数理解析研究所講究録
第 96 巻 1970 年 97-111

Convolution measure algebra における Gleason part について

奈良高専 貴志 一男

§0. 序

G を locally compact abelian (topological) group とする。group algebra $L^1(G)$ の maximal ideal space は G の dual group $\hat{G}$ であるが、measure algebra $M(G)$ の maximal ideal space は複雑である。J. L. Taylor [12] は、$M(G)$ の maximal ideal space をある compact abelian (topological) semigroup S 上の semicharacter の全体 $\hat{S}$ と同一視出来る事を示し、その方法は convolution measure algebra と云われる抽象的な Banach algebra に適用出来る事を示した (その一例として、locally compact semigroup T 上の measure algebra $M(T)$ がある)。そして多くの興味ある uniform algebra は、ある種の convolution measure algebra M を Gelfand 表現して得られる algebra を、spectral norm で完備化して得られる。

§1 では convolution measure algebra の定義とその性質, §2 では examples, §3 では上のようにして得られる uniform algebra の Gleason part について述べる [5].

§1. Convolution measure algebra について

<u>定義</u>. M が次の条件を満足するとき, (abstract) complex L-space という.

1) M は partially ordered complex Banach space である.

2) $\{\mu ; \mu \in M, \mu \geq 0\}$ によって生成される閉じた実部分空間 M_R は, M の order を M_R に制限したとき, real Banach lattice で, 次の a) ~ d) を満足する.

a) $\mu, \nu \in M_R$ and $\mu, \nu \geq 0$ ならば $\|\mu+\nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$.

b) $\mu, \nu \in M_R$ and $\mu \wedge \nu = 0$ ならば $\|\mu+\nu\| = \|\mu - \nu\|$.

c) $\mu \in M$ ならば $\mathrm{Re}\,\mu$, $\mathrm{Im}\,\mu \in M_R$ が一意的にきまり, $\mu = \mathrm{Re}\,\mu + i\,\mathrm{Im}\,\mu$ となる.

d) $\mu \in M$ に対して, $|\mu|$ を $|\mu| = \bigvee\{\mathrm{Re}(e^{i\theta}\mu) ; 0 \leq \theta < 2\pi\}$ で定義すると, $\|\mu\| = \|\,|\mu|\,\|$.

<u>定義</u> 積・が定義されている complex L-space M が, Convolution measure algebra (c. m. a) であるとは,

$(M, \cdot)$ が Banach algebra でかつ次の条件を満足するときである。

1) $\mu, \nu \in M$ and $\mu, \nu \geq 0$ ならば $\|\mu \cdot \nu\| = \|\mu\| \|\nu\|$.

2) $\mu, \nu \in M$ and $\mu, \nu \geq 0$ ならば $\mu \cdot \nu \geq 0$.

3) μ, ν, ω をMの負でない要素で，$\omega \leq \mu \cdot \nu$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，Mの負でない要素列 $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$, $\{\nu_j\}_{j=1}^{m}$ と $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m} \subset [0, 1]$ とを $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \leq \mu$, $\sum_{j=1}^{m} \nu_j \leq \nu$ かつ $\|\omega - \sum a_{ij} \mu_i \nu_j\| < \varepsilon$ を満足するように選ぶ事が出来る。

S を locally compact (topological) semigroup, $M(S)$ を S 上で定義される complex-valued, countably additive, regular Borel measure の全体とする。積 $\cdot$ (= convolution) を，S 上の任意の有界な Borel function f に対して，方程式

$$\int_S f(s)\, d(\mu \cdot \nu)(s) = \int_S \int_S f(x y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

によって定義する。

<u>定理 1.1</u> ([11], [12]) S が locally compact (topological) semigroup であるならば，$M(S)$ は convolution measure

algebra である。

topological semigroup S から複素平面の閉じた単位円内への，連続で，恒等的に零でない，complex homomorphism を semicharacter といい，S 上で定義される semicharacter の全体を $\hat{S}$ で表わす。

<u>定理 1.2</u>　（Taylor の表現定理）[12]　　M を単位元をもつ semisimple な commutative な convolution measure algebra とすると，ある単位元をもつ compact abelian (topological) semigroup S （M の structure semigroup という）と，次のような性質をもつ M から $M(S)$ の中への map $\theta : \nu \to \nu_s$ とが存在する。

1) θ は order を保つ，isometry でかつ isomorphism である。

2) $\theta(M) = M_S$ は $M(S)$ の weak-star dense な subalgebra である。

更に M の各 complex homomorphism h に対して，$\gamma \in \hat{S}$ が一意的にきまり，

$$\left(\hat{\nu}(h) = \right) h(\nu) = \int_S \gamma(x)\, d\nu_s(x) \quad \left(= \hat{\nu}_s(\gamma)\right)$$

となる。

この定理により，Mの maximal ideal space と $\hat{S}$ とは同一視する事が出来，$\nu \in M$ の Gelfand 表現は $\hat{\nu}(\gamma)=\int_S \gamma \, d\nu_s$ ($\gamma \in \hat{S}$) となる．従って，$\hat{S}$ の Gelfand topology は，function algebra $\hat{M}=\{\hat{\nu} : \nu \in M\}$ によって導入されるweak topology $\sigma(\hat{S}, \hat{M})$ である．spectral norm は

$$\sup_{\hat{S}} |\hat{\nu}_s(\gamma)| = \sup_{\mathfrak{M}(M)} |\hat{\nu}(h)| = \lim \sqrt[n]{\|\nu^n\|} = \lim \sqrt[n]{\|\nu_s^n\|}$$

となる．（Banach algebra A の maximal ideal space を $\mathfrak{M}(A)$ で表わす）

$\hat{M}$ を spectral norm で完備化して得られる uniform algebra（$\tilde{M}$ で表わす）を考察の対象にする．また M と M_S とを同一視して $M \subset M(S)$ と考える．

注意 1．定理 1.2 において

M : semi simple $\Leftrightarrow$ θ は isometry

M : 単位元をもつ $\Leftrightarrow$ $\hat{S}$ は compact

注意 2．A を単位元をもつ commutative Banach algebra とする．$f \in A$ の Gelfand 表現を $\hat{f}$ で表わし，$\hat{A}=\{\hat{f} : f \in A\}$ とする．$\hat{A}$ は $\mathfrak{M}(A)$ の点を分離し，定数を含むから，$\hat{A}$ の $C(\mathfrak{M}(A))$ における closure を B とすると，B は $\mathfrak{M}(A)$ 上の uniform algebra である．このとき，

$$\mathfrak{M}(B) = \mathfrak{M}(A)$$

となる。

証明　$\mathfrak{M}(B) \supseteq \mathfrak{M}(A)$ は明らか。

$\mathfrak{M}(B) \subseteq \mathfrak{M}(A)$ なる事を示すには、$\mathfrak{M}(B)$ の任意の元 φ に対して、ある $\mathfrak{M}(A)$ の元 Φ があって、

$$\varphi(f) = f(\Phi) \qquad ({}^{\forall}f \in B)$$

となる事を云えばよい。

$$\Phi(f) = \varphi(\hat{f}) \qquad (f \in A)$$

によって Φ を定義する。

Φ は A 上で恒等的に零でなく、${}^{\forall}f, g \in A$ に対して、

$$\Phi(fg) = \varphi(\widehat{fg}) = \varphi(\hat{f}\cdot\hat{g}) = \varphi(\hat{f})\varphi(\hat{g}) = \Phi(f)\,\Phi(g)$$

また $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$,　$\Phi(cf) = c\,\Phi(f)$ （c は定数） 従って、$\Phi \in \mathfrak{M}(A)$.

$$\therefore \quad \varphi(\hat{f}) = \Phi(f) = \hat{f}(\Phi) \qquad ({}^{\forall}\hat{f} \in \hat{A})$$

$$\therefore \quad \varphi(f) = f(\Phi) \qquad ({}^{\forall}f \in B)$$

Q.E.D.

この事から

$$\mathfrak{M}(\tilde{M}) = \mathfrak{M}(M).$$

§2. Examples

G を locally compact abelian group とする。

<u>Example</u> 1　grup algebra $L^1(G)$

G が discrete であるとする。従って $L^1(G) = M(G)$ で単位元をもつ。G の各点の測度を 1 としたものが Haar measure であり、$L^1(G) \ni f, g$ の積を convolution

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy = \sum_{y \in G} f(x-y)g(y)$$

にとると、定理 1.2 の条件を満足する c. m. a. になる。

$\mathfrak{M}(L^1(G)) = \hat{G}$ で、$L^1(G)$ の structure semigroup S は G の Bohr compactification $\bar{G}$ で、$\hat{S}$ と $\hat{G}$ とは isomorphism になる。$L^1(G)$ を Gelfand 表現したものを、spectral norm で完備化すると、$C(\hat{S})$ になる。

<u>Example 2</u>. Arens and Singer の algebra ([1], [12])

G は discrete であるとする。G_+ を G の subsemigroup で、次の性質をもつものとする。

1) G_+ は零を含む

2) $G_+ \cup (-G_+) = G$. $G_+ \cap (-G_+) = \{0\}$.

いま、$M = \{f \,;\, f \in L^1(G),\ f(x) = 0 \text{ for } x \notin G_+\}$ とすると、M は $L^1(G)$ の closed subalgebra で、定理 1.2 を満足する c. m. a. である。

$\mathfrak{M}(M) = \hat{G_+}$ であり、structure semigroup S は G_+ を（ある意味で）compactification したものである。$\hat{G_+}$ と $\hat{S}$

とは isomorphism になる。

M を Gelfand 表現して得られる function algebra $\hat{M}$ を、spectral norm で完備化して得られる uniform algebra を $\hat{G}$ ($\hat{M}$ の Shilov boundary, [1] 定理 4.6) 上で考えると、dirichlet algebra になる [3].

特に、$G = Z$ (整数)、 $G_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$

$$M = \{f : f \in L^1(Z) = \ell^1(Z),\ f(n) = 0 \text{ for } n < 0\}$$

とする。すなわち

$$M \ni f \iff f = \{f(n)\}_{n=0}^{\infty},\quad \|f\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < +\infty$$

$M \ni f, g$ の convolution は $(f * g)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f(n-m) g(m)$.
$\mathfrak{M}(M) = \hat{G_+} = \{z \in C^1 ;\ |z| \leq 1\}$, $f \in M$ の Gelfand 表現は

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n$$

M を Gelfand 表現して得られる function algebra を spectral norm で完備化すると、disc algebra になる [3]

Example 3. measure algebra $M(G)$

$M(G)$ は定理 1.2 の条件を満足する c. m. a. である。
$M(G)$ の structure semigroup S の構造はよく解っていない。
G が discrete でないとき、G の dual group $\hat{G} \subset \Delta$ ($\Delta = \mathfrak{M}(M(G))$) は compact でなく、Δ の真部分集合

である。次のような事柄が知られている ([8], [9])。

a) $M(G)$ は symmetric でない。

b) Δ における $\hat{G}$ の closure は Shilov boundary と交わらない。

c) $\hat{G}$ は Δ の open subset である。

d) $\hat{G}$ は connected ならば Δ も connected である。

等々。

更に $M(G)$ の Shilov boundary は Δ の真部分集合である ([4], [13])。

§3. Convolution measure algebra における Gleason part について ([5], [12])

uniform algebra A の maximal ideal space X の二元 x, y に対して

$$\|x-y\| = \sup\{|f(x)-f(y)| : f \in A, \|f\| \leq 1\}$$

とおき,

$$x \sim y \iff \|x-y\| < 2$$

によって, $\sim$ を定義すると, $\sim$ は同値関係を満足する [2]。$P(x) = \{y \in X ; x \sim y\}$ を x を通る A の Gleason part という。 $P(x) = \{x\}$ のとき, $P(x)$ は

one point part であるという，$P(x) \neq \{x\}$ のときは，$P(x)$ は nontrivial part という．

M を定理1.2で考えた c.m.a.，S を M の structure semigroup，$m(M) = S^\wedge$ かつ $M \subset M(S)$ と考える．$\hat{M} = \{\hat{\nu} : \nu \in M\}$ を spectral norm で完備化して得た uniform algebra を $\tilde{M}$ で表わす．

$S^\wedge$ のもつ性質として，次のような事が知られている．

1) $S^\wedge$ は compact Hausdorff space．

2) $S^\wedge$ は S を分離する．

3) $1 \in S^\wedge$．

$f, g \in S^\wedge$ とする．

4) $\bar{f} \in S^\wedge$，$fg \in S^\wedge$，$|f| \in S^\wedge$．
   ($\bar{f}$ は f の complex conjugation)

5) $f \geqq 0$，$z \in \mathbb{C}^1$，$\mathrm{Re}\, z > 0$ ならば $f^z \in S^\wedge$．

6) $\nu \in M$，$f \geqq 0$ ならば

$$\hat{\nu}(f^z) = \int_S f^z(x)\, d\nu(x) \in \mathrm{Reg}\,[z,\ \mathrm{Re}\, z > 0].$$
(正則関数)

$S^\wedge$ を Gleason part に分けるとき，上記の $S^\wedge$ の性質が関係してくる事が期待出来る．

$f, g, h \in S^\wedge$ として，Gleason part の性質を列記する．

1°) $f \sim g$ ならば $\bar{f} \sim \bar{g}$，$f \cdot h \sim g \cdot h$．

2°) $f \geq 0$，$z \in \{z ; z \in \mathbb{C}^1, \operatorname{Re} z > 0\}$ ならば $f \sim f^z$．

disc algebra のとき（Example 2），$S^\wedge = \{z ; |z| \leq 1\}$ で $S^\wedge \ni z_1, z_2$ とするとき，

$$z_1 \not\sim z_2 \iff (|z_1| = 1,\ z_1 \neq z_2) \text{ or } (|z_2| = 1,\ z_1 \neq z_2).$$

この事から，

$$S^\wedge \ni f, g$$

$$f \not\sim g \iff \begin{cases} |f(x)| = 1,\ f(x) \neq g(x) \text{ なる } x \in S \text{ が存在するか} \\ |g(x)| = 1,\ f(x) \neq g(x) \text{ なる } x \in S \text{ が存在する.} \end{cases}$$

対偶をとって，

$$f \sim g \iff \{x ; |f(x)| = 1\} = \{x ; |g(x)| = 1\} \subseteq \{x ; f(x) = g(x)\}$$

の成立する事が推測される．

<u>定理 3.1</u>　$f \sim g$ ならば，

$$\{x ; |f(x)| = 1\} = \{x ; |g(x)| = 1\} \subseteq \{x ; f(x) = g(x)\}.$$

上記の定理の証明は簡単である．また逆の成立する事が推測されている．

Conjecture：定理 3.1 の逆が成立する.
これに関連して，次の定理が証明されている.

__定理 3.2__ $f \geq 0$, $g \geq 0$ とする.
$f \sim g \iff \{x : f(x) = 1\} = \{x ; g(x) = 1\}$

次に $\hat{S}$ の one point part を特徴づける.
__定義__ $H = \{f \in \hat{S} : |f(x)| = 0 \text{ or } 1 \text{ for } {}^{\forall}x \in S\}$
注意.
$\pi \in \hat{S}$, $\pi^2 = \pi$ (idempotent) とする. π を含む maximal group $\hat{G}(\pi)$ は

$$\hat{G}(\pi) = \{h ; h \in \hat{S},\ |h| = \pi\}$$

となり，$\hat{S}$ におけるすべての maximal group $\hat{G}(\pi)$ の和集合は H である[12].

いま，$f \in \hat{S}$ のとき，

$$f_0'(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } f(x) = 0 \\ \dfrac{f(x)}{|f(x)|} & \text{if } f(x) \neq 0 \end{cases}$$

とおく.

Taylor's Polar decomposition theorem [12].
$f \in \hat{S}$ ならば，$f_0 \in H$ は次のように決まる.

$$f = |f| f_0, \quad f_0 = f_0' \quad \text{a.e.-}d\nu \quad ({}^{\forall}\nu \in M)$$

すなわち，すべての $\nu \in M$ に対して，ν-measure zero を除いて $f_0 \in H$ は一意的に決まる.

3°) $P(f) = \{f\}$ (one point part) ならば $f \in H$.

証明. $f \notin H$ ならば，$0 < |f(x)| < 1$ なる $x \in S$ が存在する. よって $|f|^2 \neq |f|$. 1°) 2°) から $f = f_0 |f| \sim f_0 |f|^2 \neq f$ //

4°) $f \in H$, $P(f) \ni g$, $f \neq g$ なる $g \in S^\wedge$ が存在するならば $f \sim g_0 |g|^z$ for $\forall z \in \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$. ただし $g = g_0 |g|$.

5°) $f \in H$ とする.

$f \sim g \iff \{x : |f(x)| = 1\} = \{x : |g(x)| = 1\} \subseteq \{x : f(x) = g(x)\}$

証明 ($\Leftarrow$) 定理 3.2 より $|f| \sim |g|$. $f = g_0 |f|$ となることから $f = g_0 |f| \sim g_0 |g| = g$ //

以上まとめて，

<u>定理 3.3</u> $f \in S^\wedge$ とする. 次の事柄は同値である.

a) $P(f) = \{f\}$

b) $f \in H$ でもし $g \in S^\wedge$, $\{x : |f(x)| = 1\} = \{x : |g(x)| = 1\} \subseteq \{x : f(x) = g(x)\}$ ならば $f = g$.

6°) $|f(x)| = 1$ for $^\forall x \in S$ $\Rightarrow$ $P(f) = \{f\}$

7°) $P(|f|) = \{|f|\}$ $\Rightarrow$ $P(f) = \{f\}$ （逆は成立しない）

$\hat{M}$ の Choquet boundary（$ch(\hat{M})$ で表わす）に属する点は one point part であるから，$ch(\hat{M}) \subset H$. $ch(\hat{M})$ の closure は $\hat{M}$ の Shilov boundary であるから，$\hat{M}$ の Shilov boundary は $\bar{H}$ に含まれる．しかし，$\hat{M}$ の Shilov boundary に属さない点で one point part になる例があるから（[3], [5]），one point part の特徴づけは Choquet boundary を特徴づけるものではない。

文　献

[1] R. Arens and I. M. Singer, Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956).

[2] A. M. Gleason, Function Algebras, Seminars on Analytic Functions II, Inst. for Adv. Study, Princeton, (1957).

[3] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular Banach algebra, Acta Math. 108 (1962).

[4] B. E. Johnson, The Shilov boundary of M(G), Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968).

[5] P. R. Miller, Gleason part and choquet boundary points in convolution measure algebras, Pacific J. Math. 31 (1969).

[6] R. P. Phelps, Lectures on Choquet's Theorem, Van Nostrand, Princeton, (1966).

[7] M. A. Rieffel, A characterization of commutative group algebras and measure algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963).

[8] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience, New York, 1962.

[9] ———, Measure algebras on Abelian groups, Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959).

[10] Y. Šreider, The structure of maximal ideal in rings of measures with convolution, Amer. Math. Soc. Transl. (1) 8 (1962).

[11] K. Stromberg, A note on the convolution of regular measures. Math. Scand. 7 (1959).

[12] J. L. Taylor, The structure of convolution measure algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965).

[13] ———, The Shilov boundary of the algebra of measures on a group. Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965).