

可撓境界に沿う流れの安定性

九犬 応力研 竹松 正樹

§ 1. 序

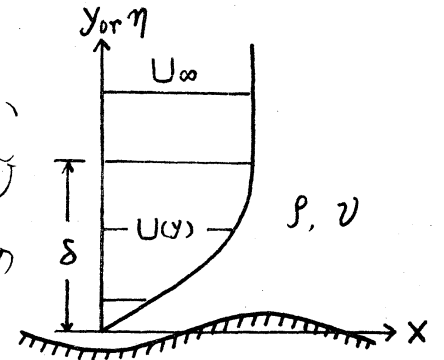
可撓境界に沿う二次元平行流の二次元攪乱に対する安定性を線型理論の枠内で調べる。

境界が可撓性を持つ場合には、剛壁の場合について良く知られている Tollmien-Schlichting 不安定の他に別の型の不安定—Kelvin-Helmholtz 不安定—が可能である。後者の不安定の存在は非粘性・一様流を仮定する古典的な Kelvin-Helmholtz 理論を用いて容易に予測される。このように、所謂‘内力型不安定’と‘外力型不安定’とが共存するところにこの安定問題の特色があり、多くの安定問題の中에서도特異な部類に属する。この種の問題は、主として実用的興味から、Benjamin [1], Landahl [2] 等によって取扱われたことがあるが、その安定特性については良く知られていない。ここでは、比較的簡単な境界面についての計算例によってその典型

的な安定特性を明らかにする。

§ 2. 一般的定式化

定常な主流 $U(y)$ に重畳される微小攪乱の x , y 方向の速度成分を \tilde{u} , \tilde{v} , 圧力を \tilde{p} とすると, この攪乱は次の方程式で記述される;



$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_t + U\tilde{u}_x + U_y\tilde{v} + \tilde{p}_x &= R^{-1}(\tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}), \\ \tilde{v}_t + U\tilde{v}_x + \tilde{p}_y &= R^{-1}(\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy}), \\ \tilde{u}_x + \tilde{v}_y &= 0. \end{aligned} \right\} \text{Fig. 1} \quad (2.1)$$

R は Reynolds 数で $R = U_\infty \delta / \nu$.

ここで攪乱の流れ函数 $\psi(x, y, t)$ を導入し, Fourier 成分の一つに着目し

$$\begin{pmatrix} \psi(x, y, t) \\ \hat{p}(x, y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(y) \\ \hat{p}(y) \end{pmatrix} \exp\{id(x - ct)\} \quad (2.2)$$

とおく。ここに, d は波数を表わす。 c は一般に複素数で, その実数部 (c_r), 虚数部 (c_i) はそれぞれ攪乱の位相速度, 増中率を表わす。 (2.2) を (2.1) に代入し \hat{p} を消去すると

$$(U - c)(\Phi'' - d^2\Phi) - U''\Phi = (idR)^{-1}(\Phi^{(iv)} - 2d^2\Phi'' + d^4\Phi) \quad (2.3)$$

が得られる。

簡単のために、可撓境界面の x 軸方向の変位はないものとし、その垂直変位のみを考える。これを $\eta(x, t) = \hat{\eta} \exp\{id(x-ct)\}$ と表わすと、境界条件は次のように書かれる;

$$y \rightarrow \infty; \quad \hat{u}, \hat{v} \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

$$y = \eta; \quad \begin{cases} \hat{u} + U = 0, \\ \hat{v} = \eta_t, \\ Z\eta = -\tilde{p} + R^{-1}(2\hat{v}_y + U'\eta_x). \end{cases} \quad (2.5)$$

(2.5)の第三式は境界面の力学的平衡条件を表わす。複素係数 Z は境界面の‘effective stiffness’である。(2.5)を線型化し、 \tilde{p} , η 等を消去すると、(2.4), (2.5)は Φ に関する四つの同次境界条件

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(\infty) = d\Phi(\infty) = 0, \\ c\Phi'(0) + U'(0)\Phi(0) = 0, \\ (dR)^{-1}\Phi''(0) - \left[\frac{iZ}{U'(0)} + 4d^2(dR)^{-1} \right] \Phi(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

が得られる。

(2.3)と(2.6)から成る固有値問題の解として、一つの固有値関係

$$\Delta(c, d, dR; Z) = 0 \quad (2.7)$$

が成立しなければならない。境界面の力学的性質が規定され Z の具体的な形が与えられると、(2.7)から実数パラメータ $-d$, dR の函数として $c = c_r + ic_i$ が定まり、それによつ

て流れの安定性を判定することができる。なお、 $Z \rightarrow \infty$ とすると剛体壁に沿う流れの安定問題に帰着することが容易にわかる。

境界面の剛性係数 Z : 具体的に計算例を示すためには、 Z の具体的な形が与えられねばならない。ここでは、一つの典型的な例として、単位面積当りの等価質量 m 、表面を伝播する自由波の速度 \bar{a} 、および線型減衰係数 α によって特徴づけられるような比較的簡単な境界面を考える。この場合、(2.2)の形の攪乱に対して Z は

$$Z = Md^2(a^2 - c^2) - icdK \quad (2.8)$$

となる。ここに

$$M = \frac{m}{\rho\delta}, \quad a = \frac{\bar{a}}{U_\infty}, \quad K = \frac{\alpha}{\rho U_\infty} \quad (2.9)$$

§ 3. 非粘性の極限における安定性

非粘性の極限 ($\nu = 0$) では基礎方程式、境界条件はそれぞれ

$$\Phi'' - \left(d^2 + \frac{U''}{U-c}\right)\Phi = 0, \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \Phi'(\infty) + d\Phi(\infty) = 0 \\ \Phi'(0) + \left\{\frac{U'(0)}{c} + \frac{Z}{c^2}\right\}\Phi(0) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

となる。(3.2)の第二式は $\hat{v} = \eta_t$, $Z\eta = -\hat{p}(0)$ から得られる。

(3.1)に Φ の共役複素数 Φ^* をかけ、流れの場の中で積分し、(3.2)の条件を考慮すると一つの関係式が得られるが、その虚数部をとると

$$C_i \left[\int_0^\infty \frac{U}{|U-C|^2} |\Phi|^2 dy + \left\{ \frac{U'(0)}{|C|^2} + \frac{2C_r Z_r}{|C|^4} \right\} |\Phi(0)|^2 \right] - \frac{Z_i}{|C|^2} = 0 \quad (3.3)$$

となる。ここに、 Z_r , Z_i はそれぞれ Z の実・虚数部を表わす。(3.3)はRayleighの判定条件式([]の中第一項のみ)の一般化であり、可撓境界の場合には非粘性の極限で不安定が存在する($C_i > 0$)のために、かならずしも速度分布が変曲点($U=0$)をもつ必要がないことがわかる。実際、粗い近似として一様流($U(y) \equiv 1$)を仮定すると簡単な固有値方程式

$$Z - d(1-C)^2 = 0 \quad (3.4)$$

が得られ、 Z に(2.8)を使うと一般に不安定($C_i > 0$)が存在することがわかる。これがK-H不安定と呼ばれるものである。この種の不安定は古くから知られているが、その取扱いは非粘性・一様流を仮定するのが常であり、full Orr-Sommerfeld方程式に基づいて説明される例はない。

変換

$$g(y) = (U-C)[U\Phi - (U-C)\Phi'] / \Phi \quad (3.5)$$

を導入すると、(3.1), (3.2)は

$$\left\{ \begin{array}{l} g' - (U-C)^{-2} g^2 + d^2 (U-C)^2 = 0, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\infty) = d(1-C)^2, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z - g(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

となる。(3.7)を満足する(3.6)の解は次の形に求めることができる;

$$g(y) = d(1-C)^2 [1 + dg_1(y, C) + \dots]. \quad (3.9)$$

(3.9)を用いると(3.8)は

$$Z - d(1-C)^2 [1 + dg_1(0, C) + \dots] = 0 \quad (3.10)$$

となる。これは(3.4)の一般化になっていることがわかる。従って(3.10)と完全な粘性問題との関係を明らかにすればK-H不安定は完全に説明されたことになる。

§ 4. $dR \gg 1$ の場合の固有値方程式

無限遠の条件((2.6)第一式)を満足する(2.3)の解は一般に

$$\Phi = B_1 \Phi_1 + B_3 \Phi_3 \quad (4.1)$$

と書かれる。通常 Φ_1 , Φ_3 はそれぞれ‘非粘性解’‘粘性解’と呼ばれる。 Φ_1 , Φ_3 の具体的な形が求まると、(4.1)と(2.6)の第二、三式から固有値関係が具体的に求まる。

$dR \gg 1$ に対して, ‘非粘性解’ Φ_1 は

$$\Phi_1 = \Phi^{(0)}(y) + (dR)^{-1} \Phi^{(1)}(y) + \dots \quad (4.2)$$

と求められる。一方‘粘性解’はWKB法を用いて

$$\Phi_3 = \exp[-\sqrt{dR}Q(y)] \cdot \{(U-C)^{-5/4} + (dR)^{-1/2} \varphi^{(1)}(y) + \dots\} \quad (4.3)$$

の形に求められる。ここに、

$$Q(y) = \int_{y_c}^y \sqrt{i(U-C)} dy, \quad U(y_c) = C.$$

(4.3)は転移点 y_c の近傍では使えないから、 y_c が境界面($y \equiv 0$)に近い場合には転移点近傍で成立つ解

$$\Phi_3 = \chi_3(\xi) = \chi_3^{(0)}(\xi) + \varepsilon \chi_3^{(1)}(\xi) + \dots \quad (4.3)'$$

を用いねばならない。ここに、

$$\xi = (y - y_c) \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon = \{U'(y_c) dR\}^{-1/3}.$$

$\chi_3^{(0)}$, $\chi_3^{(1)}$, \dots はAiry函数の積分の形で与えられる。

Φ_1 に(4.2)を、 Φ_3 に(4.3)'の表現を用いると次のような固有値方程式が得られる;

$$u + iV - \frac{cU'(y_c)}{Z} = \mathcal{F}(\varepsilon^{-1}y_c). \quad (4.4)$$

ここに、 $u + iV$ はLinの函数で、前節の $g^{(0)}$ と簡単な関係にある。 \mathcal{F} は所謂 modified Tietjens function。(4.4)は $Z \rightarrow \infty$ の極限で剛壁の場合のLinの式[3]に一致する。

一方、 Φ_3 にWKB型の解(4.3)を用いると、固有値方程式に対する次のような漸近展開が得られる;

$$\Delta_0 + (dR)^{1/2} \left[\Delta_0 J_1 - \frac{Z \cdot g^{(0)}}{c^2 Q'(y_c)} \right] + O[(dR)^{-1}] = 0. \quad (4.5)$$

ここに、 $\Delta_0 \equiv Z - g^{(0)}$ で、 J_1 は $\varphi^{(1)}(0)$ を含む有界な函数である。(4.5)から固有値は

$$C = C^{(0)} + (dR)^{1/2} C^{(1)} + \dots \quad (4.6)$$

の形に求められる。(4.6)を用いて(4.5)を再び展開し、 $(dR)^{1/2}$ の各冪の係数を0とおくと $C^{(0)}$, $C^{(1)}$...が次々に決定される; $C^{(0)}$ は前節で導いた非粘性固有値方程式 $\Delta_0 = 0$ の根で与えられ、 $C^{(1)}$ は $C^{(0)}$ を使って

$$C^{(1)} = \left[\frac{Z g^{(0)}}{C^2 Q'(0)} \right]_{C=C^{(0)}} / \left(\frac{\partial \Delta_0}{\partial C} \right)_{C=C^{(0)}} \quad (4.7)$$

で計算される。非粘性固有値方程式(3.10)と上述の手続によって、実際、K-H不安定が速度分布の非一様性を考慮した完全な粘性問題と関連づけられることがわかる。

§5. 中立曲線の例

剛壁の場合のLinの式に類似な(4.4)式と特にK-H不安定のような「非粘性型不安定」を記述するのに好都合な(4.5)式とを併用することにより dR の大きい領域の安定特性を調べることができる。しかし、境界が可撓性をもつ場合には、中立・増大攪乱($C_i \geq 0$)は通常の新近解法を適用し得る範囲を越えて更に低い dR の領域においても存在し得る。そのような領域の安定性は純数値計算に特にねばならない。

剛性係数 Z が(2.8)で与えられるような可撓境界面に沿う平行流 $U = \tanh(2y)$ に対して得られた計算例をFig. 2, 3に

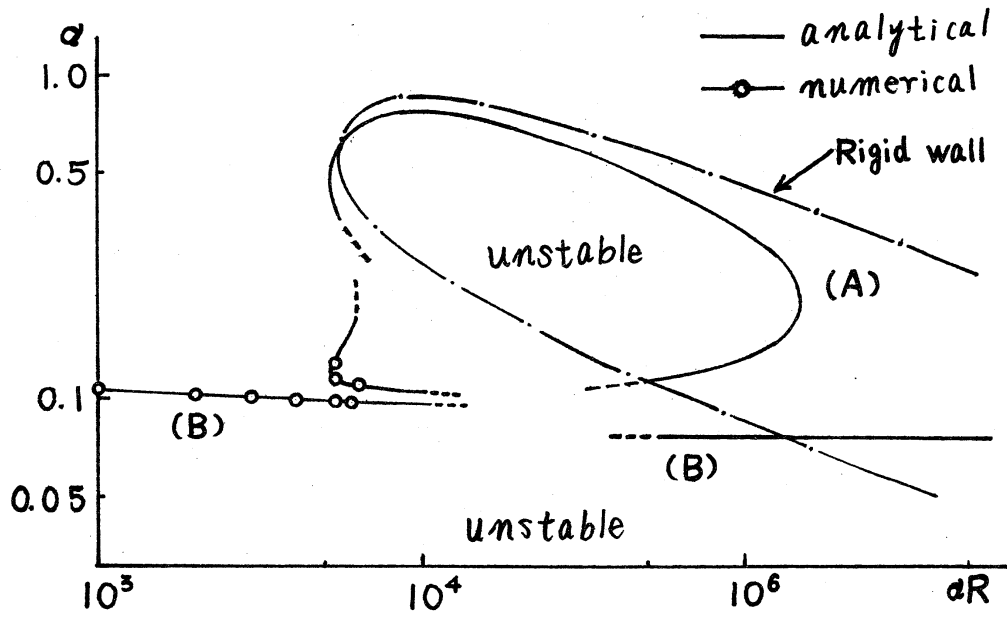


Fig. 2 中立曲線

$$M=15, \alpha^2=0.5, K=0.05$$

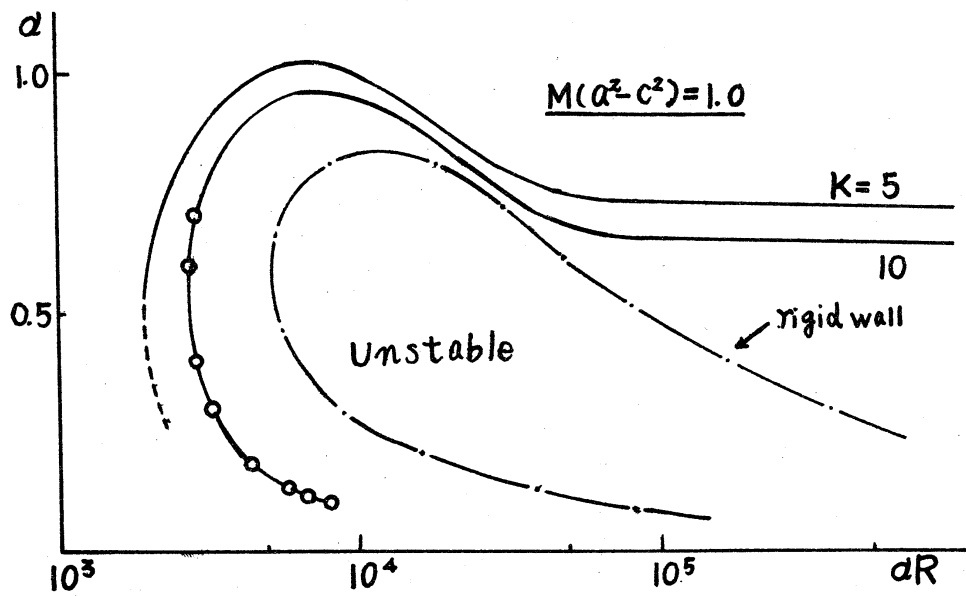


Fig. 3 中立曲線

示す。それ等の中立曲線は、これまで述べて漸近解法と電子計算機による純数値解法とによって計算されたものである。数値解法は Thomas [4] 流で行なった。なお、計算機は TOSBAC 3400 と FACOM 230-60 を用いた。

$Z \rightarrow \infty$ とすると剛壁の場合に移行するが、それには二つの場合が考えられる。すなわち、 $M \rightarrow \infty$ (あるいは $d^2 \rightarrow \infty$) の場合と $K \rightarrow \infty$ の場合。Fig. 2 は M が大きく K が小さい場合の例で、この場合 (A), (B) 二つの分枝が現われる。(A) は境界の可撓性による T-S 波の変容を示す。(B) は K-H 波に対応するもので、その不安定領域は $dR < 300$ まで伸びている。 $M \rightarrow \infty$ の極限では、(A) は剛壁の場合(一点鎖線)に一致し、(B) は dR 軸に「縮退」する。 M を小さくし、 K を大きくして行くと、(B) 分枝は d の大きい方に向って浮き上り、それに伴って (A) の不安定領域は縮小する。この傾向が極端にすすむと Fig. 3 のように (A) は消滅し、浮き上った (B) 分枝だけが残る。

参考文献

- [1] T. B. Benjamin: J. Fluid Mech. 9 (1960) 513.
- [2] M. T. Landahl: J. Fluid Mech. 13 (1961) 609.
- [3] C. C. Lin: Quart. Appl. Math. 3 (1945) 117.
- [4] L. H. Thomas: Phys. Rev. 86 (1953) 780.