数理解析研究所講究録
第 96 巻 1970 年 1-13

Derivation と point derivation について

東教大・理　神保敏弥

§1. 序

Topological algebra 上の微分と点微分についての主な問題は、次の事を調べることである：

① 0でない（有界）微分や（有界）点微分が、それぞれ存在するための必要十分条件、

② 微分又は点微分が、それぞれ有界微分や有界点微分となるための必要十分条件。

①、②について、Banach algebra や有理関数の algebra R(X) に対して、多くの興味ある結果が得られている。さらに、Banach algebra から順次他の topological algebra への拡張が、試みられている。ここでの目的は、これらを簡潔に紹介することである。

§2. 定義と記号

定義1. A : <u>topological algebra</u>

$\Leftrightarrow$ A : ① 複素線形位相空間, ② 単位元をもつ可換多元環

③ 双線形写像 $(x, y) \longrightarrow xy$ が, 各個連続.

A, B を topological algebras とするとき,

$H(A,B) \equiv \{h \mid h$ は A から B の上への algebra 準同形$\}$,

$H_c(A,B) \equiv \{h \in H(A,B) \mid h$ は連続$\}$ とする.

$S(A) \equiv H(A, \mathbb{C})$ は, A の spectrum と言う. $S_c(A) \equiv H_c(A, \mathbb{C})$

M_A : A の maximal ideals の space.

rad(A) : A のすべての maximal ideals の共通部分.

A^{-1} : A の可逆元の集合. $x \in A$, $h \in S(A)$ に対して,

$\hat{x}(h) \equiv h(x)$ で $\hat{x}$ を定める. $\hat{A} \equiv \{\hat{x} \mid x \in A\}$.

$S(A)$ の位相は、Gelfand 位相とする.

X を位相空間とするとき,

$F(X)$: X 上のすべての複素数値関数の algebra,

$B(X)$: X 上のすべての複素数値有界関数の algebra,

$C(X)$: X 上のすべての複素数値連続関数の algebra.

X を複素平面 $\mathbb{C}$ の compact set とするとき,

$R(X)$: X 上に極を持たぬすべての有理関数の algebra $R_0(X)$ の X 上の uniform closure,

$A(X)$: X 上で連続, X^0 上で analytic なすべての関数の algebra.

定義2. $B' < B$, $h \in H(A, B')$ に対して,写像 $D : A \longrightarrow B$ が $\underline{h\text{-微分}}$ $\Leftrightarrow$ D : ① 線形写像,

② $D(xy) = h(x)Dy + h(y)Dx$, $\forall x, y \in A$.

写像 $D : A \longrightarrow B$ が $\underline{h\text{-連続微分}}$

$\Leftrightarrow$ D : ① h-微分, ② 連続.

線形写像 D が有界のときは,$\underline{h\text{-有界微分}}$ともいう.

$\mathcal{D}(A, B, h) \equiv \{D \mid D \text{は} h\text{-微分}\}$

$\mathcal{D}_c(A, B, h) \equiv \{D \mid D \text{は} h\text{-連続微分}\}$. h が,恒等写像 id や Gelfand map $\wedge$ のとき,$\mathcal{D}(A, A, id)$, $\mathcal{D}(A, B, \wedge)$†) の元を単に微分といい,$\mathcal{D}(A, A)$, $\mathcal{D}(A, B)$ とそれぞれかく.同様に連続のとき,単に連続(又は有界)微分といい,$\mathcal{D}_c(A, A)$, $\mathcal{D}_c(A, B)$ とかく.特に,$h \in S(A)$, $B = \mathbb{C}$ のとき,$\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, h)$ の元を h での点微分,$\mathcal{D}_c(A, \mathbb{C}, h)$ の元を,h での連続(又は有界)点微分という.

†) ここでは $B \supset \hat{A}$ とする.

§3. 微分

定理1. (Singer と Wermer[1]) A : 可換Banach algebra.

$D \in \mathcal{D}_c(A, A) \Rightarrow D(A) < rad(A)$.

特に,A : semi-simple $\Rightarrow$ $D = 0$.

証明. $\phi \in S(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathfrak{A}$ に対して,$\psi_\lambda(x) \equiv \phi(e^{\lambda D}(x))$ とすると,$\psi_\lambda \in S(A) = S_c(A)$ から,関数論の Liouville の定理を

用いて，$\phi(Dx)=0$. $\therefore Dx \in rad(A)$.

系1．($\check{S}$ilov) 区間$[a,b]$上での無限階微分可能なすべての複素数値関数の algebra $C^{\infty}[a,b]$ を，Banach algebra とする norm は，存在しない．

系2．定理1の結論は，hが同形連続ならば，h-有界微分でも成立する．

次の定理は，微分が，有界微分と有限個の非有界点微分の和であることを，示している．

定理2．(Curtis [5]). A：単位元をもち regular，可換，semi-simple Banach algebra. $D\in\mathcal{D}(A, B(S(A)))$.
$\Longrightarrow$ 次の条件を満たす有限集合$E\subset S(A)$と$D_1\in\mathcal{D}_c(A, B(S(A)))$が存在する：① $D_2\equiv D-D_1$とすると，$D_2x(\phi)=0, \forall x\in A$, $\phi\in S(A)-E$，② $\phi\in E$に対しては，$f_\phi(x)\equiv D_2x(\phi)$は，非有界点微分である。

証明．次の Bade と Curtis [3]の結果が有効な手段である：
『$\|\ \|_1$ ：Aを normed algebra とする一つの norm
$\mathcal{G}\equiv\{G\subset S(A) \mid G$は open，$carr(\hat{x})\subset G$なるすべての$x\in A$に対して，$\|x\|_1\leqq M_G\|x\|$なる定数$M_G$が，存在する$\}$
$\Longrightarrow$ 次の1)，2)を満たす有限集合Fが存在する： 1) Gが open，$\overline{G}\cap F=\emptyset \rightarrow G\in\mathcal{G}$，2) $G\in\mathcal{G}\rightarrow G\cap F=\emptyset$』.

さて，今 $\|x\|_1 \equiv \|x\| + \|Dx\|_\infty$，ここで $\|\ \|_\infty$ は sup-norm とする．$E \equiv F$．$\phi \notin E$ に対し，$f_\phi(x) \equiv Dx(\phi)$ は，uniform boundedness の原理を用いて，有界線形汎関数であることがわかる．$E \neq \Phi$，D が非有界のとき $D_1x(\phi) \equiv Dx(\phi), \forall\phi \notin E$，$\equiv 0, \forall\phi \in E$，で D_1 を定めると，有界となり $D_2 = D - D_1$.

系．[5]．A は定理２と同じ $\Rightarrow \mathcal{D}(A, C(S(A))) \equiv \mathcal{D}_c(A, C(S(A)))$.

次の定理は，下記の topological algebra $\mathfrak{A}$ においては，定理２の regularity の条件が，不要な事を示している．

$\mathfrak{A}$：① 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の可換 algebra，② 距離づけ可能な完備局所凸位相空間，③ 乗法が連続，④ 単位元（1 とかく）を含む，⑤ $\mathfrak{A}^{-1}$ は 1 の近傍，⑥，②と⑤については，$\mathfrak{A}$ の位相は semi-norm の列 $\{\|\ \|_i\}$ によって与えられ，

$\|x - 1\|_1 < 1,\ x \in \mathfrak{A} \longrightarrow x \in \mathfrak{A}^{-1}$ とする．

$\Phi \equiv \{\phi \in S(\mathfrak{A}) \mid |\phi(x)| \leq \|x\|_1, \forall x \in \mathfrak{A}\}$.

定理３．（Johnson [9]）$\mathfrak{A}$ と Φ は上記のものとする．

Φ は $\mathfrak{A}$ の点を分離 $\Longrightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{A}, \hat{\mathfrak{A}}) = \mathcal{D}_c(\mathfrak{A}, \hat{\mathfrak{A}})$.

証明．次の Lemma [9] が有効である：『$D \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}, F(\Phi))$，無限個の $\phi_1, \phi_2, \cdots \in \Phi$ に対して $x \longrightarrow Dx(\phi)$ が不連続 $\Longrightarrow$ $Dx \notin B(\Phi)$ となる $x \in \mathfrak{A}$ が存在する』．さて $Dx \in B(\Phi)$ より $x \rightarrow Dx(\phi)$ は，$\phi \neq \phi_1, \cdots, \phi_n$ で有界．計算で，$\phi_1, \cdots \phi_n$ でも有界となり，closed graph theorem

を用いて，Dは連続となる．

定理4．(Johnson [9])．A：単位元をもつ可換Banach algebra．$C(S(A))$は，点別収束より強い局所凸距離づけ可能な位相をもつ．$D\in\mathcal{D}(A,C(S(A)))$．

$\Longrightarrow$ 次の条件を満たす直交巾等元$e_0,e_1,\cdots,e_n\in A$が存在する：1) $e_0+\cdots+e_n=1$，2) $D|e_0A$は連続，3) 各algebra e_iA, $i=1,\cdots,n$, は一意の maximal ideal をもつ．

証明．前のLemmaより，$x\longrightarrow Dx(\phi)$の不連続な点を，$\phi_1,\cdots,\phi_n$とし，この中での孤立点を，$\psi_1,\cdots\psi_k$とすると，Šilovの定理から，$\exists\, e_i\in A$で$\psi_i(e_i)=1$, $\phi(e_i)=0$, ${}^\forall\phi\neq\psi_i$．$e_ie_j=0$ $(i\neq j)$となるので，1)は$e_0\equiv 1-(e_1+\cdots+e_k)$とすればよい．2)は，$e_0A\ni x_i\longrightarrow 0$, $Dx_i\longrightarrow y$ $\Rightarrow$ $y=0$を$De_i=0$とyの連続性によって言い，故にclosed graph theoremよりわかる．3)は，明らか

§4．点微分

Banach algebraの場合，次の定理は，点微分存在の必要十分条件として，よく知られている．証明は，Hahn-Banachの定理を用いる．

定理5．A：単位元をもつ可換Banach algebra，$\phi\in S(A)$とすると，

$\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi) \neq \{0\} \iff \ker\phi \neq (\ker\phi)^2$

$\mathcal{D}_c(A, \mathbb{C}, \phi) \neq \{0\} \iff \ker\phi \neq \overline{(\ker\phi)^2}$.

さて，function algebra について考える．

A : X 上の function algebra .

$x \in X$ に対して，$\phi_x(f) \equiv f(x)$, $\forall f \in A$.

X に，metric topology を $\|x - y\| \equiv \|\phi_x - \phi_y\|$ で入れる．

次の定理は，単位元をもつ Banach algebra のときも，成立するが，定理の逆は，正しくない．

定理 6. (Browder [12]) A : X 上の function algebra $x \in X$ は，上の metric topology で，孤立点でない

$\Longrightarrow \mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\}$

証明．対偶を示す．$\ker\phi_x = (\ker\phi_x)^2$ とする．

$K \equiv \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i g_i \mid f_i, g_i \in \ker\phi_x$，$n$ は任意正整数，

$\lambda_i \in \mathbb{C}$，$\|f_i\| = \|g_i\| = 1$，$\sum|\lambda_i| \leqq 1 \}$.

$\ker\phi_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} nK$ より，Baire category theorem を用いて，$\overline{K}$ が，0 の近傍となるので，$\psi \in M^*$ に対して，$C\|\psi\| \leqq \sup\{|\psi(f)| : f \in K\}$ なる $C > 0$ が，存在する．ψ が，かつ乗法的，$\neq 0$ ならば $\|\psi\| \geqq C$ となる．特に，ある $y \in X$ に対して，$\psi = \phi_y$ かつ $x \neq y$ ならば $\|\psi\| \leqq \|x - y\|$ より $\|x - y\| \geqq C$.

次の定理は，$x \in X$ が peak sets の共通部分でもよい．

定理7.（cf [12], [16]） A : X上の function algebra
$x \in X$: peak point $\Rightarrow \mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi_x) = \{0\}$.

証明. $\ker \phi_x$ は approximate identity をもつので,
Cohen の分解定理 [10] から, $\ker \phi_x = (\ker \phi_x)^2$ となる.

又, 単位元をもつ可換 Banach algebra A の $\ker \phi$ が,
approximate identity をもつならば, $\mathcal{D}(A, \mathbb{C}, \phi) = \{0\}$.

さて, Gleason part との関連をみる.
Wermer は Dirichlet algebra, Hoffman は log-modular algebra, さらに Lumer は function algebra で $\phi \in S(A)$ が unique representing measure をもつとき, それぞれ ϕ を含む Gleason part[†] は, ϕ のみか, ϕ での analytic disc からなることを示した.

Sidney は, これに有界点微分を結びつけた.

†) $P_\phi \equiv \{ \psi \in S(A) \mid \| \psi - \phi \| < 2 \}$.

定理8.（Sidney） A : X上の function algebra
$\phi \in S(A)$ は unique representing measure をもつ.
$\Rightarrow$ 1) $P_\phi = \{\phi\}$, あるいは, 2) 次の条件を満たす単位開円板から P_ϕ (metric topology は A^* で‥) の上への位相同形な写像 π が存在する: $\hat{f} \circ \pi$ ($\forall f \in A$) が正則, $\pi(0) = \phi$.
そして 1) のとき, $\ker \phi = \overline{(\ker \phi)^2}$,
2) のとき, $\overline{(\ker \phi)^n} / \overline{(\ker \phi)^{n+1}}$ は一次元である, $n \geq 0$.

次に $R(X)$ についての点微分を考える.

定理9.（Browder [12]） $x \in X$.

$\mathcal{D}(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \Longleftrightarrow x$ は $R(X)$ の Choque 境界点でない.

証明. 定理6と「norm topologyで孤立点は Choque 境界点である」と [11] の定理から得られる.

系.[12] $R(X) = C(X) \Longleftrightarrow \mathcal{D}(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) = \{0\}$, $^\forall x \in X$.

Swiss cheese に関しては, $R(X) \neq C(X)$ で, 0 でない有界点微をもたぬ $R(X)$ の例として, Wermer [13] は, ある Swiss cheese を作った. 点微分存在の十分条件は 次のものである.

定理10.（Browder） X : 中心 a_i, 半径 r_i の開円板 D_i, $i=1, 2, \cdots$ を取り除いた Swiss cheese. $z \in X$, $z \notin \partial D_i$, $i=1,2,\cdots$, $|z| \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{|z-a_i|^2} < \infty$

$\Longrightarrow \mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_z) \neq \{0\}$.

証明 「$\mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \exists k$（定数）で $|f'(x)| \leqq k \cdot \|f\|$, $^\forall f \in R_c(X)$ となる」であるので, Cauchy の公式を用いて $f'(x)$ を評価すればよい.

さて analytic capacity を用いて $R(X)$ の有界点微分の存在の必要十分条件を表わせる. 次の定理は Melnikov の結果の analogue とのことである.

S^2 : Riemann sphere

$\Delta(x,r) \equiv \{ z \in \mathbb{C} : |z-x| \leqq r \}$

$A_n(x) \equiv \{ z \in \mathbb{C} : 1/2^{n+1} \leqq |z-x| \leqq 1/2^n \}$

$\sqcup \subset \mathbb{C}$：有界平面集合

$\mathcal{H}(\sqcup)$：次の条件を満たす関数全体：$\sqcup$のある compact subset 以外で analytic，絶対値1以下，∞で0をとる．

$\mathfrak{A}(\sqcup) \equiv \{ f \in \mathcal{H}(\sqcup) \cap C(S^2) \mid \|f\| \leqq 1 \}$

$\gamma(\sqcup) \equiv \sup \{ |f'(\infty)| : f \in \mathcal{H}(\sqcup) \}$

$\alpha(\sqcup) \equiv \sup \{ |f'(\infty)| : f \in \mathfrak{A}(\sqcup) \}$，ここで $f'(\infty) = \lim_{z\to\infty} zf(z)$．$\gamma(\sqcup)$, $\alpha(\sqcup)$をそれぞれ analytic capacity, continuous analytic capacity と言う．

定理11．(Hallstrom [15])　$x \in X$,

$\mathcal{D}_c(R(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \gamma(A_n(x) \setminus X) < \infty$,

$\mathcal{D}_c(A(X), \mathbb{C}, \phi_x) \neq \{0\} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \alpha(A_n(x) \setminus X^\circ) < \infty$.

証明．略．

次の定理は，$R(X)$の order n の有界点微分の存在するための必要十分条件で analytic capacity を用いての結果は [15] にみられる．

正整数nに対して，$x \in X$での $R(X)$上の order n の有界点微分が存在するとは，次のときを言う：

${}^\forall f \in R_0(X)$に対して，$|f^{(n)}(x)| \leqq k \|f\|$ なる定数kが存在する．

定理12.（Wilken[17]）$x \in X$ で order $n \geq 1$ の $R(X)$ 上の0でない有界点微分が存在する $\Longleftrightarrow$ 次の条件を満たす（complex）representing measure μ_x が，存在する：

$$\int d|\mu_x|(z) \Big/ |z-x|^n < \infty .$$

参 考 文 献

Derivation ;

[1] Singer I. M. and J. Wermer, Derivations on commutative normed algebras, 129 (1955), 260-264.

[2] Kaplansky I., Derivations of Banach algebras, in Seminars on analytic functions, Vol 2, Princeton Univ Press, 1958.

[3] Bade W. G. and P. C. Curtis, Jr., Homomorphisms of commutative Banach algebras,. Amer. J. Math. 82 (1960), 589-608.

[4] Rickart C. E. General Theory of Banach algebras, Van Nostrand, New York, 1960.

[5] Curtis P. C., Jr., Derivations of commutative Banach algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961),

271 – 273

[6] Rosenfeld M. Commutative F-algebras, Pacif. J. Math. 16 (1966), 159–166.

[7] Johnson E. and A. M. Singer, Continuity of derivations and a problem of Kaplansky, Amer. J. Math. 90 (1968), 1067–1073.

[8] Sinclair A. M. Continuous derivations on Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 166–170.

[9] Johnson B. E. Continuity of derivations on commutative algebras, Amer. J. Math. 91 (1969), 1–10.

Point derivation;

[10] Cohen P. J. Factorization in group algebras, Duke Math. J. 26 (1959), 199–206.

[11] Curtis P. C., Jr and Figá-Talamanca, A. Factorization theorems for Banach algebras, in "Function Algebras", pp 169–185. Scott Foreman, 1966.

[12] Browder A. Point derivations on function algebras, J. Functional analysis 1 (1967), 22–27.

[13] Wermer J., Bounded point derivations on certain Banach algebras, J. Functional Analysis 1 (1967) 28−36.

[14] Sidney S. J., Point derivations in certain sup-norm algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968) 119−127.

[15] Hallstrom A.P., On ~~bounded~~ point derivations and analytic capacity, J. Functional Analysis 4 (1969), 153−165.

[16] Browder A., Introduction to Function Alogebras, WA. Benjamin, INC, 1969, 63−78.

[17] Wilken D.R., Bounded point derivations and representing measures on R(X), Proc. Amer Math. Soc. 24 (1970), 371−373.