n}{h^nM_n}R\varphi(\lambda)\right\| \leq LM_0\|\varphi\|_k\int_{\xi/2}^{\varepsilon} e^{-\xi t}\,dt$$

であるから、$\xi=\mathrm{Re}\,\lambda\leq\omega$ では、ある定数 C によって

$$\|R\varphi(\lambda)\|\leq C\frac{h^nM_n}{|\lambda|^n}e^{-\varepsilon\xi}$$

となる。したがって

$$\|R\varphi(\lambda)\|\leq C e^{-\varepsilon\xi}\inf_{n\geq 0}\frac{h^nM_n}{|\lambda|^n}$$
$$= C\exp\left(-\varepsilon\xi - M\left(\frac{|\lambda|}{h}\right)\right)。$$

したがって適当に δ をとると

$$2\|R\varphi(\lambda)\| \leq \exp\left(-\varepsilon\xi - M\left(\frac{|\lambda|}{h}\right)+\delta\right)。$$

これから、

$$\Lambda' = \{\lambda = \xi + i\eta : \varepsilon\xi \geqq -M(\tfrac{|\lambda|}{\varepsilon}) + \delta,\ \xi \leq \omega\}$$

とおくと、補題2から $\Lambda' \subset \rho(A)$ であり、かつ $\lambda \in \Lambda'$ なら

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqq Ce^{-\varepsilon\xi}$$

である。これと 条件(A_0)とを組み合わせれば、定理の主張が得られる。

§3. 幾つかの注意.

1) §1でのべた定理では、$\{T_t\}$は最初からC_0-半群としたが、この仮定は少しゆるめることができる。たとえば、すべての $x \in X$ につき、次の2条件をみたす半群 —— クラス$(0, C_1)$ と呼ばれる (Hille Phillips[3]) —— であれば、充分である。

(I)$_0$ $\int_0^1 \|T_t x\| dt < \infty$.

(C_1) $s - \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_0^t T_s x\, ds = x$.

2) 実解析性: $\{T_t\}$が $t > 0$ で実解析的なとき、T_t は $(0, \infty)$ を含むある領域Ωに解析的に拡張できるが、その領域について次の主張ができる。

補題 3. $\{T_t\}$ が $t>0$ で実解析的なことは，すべての $\varepsilon>0$ について次の条件 $(T.\varepsilon)$ がなりたつことと同値である。

$$(T.\varepsilon)\begin{cases} \text{ある } \theta=\theta_\varepsilon \text{ が存在して，} T_t \text{ は角領域} \\ \quad \Sigma=\{t:\ |\arg(t-\varepsilon)|<\theta\} \\ \text{に解析的に拡張される。} \end{cases}$$

証明　すべての $\varepsilon>0$ につき $(T.\varepsilon)$ がなりたつことが，$\{T_t\}$ の実解析性にとって充分なことは明らか。ところが，Hille-Phillips [3] の Theorems 17.2.2, 8.7.9. によれば，ある $\tilde{\theta}$ と R が存在して，

$$\{t:\ |\arg t|\leq\tilde{\theta},\ |t|\geq R\}\subset\Omega$$

であることが，実解析的な半群 $\{T_t\}$ について言える。一方半群性により，$t=\varepsilon$ のときの T_t の収束半径を ρ_ε とすると，$\varepsilon<\varepsilon'$ ならば，$\rho_\varepsilon\leq\rho_{\varepsilon'}$ である。この二つの事実から，$(T.\varepsilon)$ が必要であることがしたがう。

条件 $(T.\varepsilon)$ の特徴づけは，Masuda [7] が次のように与えている。

定理 3. $(T.\varepsilon)$ は，次の $(A\omega,\varepsilon)$ と同値である。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{任意の } \varepsilon' > \varepsilon \text{ に対してある } C_{\varepsilon'} \text{ と } \omega_{\varepsilon'} \text{ が存在して} \\ \quad \Lambda = \{\lambda : |\arg(\lambda - \omega_{\varepsilon'})| < \frac{\pi}{2} + \theta - (\varepsilon' - \varepsilon)\} \\ \qquad \subset \rho(A) \\ \text{であり，} \lambda \in \Lambda \text{ ならば} \\ \quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq C_{\varepsilon'} e^{\varepsilon' |\xi|} \text{。}\end{array}\right.$$

3) $T_t^{(n)}$ の $t=0$ における特異性： 条件 $(A_s)'$ 又は $(A_s)''$ をみたす場合は，$t=0$ の近くでの $\|T_t^{(n)}\|$ の挙動を評価することができる。$(A_s)'$ ならば，$t \to 0$ のとき

$$\|T_t^{(n)}\| = O(t^{-s(n+1)})$$

であり，$(A_s)''$ ならば

$$\|T_t^{(n)}\| = O(t^{1-s(n+1)})$$

となる。これらの評価を得るには，$|\lambda| \longrightarrow \infty$ のとき，

$$\xi = -\alpha|\eta|^{1/s} + \beta$$

をみたすように積分路 Γ をとっても積分 (1) が T_t を表わすことを使えばよい。 この評価は，Krein [5] にも述べてある。又 Poulsen [9] も類似の結果をのべている。Crandall - Pazy [2] では，

$$\|AT_t\| = O(t^{-s}) \Rightarrow (A_s)'' ,$$

$$(A_s)'' \Rightarrow \|AT_t\| = O(t^{1-2s})$$

という包含関係が述べられている。才一の関係は新しい結

果のように講演者には思われる。

4) §1の最後に挙げた例2においては，Aはクラス(C_0)の半群の生成作用素ではない。しかし，AはLionsが[13]で定義した超函数的半群Tの生成作用素になっている。さらに，§3の命題1で構成したS_tは，$t>3\varepsilon$におけるTの表現になっていることは容易に確かめることができる。すなわち，$\varphi\in C_0^\infty$かつ$supp(\varphi)\subset(3\varepsilon,\infty)$なる$\varphi$に対して

$$T(\varphi)x=\int_0^\infty\varphi(t)S_t x\,dt$$

がなりたっている。超函数的半群の$t>0$における滑らかさの議論は，本稿の議論と平行して論じることができる。例えば，$t>0$で，クラス(M)である表現をもつ超函数的半群Tの生成作用素Aは，次のように特徴づけられる。ただし，Mは(M.1)，(M.2)をみたすものとする。

ある整数$n\geqq 0$が存在して，すべての$\varepsilon>0$に対して，

$(A.\varepsilon)'$
- 正数$h=h_\varepsilon$と実数$\delta=\delta_\varepsilon$と正数$C=C_\varepsilon$が存在して，
- $\Lambda=\{\lambda=\xi+i\eta:\varepsilon\xi\geqq -M(\frac{|\lambda|}{h})+\delta\}\subset\rho(A)$
- であり，$\lambda\in\Lambda$ならば
- $\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqq C|\lambda|^n e^{\varepsilon|\xi|}$

がなりたつ。

最近，Barbuは，[12]において，超函数的半群の滑らか

さの特徴づけを与えた。彼が，数列 $\{M_n\}$ に課した条件は，我々のそれよりも幾分強いものであり，結果の表現も本稿でのべた形のものとは多少異なっているが，本質的な相違は無い。なお，$t>0$ で与えられた強連続的な半群 $\{T_t\}_{t>0}$ が，何時，超函数的半群になるかについては，講演者が，Ushijima [14] で述べる予定である。

References.

[1] Chazarain, J. Problems de Cauchy au sens des distributions vectorielles et applications, C. R. Acad. Sc. Paris, 266(1968), 10-13.

[2] Crandall, M. G. & Pazy, A. On the differentiability of weak solution of a differential equation in Banach space, J. Math. Mech. 18(1969), 1007-1016.

[3] Hille, E. & Phillips, R. S. Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31(1957).

[4] Kato, T. Perturbation theory for linear operators, Springer, (1966)

[5] Krein, S. G. Linear differential equations in Banach spaces, (in Russian), Nauka, (1967).

[6] Mandelbrojt, S. Functions entieres et transformées de Fourier Applications, Publ. Math. Soc. Japan, (1967).

[7] Masuda, K. On the holomorphic semi-group, (pre-print).

[8] Pazy, A. On the differentiability and compactness of semi-groups of linear operators, J. Mathe. Mech., 17(1968) 1131-1141.

[9] Poulsen, E. T. Evolutionsgleichungen in Banach-Räumes, Math. Zeitschr. 90(1965), 286-309.

[10] Roumieu, C. Sur quelques extensions de la notion de distribution, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 77(1960), 47-127.

[11] Yosida, K. Functional Analysis, Springer, (1965).

[12] Barbu, V. Differentiable distribution semi-groups, Annali della Scuola Norm. Sup. 23, 413-429(1969).

[13] Lions, J. L. Les semi-groupes distributions, Portugal Math., 19, 141-164(1960).

[14] Ushijima, T. On the strong continuity of distribution semi-groups, (to appear).