

安定性問題における  
平板境界層の速度分布

京大 数理研 後藤金英

層流の — 特に二次元平行流の — 線型安定問題では、基礎方程式である  $O-S$  式の解析的な性質は殆んど研究しつくされている。一方、問題となる層流の安定特性は、その速度分布に強く依存し、個々の問題をそれぞれと解いてみなければ、明確な知識は得られない。そこで、非線型理論とのつながりを別にすれば、線型問題では“如何にうまく解くか”ということが今や一つのテーマとなり得る。その意味で、線型理論は計算機空巾までとよく去われまし、またその際に計算機にのせる乗せ方が新しい課題となる。

最近内外で直交函数展開<sup>1~3)</sup>による方法などが報告されているが、最も直接的な方法はいわゆる Thomas の方法<sup>4)</sup>と呼ばれる  $O-S$  式の差分解法である。  $10^4$  程度以下の  $R$  (Reynolds 数) の場合、この方法による  $O-S$  式の解は、現在のところ最も精度の高い解とされている。しかし、固有値

の分布を試行錯誤的に探査するこの方法で、勝手に速度分布  $U(y)$  を与えて中立曲線その他安定特性を求めることは、実はそれほど容易なことではない。むしろこの方法は、近似解法で得られた解の妥当性、あるいは、高 Reynolds 数に対する漸近理論は使えないけれどもその結果の外挿が効くような問題など、固有値におよその見当がつけられる場合に最も適切に用い得る。

この報告では、漸近理論 ( $R \gg 1$  の意味での) に数値計算を加味した手法、特に平板境界層に有用な取り扱いをホレ、それに有利な速度分布の提案をする。能率的な計算法は、それ自体勿論意味をもつが、同時に同じ系統のより複雑な問題に対しては、欠くことの出来ない攻撃手段となり得る。例えば、固体平板に沿う境界層と、可撓平板に沿う境界層の場合などである。

さて高 Reynolds 数に対する漸近理論では、O-S 式の 4 つの基本解は、2 つの粘性解と、Rayleigh 方程式：

$$(U-C)(\ddot{\psi} - \alpha^2 \psi) - \dot{U}\psi = 0, \quad (1)$$

の 2 つの基本解とから構成される。ここで、 $\alpha_r, C_r, C_i$  ( $C = C_r + iC_i$ ) はそれぞれ攪乱の波数、位相速度、増中因子である。  $\cdot$  は独立変数  $\eta$  による微分を表わす。  $\eta$  は、

$U(0) = 1$  となるように  $Lim^5$  の用いた平板からの無次元距離  $y$  をスケール変換した量で、ほぼ  $\eta = 2y$ 。これに伴ない通常の  $\alpha$ ,  $R$  は  $\alpha_2 = \alpha/2$ ,  $R_2 = R/2$  となる。粘性解は実質的に固体境界近傍での  $\eta$  値をもち、速度分布の大域的な形には無関係に、固体壁での速度勾配で決る。それにひきかえ、Rayleigh 方程式の解は  $U(\eta)$  の形に依存する。線型安定問題の計算では、個々の問題に応じた  $U$  についてこの方程式の解を求めることに、これまで専ら工夫と労力が注がれたと云える。

ところで、計算機を利用する立場に立つならば、決められた  $\alpha_2$ ,  $C$  の値について (1) の基本解を数値計算で求めることは容易であり、特に境界層の場合には、次に示すように有利な事情がある。たゞし、漸近理論で知れているように、(1) は流れの場の全てを通しては  $O-S$  式の近似にはなっていないくて、複素  $\eta$ -面の境界を含む限られた部分でしか成立しない。この領域で (1) を解く必要上、この方法を用いるには、物理空間 ( $\eta$  の実軸上) で速度分布を解析函数で表わすか、さもなくば数値解などの場合には、速度分布を支配する方程式を複素  $\eta$ -面の必要な積分路にそって解き直し、その意味での解析延長をする必要がある。従って、実験的に求められた速度分布などには、この方法は直接は使えない。

さて、平板境界層における中立攪乱の波数  $\alpha$ , 位相速度  $C_r$  (以下添字  $r$  を省く) を決定する固有値方程式は,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) - 1 &= -1/[1 + c \dot{\psi}(0)/\psi(0)] \\ &\equiv g(\alpha, C) \end{aligned} \quad (2)$$

である。<sup>5)</sup> ここで、 $\mathcal{F}(z)$  は Tietjens 函数<sup>5)</sup> で、前述の粘性解のみに依り、その変数  $\eta$  は  $\eta = c(\alpha R)^{1/3}$  で定義される。

$\psi(\eta)$  は (1) の解で、 $\psi(\infty) = 0$  を満たすものとする。(2) 式に於ける  $\psi$  の入り方とこの境界条件により、(2) でネオ変数変換が境界層問題の場合、特に有効に働く。

図1の曲線 A は Lin が用いた速度分布<sup>5)</sup> で、

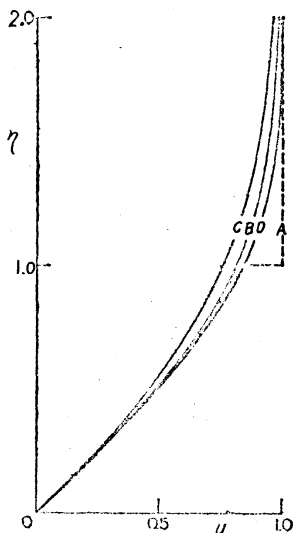


図 1.

$$U_A = \begin{cases} \eta - \frac{3}{16} \eta^4, & 0 \leq \eta < 1 \\ 1, & \eta > 1 \end{cases} \quad (3)$$

で表される。この速度分布の近似、さらにこれを用いて (1) を解く際の  $\alpha^2$ -展開あるいは  $\eta$ -展開は求める  $\alpha, C$  の固有値にたいしてかなりの誤差を挿入込む。これがどの程度のものか、これ迄議論され

たことはないが(その理由は, Lin の計算結果に Schubauer と Skramstad<sup>6)</sup> の実験が可成りよく一致するからであろう), Kurtz と Crandall<sup>7)</sup> の Thomas 方式による計算結果によると, あとでホク図2に見られる程度の誤差が認められる。

この報告では, (1) を数値的に解き  $\dot{u}(0)/u(0)$  を求める。従って,  $\alpha_7$  には何の制約もない。更に数値計算をうまく運ぶために適当な解析函数で  $U$  を近似することもある。近似の妥当性は, 固有値問題の結果で判断される。

速度分布のモデルとして, 尤一に,

$$U_B = A\zeta + B\zeta^3, \quad (4)$$

を提案する。こゝに  $\zeta = \tanh \gamma \eta$  で,  $A = 3/4, B = 1/4$  および,  $\gamma = 4/3$  であり, これら  $A, B, \gamma$  の値は,

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_B(0) &= 1, \\ \ddot{U}_B(0) &= 0, \\ U_B(\infty) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

の条件から決る。条件  $\ddot{U}_B(0) = 0$  は,  $\gamma \approx 0$  での  $\ddot{U}$  の  $\gamma$ -依存が安定特性に敏感に効くので是非必要である。 $\zeta$  の三次函数を用いる限り, これ以上に条件の数は増せない。 $U_B$  と  $U_A$  および  $U_D$  (Blasius 速度分布) との比較は,

図1にみられる通りである。壁から遠い部分で  $U \approx U_0$  にもっとよく合わせるべく (5) の条件を変えると, (4) の形を用いる限り結果の速度分布が,  $\eta = 0$  以外に流場内に  $\ddot{U} = 0$  となる点をもつようになる。これは漸近理論で知られるように, 安定特性に本質的なくい違いをもたらすので, さけねばならない。

極端に単純化したモデルの例として, 図1の曲線cに示すような

$$U_c = \tanh \eta, \quad (6)$$

が考えられる。これは (5) の条件のうち, 最初と最後の条件はみたすか,  $\ddot{U}(0) = 0$  はみたさない。

$U$  が (4) あるいは (6) の形で与えられたとして, (1) を解くことにしよう。そのためには, 次の変数変換:

$$f = -\dot{\psi} / (\alpha_2 \psi) \quad (7)$$

を用いると好都合である。(1)式と,  $\psi(\infty) = 0$  から,  $f$  に対する方程式および境界条件が得られるが, 特に  $U_B$  に対しては,

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{d\zeta} + \alpha_3 \frac{1-f^2}{1-\zeta^2} - \frac{12\zeta^3}{\alpha_3[(3+\zeta^2)\zeta - 4c]} &= 0, \\ f(1) = 1, \quad (df/d\zeta)_{\zeta=1} &= 3/[\alpha_3(1+\alpha_3)(1-c)], \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

が得られる。ただし、 $\alpha_5 = \alpha_2 / \gamma$ 。別の速度分布の場合でも、方程式の最後の項および  $(df/ds)_{s=1}$  の値が変わるだけである。定まった  $\alpha_5$  および  $C$  について (8) の数値解を求めることは容易で、その結果  $g(\alpha_5, C)$  の数表もたやすく得られる。積分は、複素  $s$  面の  $s = 1, 1-i, -i, 0$  を結ぶ直線に沿って行う。 $g(\alpha_5, C)$  が得られると、それと  $f(z)$  とを同一の複素面にのせ、その交点から  $\alpha, C$  および  $R$  (従って、 $R$ ) の相互関係を求めることができ、図2の曲線Bに示すような結果が得られる。(詳

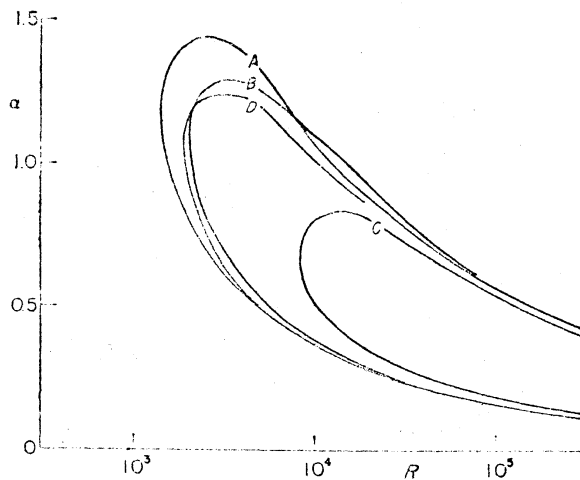


図2. 図1の4つの速度分布から得られた中立曲線。A, B...は図1のそれと対応する。

めに入れてある。

中立曲線の上の漸近枝は、固体壁近くの  $\ddot{U}(\eta)$  の形に敏感

細は、この報告の本論文<sup>8)</sup>参照) 同様にして、 $U_c$  についての結果も得られるが、それを図2の曲線Cで示す。これらの結果に加えて図2には、先に述べたように  $Lin$  の結果: 曲線A および Kutz と Crandall の結果: 曲線D も比較のため

依存するが、それぞれの中立曲線の振舞はよくそれを表わしている。

一方、下の漸近枝は  $U(0)$  だけに依存するから、どの速度分布でも同じになる筈であり、計算結果は事実そうになっている。

臨界 Reynolds 数を与える部分は両分枝の接合部分で、このあたりは、図 1 と 2 の曲線の相互関係をみれば、速度分布の大域的な形が重要な役割をもつと判断される。

ともあれ、中立曲線:  $A, B$  と  $D$  は定性的によく一致し、特に  $B$  と  $D$  では量的にも差は僅かであり、従って、

(1) 漸近理論でも Rayleigh 方程式をきちんと解けば妥当な結果が得られる。

(2) 速度分布  $U_B$  は Blasius の流れのモデルとして有用である。

(3) 速度分布  $U_C$  を用いた結果でも、定性的な議論の対象となり得る。

ことが結論される。



## 引用文献

- 1) N. Ikeda : J. Phys. Soc. Japan 27(1969) No.4.
- 2) 神部勉 : 本講究録.
- 3) E.H.Dowell : J. Fluid Mech. 38(1969) 401.
- 4) L.H.Thomas : Phys. Rev. 86(1953) 780.
- 5) C.C.Lin : Quart. appl. Math. 3(1945) 117, 218 277.
- 6) G.B.Schubauer and H.K.Skramstad : NACA Report 909(1948).
- 7) E.F.Kurtz and H.K.Crandall : J. math. Phys. 41(1962) 264.
- 8) K.Gotoh : J. Phys. Soc. Japan 28(1970) No.3.