数理解析研究所講究録
第 96 巻 1970 年 81-96

Interpolation set と peak set

早大 教育 和田淳藏

§1. 序

複素平面上の単位円の Lebesgue measure 0 の閉部分集合の上で定義された任意の複素値連続関数は、単位閉円板上で連続でかつその内部（単位開円板）上で解析的な一つの関数に拡張されうるという、いわゆる Rudin-Carleson の定理（[23], [8]）に端を発して研究されてきた Interpolation set の問題は Glicksberg [13] が一般の function algebra における interpolation set の characterization を行ない、また Dirichlet algebra の場合に、interpolation set になる必要かつ十分条件を出してから "interpolation set" が function algebra において重要な位置を占めるようになった。その後 logmodular algebra またはそれより広い function algebra の class において interpolation set の研究が行われ（Hasumi [14], [15]）、また essential set との関連からの研究（Mullins [21], Ishikawa, Tomiyama and Wada [18], [19]）、そのほかにも Sidney and Stout [25], Chalice

[9], Gamelin and Wilken [11] などの研究がある。このinterpolation setに関連してpeak setも重要な役割を演ずる。Bishop [4]によって研究されたpeak pointとChoquet boundaryとの関係に始って、$R(X)$（Xの外側にpoleをもつ有理関数全体の閉包としてできたfunction algebra）の構造をしらべる際にも一役買っている（cf. Wilken [29], [31]）。

ここではInterpolation setとpeak setに関する種々の研究を紹介するとともに、Ishikawa, Tomiyama and Wada（[18], [19]）で得られた結果を再研討し、その応用としていくつかの定理をあげることにする（3節, 4節）。

§2 Peak set, Interpolation set

Xをcompact Hausdorff spaceとし、AをXの上のfunction algebraとする。Xの閉部分集合Fが（Aに関する）peak setであるとは、ある$f \in A$（$\|f\| = 1$）が存在して、$F = \{x \in X : f(x) = 1\}$、そして$|f(x)| < 1$ $(\forall x \in X \sim F)$のときをいう。Fが一点$\{x\}$のとき、$\{x\}$をpeak pointという。AのChoquet boundaryをB_Aで表わせばBishop [4]はつぎのことを示した。

<u>定理 2.1</u>　$B_A \ni x$とする。$\{x\}$がpeak pointであることと、$\{x\}$がG_δ setであることとは同値である。Xが

compact metric space であれば、A の Choquet boundary は peak point 全体の集合と一致する。

X の閉部分集合 F が peak set のある族 $\{F_\lambda\}$ の共通部分であるとき、F を p-set という。F が一点 $\{x\}$ のとき、それを p-point という。つぎは Bishop-de Leeuw の定理 [5] である。

<u>定理 2.2</u>　A を X の上の function algebra とし、P を A の p-point 全体の集合とする。任意の $x \in X$ に対して、Borel sets と P によって生成された σ-algebra の上に定義された probability measure μ （$\mu(P) = 1$）が存在して、$f(x) = \int f d\mu$ （$f \in A$）となる。

<u>系 2.3</u>　任意の $f \in A$ は、$|f|$ の最大値を P の上でとる。

つぎは Bishop [3] の Antisymmetric decomposition として知られている。

<u>定理 2.4</u>　A を X の上の function algebra としたとき、X の閉部分集合による partition $\{X_\lambda\}$ が存在して

(i)　X_λ は maximal antisymmetric set。

(ii)　$A|X_\lambda$ は $C(X_\lambda)$ で閉。

(iii)　$f \in C(X)$ が $f|X_\lambda \in A|X_\lambda$ $(\forall\lambda)$ なら $f \in A$。

この場合、X_λ は p-set となる。

つぎの二つは Glicksberg [13] によって与えられた。

定理2.5　Xの閉部分集合Fがp-setであるための必要かつ十分条件は、すべての$\mu \in A^{\perp}$に対して$\mu_F \in A^{\perp}$となることである。

定理2.6　F_i $(i=1,2,3,\cdots)$をp-setとする。もし$F=\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$がXの閉部分集合ならFはまた$p$-setとなる。

Aがlogmodular algebraであるとき、つぎが成立する。

定理2.7　Aをlogmodular algebraとし、FをXの閉部分集合とする。そのとき$A|F$が$C(F)$で閉であることと、Fがp-setであることは同等である。

系2.8　Aをcompact metric space Xの上のlogmodular algebraとする。そのときXの任意の点xはpeak pointとなる。

よく知られているRossi's local peak set theorem [22]はつぎのようである。

定理2.9　Aのmaximal ideal space M_Aの閉部分集合Fがlocal peak setならば、それはpeak setとなる。ここでFがlocal peak setであるとは、M_Aのある開集合$U(\supset F)$が存在して、ある$f \in A$で$F=\{x \in M_A : f(x)=1\}$かつ$U \sim F \ni {}^{\forall}x$では$|f(x)|<1$となることである。

つぎにXを複素平面上のコンパクト集合とし、$R(X)$をXの外側にpoleをもつような有理関数全体のX上での一様収束

による閉包を $R(X)$ とすれば、Bishop [4] によりつぎのことが示された。

定理 2.10　$R(X) = C(X)$ となるための必要かつ十分条件は、X のすべての点が $R(X)$ に関して peak point となることである。

ここで一般の function algebra A（X の上の）において、X のすべての点が A に関して peak point となれば、$A = C(X)$ となるかという問に対して、Cole [cf. Browder [7]] は counterexample を作った。

$R(X)$ の peak point については、さらにつぎの Wilken [29] の定理がある。

定理 2.11　P を $R(X)$ の Gleason part とする。そのとき P は positive planar measure をもつか、または $P = \{x\}$ は peak point となる。

point derivation との関係においては（cf. [7]）、

定理 2.12　x が $R(X)$ に関して peak point でないということと、$R(X)$ が x において non-zero point derivation をもつこととは同等である。

上の定理 2.10 はつぎのように強めることができる：P を $R(X)$ に関しての peak point 全体の集合としたとき、もし $X \sim P$ が zero planar measure をもてば、$R(X) = C(X)$ ([4]).

それゆえ $R(X) \neq C(X)$ なら $X \sim P$ は 0 でない planar measure をもつことになり、その結果 non-zero point derivation をもつ点の集合は、0 でない planar measure をもつことになる（注1を見よ）。

peak set および p-set F に対しては、$A|F$ が $C(F)$ で閉となることは容易にわかるが、とくに $A|F = C(F)$ となる X の閉部分集合 F を（A に関する）interpolation set という。A が disk algebra のとき、Rudin-Carleson の定理は、単位円上の Lebesgue measure 0 の閉部分集合は interpolation set であることを示している。Glicksberg[13] は一般の function algebra および Dirichlet algebra における interpolation set について、つぎの定理を証明した。

<u>定理 2.13</u>　A を X の上の function algebra とし、F を X の閉部分集合とする。F が interpolation set となるための必要かつ十分条件は、ある $c \geqq 1$ が存在してつぎが成立することである。

$$\|\mu_F\| \leqq c\,\|\mu_{X \sim F}\| \quad (\forall \mu \perp A).$$

<u>定理 2.14</u>　A を X の上の Dirichlet algebra とし、F を X の閉部分集合とする。F が interpolation set となるための必要かつ十分条件は、$\mu \perp A$ となる X 上の任意の測度 μ に対して $\mu_F = 0$ が成立することである。

つぎにAをdisk algebraとしたとき、AのGelfand transform $\hat{A}$は単位閉円板D（$=M_A$）の上のfunction algebraとなる。ここでDの閉部分集合Fが$\hat{A}$のinterpolation setとなるための必要かつ十分条件は（Γは単位円を表わす）

a) F∩ΓはAのinterpolation setとなる、すなわちそれはΓ上のLebesgue measure 0の閉部分集合となる。

b) F〜Γは高々可附番集合であり、かつH^∞-interpolating sequenceとなる。すなわち、$F \sim \Gamma = \{x_n\}$とすれば、任意の有界な複素数列$\{z_n\}$に対して$f \in H^\infty$が存在して、$f(x_n) = z_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$となる。

Hasumi [14] はこの事項をAがlogmodular algebraの場合に拡張し、更にAがlogmodular algebraを含む広いfunction algebraのclassの場合に拡張できることを示した（Hasumi [15]）。

§3. w-interpolation set

Aをcompact Hausdorff space Xの上のfunction algebraとし、GをXの開集合とする。Gが（Aに関しての）w-interpolation setであるとは、Gの中の任意のcompact subsetがinterpolation setとなることである。EをAのessential setとしたときX〜Eはw-interpolation setとなることは明らか。w-interpolation setはIshikawa, Tomiyama and

Wada ([18], [19]) で Mullins [21] の定理の拡張を考える際に用いられた。この後、w-interpolation set について再研討し、その application としていくつかの定理をあげようと思う。

まず Ishikawa, Tomiyama and Wada ([18], [19]) においてつぎの定理が証明された。

定理 3.1　A を X の上の function algebra とし、G を w-interpolation set とする。そのとき $G \cap \partial_{A|E} = \phi$ となる。ここで E は A の essential set を表わす。

この定理に Rossi の local maximum modulus principle [22] を含めて考えると、つぎのようになる。

定理 3.2　A を X の上の function algebra とし、G を w-interpolation set とする。そのとき $G \subset X \sim (\overline{E^i} \cup \partial_{A|E})$。ここで E^i は E の $M_{A|E}$ での interior を表わし、$\overline{E^i}$ は E^i の X における閉包である。

系 3.3　A を X の上の essential algebra とする。そのとき G を w-interpolation set とすれば $G \subset X \sim (\overline{X^i} \cup \partial_A)$。ここで X^i は X の M_A における interior を表わす。

系 3.4　$X = M_A$ または $E = \partial_{A|E}$ とする。そして G を w-interpolation set とすれば $G \subset X \sim E$、いいかえれば $X \sim E$ は largest w-interpolation set となる。

これは [18], [19] において得られた。

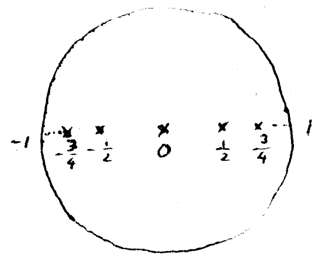
さて一般には $X \sim E$ が largest w-interpolation set とは限らない。

<u>Example</u> A_0 を disk algebra とし、

$X = \{z : |z| = 1\} \cup \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \cdots\}$

とし、$A = \hat{A}_0 | X$ とすれば

A は X の上の essential algebra となる。



この場合 w-interpolation set は空集合 ($E \sim E = \phi$) とは限らない。$G = \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \cdots\}$ は明らかに w-interpolation set となっている。

それではどのような open set が w-interpolation set となるか。A が上のように disk algebra A_0 から作られた場合には、つぎのようになる。

<u>定理 3.5</u> Γ を単位円、D を単位閉円板とし、Δ を D の開部分集合で $\Gamma \subset \Delta$ とする。A_0 を disk algebra とし $A = \hat{A}_0 | \Delta$ とおく。G を A の任意の w-interpolation set とすれば、G は高々可附番集合であり、かつ G の任意の compact subset は有限集合となる。

N を countably infinite discrete space とし、その Čech compactification を βN とする。Hoffman and Ramsay [16] は $X\ (= \beta N)$ の上に function algebra ($\neq C(X)$) が存在することを示した。彼等が作った function algebra では、その

essential set E は $\beta N \sim N$ に含まれている。$X\,(=\beta N)$ の上の任意の function algebra A では、N が w-interpolation set であることから定理 3.1 の応用としてつぎを得る。ここで N_1 は N の部分集合とする(注2を見よ)。

定理 3.6　N を infinite (countable とは限らない) discrete space とし、$X=\beta N$ とおく。A を X の上の function algebra とすれば、つぎの三つの条件は同等である。

a)　$E \subset X \sim N_1$

b)　$\forall x \in N_1$ で $C_x \in A$, ここで C_x は $\{x\}$ の characteristic function を表わす。

c)　N_1 は M_A において open set である。

系 3.7　A を $X\,(=\beta N)$ の上の function algebra とする。そのとき A の maximal ideal space M_A の isolated points の集合は $N \sim E$ である。

つぎに F を A の任意の interpolation set としたとき、F の interior (X における) が w-interpolation set となっていることから、

定理 3.8　A を X の上の essential algebra とし、$\partial_A \cup \overline{X^i} = X$ (とくに $X=\partial_A$ または $X=M_A$) と仮定する。このとき A の任意の interpolation set は X で non dense である。

(注) 定理3.8の条件 $\partial_A \cup \overline{X^i} = X$ をみたすものとして pervasive algebra, maximal algebra, ε-regular algebra, Dirichlet algebra, logmodular algebra などがある。

§4 $A = C(X)$ となる条件

A を X の上の function algebra としたとき $A = C(X)$ となるための function algebra の条件について非常に多くの研究がなされている (cf. [1], [2], [9], [11], [17], [18], [19], [20], [21], [25], [28], [30])。ここでもう一つの条件を考えて見る。§2で述べた Cole の例では、X の各点が peak point でも $A = C(X)$ とならないことが示されたが、それに関連して

<u>定理4.1</u> A を X の上の function algebra とする。X の異なる任意の二点 x, y に対して、peak set F が存在し、F は x を内点にもち y を含まないようにとれれば $A = C(X)$ となる。

completely regular space X が F-space であるとは、$C_R(X)$ の任意の finitely generated ideal が principal となること、いいかえれば $C_R(X)$ の任意の関数 f で、f の positive part $\{x \in X : f(x) > 0\}$ と f の negative part $\{x \in X : f(x) < 0\}$ が completely separated であるときにいう。Stonian space, σ-stonian space, または X が locally compact, σ-compact であるとき $\beta X - X$ はいずれも F-

space となる。

F − space X 上の任意の measure の carrier は extremally disconnected であること（Hoffman, または Seever [24]）と上の定理からつぎを得る。

系 4.2（Bade and Curtis [2]）A を compact F − space 上の ε − normal algebra とする（$\varepsilon < 1/2$）。そのとき $A = C(X)$ となる。

A を X 上の function algebra とする。A が strongly regular であるとは、$\forall f \in A$, $\forall x \in X$ に対して、x の近傍で定数関数となるような $g \in A$ が存在して f に一様近似させうることである。つぎの二つは Wilken [30] の定理の slight extension である。

系 4.3　X を、有限個の点以外の任意の点が G_δ set となる compact totally ordered space とし、A を X の上の strongly regular function algebra とする。そのとき $A = C(X)$ となる。

系 4.4　X は、その任意の点の適当な近傍の閉包が直線のある閉部分集合に同位相となるような compact Hausdorff space とする。そのとき X の上の任意の strongly regular function algebra は $C(X)$ に一致する（注3）参照。

文　献

[1] H. Alexander: Uniform algebras on curves, Bull. Amer. Math. Soc, 75 (1969) 1269 − 1272.

[2] W. G. Bade and P. C. Curtis : Embedding theorems for commutative Banach algebras, Pacific J. Math., 18 (1966) 391-409.

[3] E. Bishop : A generalization of the Stone - Weierstrass theorem, Pacific J. Math 11 (1961) 777-783

[4] ———— : A minimal boundary for function algebras, Pacific J. Math., 9 (1959) 629-642.

[5] E. Bishop and K. de Leeuw : The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier, 9 (1959) 305-331.

[6] A. Browder : Function Algebras, Proc. Int'l Symp. on Function Algebras, Tulane U., Scott-Foresman (1965).

[7] ———— : Introduction to Function Algebras, Benjamin (1969).

[8] L. Carleson : Representations of continuous functions, Math. Z. 66 (1957) 447-451.

[9] D. R. Chalice : Characterizations for approximately normal algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969) 415-419.

[10] T. W. Gamelin : Uniform Algebras, Prentice-Hall (1969).

[11] T. W. Gamelin and D. R. Wilken : Closed partitions of maximal ideal spaces, Illinois J. Math., 13 (1969) 789-795.

[12] L. Gillman and M. Jerison: Rings of Continuous Functions, Van Nostrand, Princeton N. J., (1960)

[13] I. Glicksberg: Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962) 415-435.

[14] M. Hasumi: Interpolation sets for logmodular Banach algebras, Osaka J. Math., 3 (1966) 303-319.

[15] ———: An interpolation problem for a class of uniform algebras. (to appear

[16] K. Hoffman and A. Ramsay: Algebras of bounded sequences, Pacific J. Math., 15 (1965) 1239-1248.

[17] K. Hoffman and J. Wermer: A characterization of C(X), Pacific J. Math., 12 (1962) 941-944.

[18] H. Ishikawa, J. Tomiyama and J. Wada: On the essential set of function algebras, Proc. Japan Acad., 44 (1968) 1000-1002.

[19] ———: On the local behavior of function algebras, Tôhoku Math. J., 22 (1970) 48-55.

[20] G. M. Leibowitz: Lectures on Complex Function Algebras, Scott, Foresman (1970).

[21] R. E. Mullins: The essential set of function algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967) 271-273.

[22] H. Rossi: The local maximum modulus principle, Ann. Math., 72 (1960) 1-11.

[23] W. Rudin : Boundary value of continuous analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956) 808 – 811.

[24] G. Seever : Measures of F – spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 133 (1968) 267 – 280.

[25] S. Sidney and E. L. Stout : A note on interpolation, Proc. Amer. Math. Soc., 19 (1968) 380 – 382.

[26] J. Wada : On Šilov boundaries of function algebras, Proc. Japan Acad., 39 (1963).

[27] ———— : On the interpolation of some function algebras, Osaka J. Math., 1 (1964) 153 – 164.

[28] J. Wermer : The space of real parts of a function algebra, Pacific J. Math., 13 (1963) 1423 – 1426.

[29] D. R. Wilken : Lebesgue measure for parts of R(X), Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967) 508 – 512.

[30] ———— : A note on strongly regular function algebras, Can. J. Math., 21 (1969) 912 – 914.

[31] ———— : Remarks on the string of beads, Proc. Amer. Math. Soc., 23 (1969) 133 – 135.

(注 1) このほかにも $R(X)$ の peak point, Gleason part に関する研究がある。たとえば Gleason part が connected

であるかどうかの問題については、D. R. Wilken : The support of representing measures for $R(X)$, Pacific J. Math., 26 (1968) 621–626。それに対して A. M. Davie は disconnected part をもつ $R(X)$ が存在することを示したことがつぎの Gamelin の論文の Added in proof にのっている : Norm compactness of representing measures for $R(K)$, J. Functional analysis, 3 (1969) 495–500。この例では X が string of beads であるとのことであるが、X が string of beads のときの $R(X)$ の peak point に関する研究も興味深い。これは定理 2.11 によって $R(X)$ の Gleason part の研究につながる (cf. [31], [10])。また peak point と analytic capacity, point derivation との関係などに関する研究も多くなされている（この講究録の神保氏および荷見氏の論文参照）。

（注 2） Hoffman and Ramsay [16] の例では $E \subset \beta N \sim N$ となっていることは既に述べたが、βN の上の任意の function algebra では、そうなる必要はない。$E \not\subset \beta N \sim N$ となるような βN の上の function algebra は実際作ることが出来る。これは H^∞ の maximal ideal space M_{H^∞} の 1 の上の fiber (cf. K. Hoffman : Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall 1962) を考えれば容易に作れる。

90'

(注3)　予稿集の原稿の系4.4は「Xはcompactで $X=\bigcup_{i=1}^{m} X_i$, かつすべての i で X_i は Jordan curve の閉部分集合とする。そのとき A を X の上の strongly regular algebra とすれば $A=C(X)$」だったがこれは X の形に更にある条件をつけなければ証明できない。