

## 境界層の遷移と安定理論の関係

谷 一 郎

自由気流の乱れや表面粗さなどの外來の攪乱が十分に小さいとき、境界層の遷移は層流安定の線型理論の予知する波動（いわゆる Tollmien-Schlichting 波動）の増幅から始まる。外側の速度  $U_1$  が一定の平板に沿う境界層で、波動の増幅の可能なレイノルズ数の下限、いわゆる臨界レイノルズ数は、 $R_x = 6.8 \times 10^4$ ,  $R_{\delta^*} = 450$  ( $R_x = U_1 x / \nu$ ,  $R_{\delta^*} = U_1 \delta^* / \nu$ ,  $x$  = 平板表面に沿う前縁からの距離,  $\delta^*$  = 境界層の排除厚) である。 $U_1 = 24$  m/s, 気流の乱れ 0.03% で行われた Schubauer & Klebanoff の実験 [6] に例を採ると、臨界レイノルズ数は  $x = 4$  cm で到達されるけれども、その近くの下流では波動は極めて弱く、ようやく  $x = 80$  cm ( $R_x = 1.3 \times 10^6$ ) で実際に観察されるようになる。この波動は線型理論の示すとおり、最初は二次元的であるが、下流に移るに従って増幅され、それと同時に  $y$  方向（平板の表面にあって一様な流れに直角の方向）にほぼ周期的な変形を受ける。この変形のために、波動の  $y$

方向の渦度が局所的に増加し、瞬間的に不安定な速度分布が現われる。不安定の結果は一段周波数の高い変動を生じ、それがさらに周波数の高い変動を生じ、そのようにして結局、不規則な変動を持つ乱流が斑点状に発生する。乱流の斑点は独立に急速に成長し、それが境界層を蔽い尽くすとき、速度分布は完全に乱流型となる。この状態を遷移の終了と見れば、その開始は乱流斑点が発生し、速度分布が Blasius 分布から外れ始めるような状態である。図 1 には他の実験結果 [4][10][14] からの推測も交えて、これらの変化の起こる  $x$  または  $R_x$  の値を示してある。

最初二次元的な波動が  $y$  方向にほぼ周期的な変形を受けるのは、非線型効果がまず三次元的変形として現われるためであり、それに続いて起こる変化は、高次の非線型効果によるものと考えられる。波動の三次元的変形に伴って、境界層

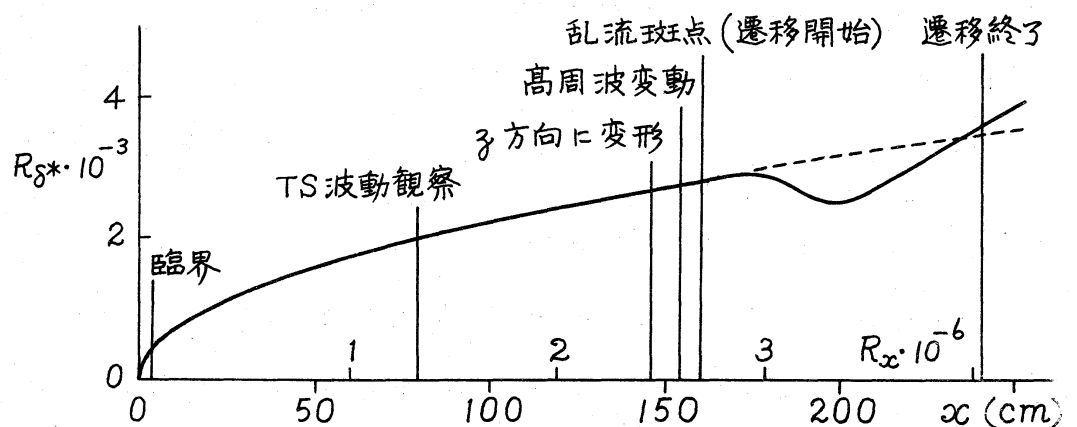


図 1

内の速度分布も Blasius 分布から変化するが、これはおもに  $x$  方向の渦によって運動量が再配分される結果であつて、二次元的なレイノルズ応力による変形は極めて僅かである。この意味で、波動の非線型効果を二次元に限つて計算することは、少なくとも境界層の遷移においては、価値が乏しいように思われる。それにしては線型理論の成り立つ範囲は、遷移開始までの距離の 90% を占めており、遷移開始を線型理論に基づいて推定する試みがなされてよいわけである。

○ ○ ○ ○ ○

このような試みは実際に Smith & Gamberoni [8], また独立に Ingen [9] によつて行なわれた。特に前者は、それまでに乱れの少ない風洞または飛行機による実験で観察された滑らかな表面上の遷移について、線型安定理論が遷移開始点まで適用されるものと仮定し、遷移開始点で最大の増幅倍率を與える波動を求めた。この計算では、時間的に発達する波動が用いられたが、新しく繰り返された計算 (Jaffe, Okamura & Smith [21]) では、流れの方向に空間的に発達する波動が用いられている。図 2 は [21] から採つた安定線図であつて、波動は  $\exp\{i(\alpha_r + i\alpha_i)x - i\beta r t\}$  に比例するものと仮定され、 $x$  は物体表面に沿う距離、 $t$  は時間、 $U_1$  は境界層外側の速度、 $\delta^*$  は境界層の排除厚、 $\alpha_r \delta^*$  は無次元の波数、 $a = -\alpha_i \delta^*$  は無次元

の空間的増幅率,  $\omega = \nu\beta_r/U_1^2$  は無次元の周波数,  $R_{\delta^*} = U_1\delta^*/\nu$  と  $R_x = U_1x/\nu$  はレイノルズ数,  $\beta$  は  $U_1 \propto x^{\beta/(2-\beta)}$  に現われる Hartree 数である。この線図を用いると, 與えられた  $\omega$  の波動が  $x_1$  から  $x_2$  までの間に増幅される倍率  $A = \exp\{-\int_{x_1}^{x_2} \alpha_i dx\}$  が計算される。 $x_1$  として中立曲線 ( $a=0$ ) の下半枝に相当す

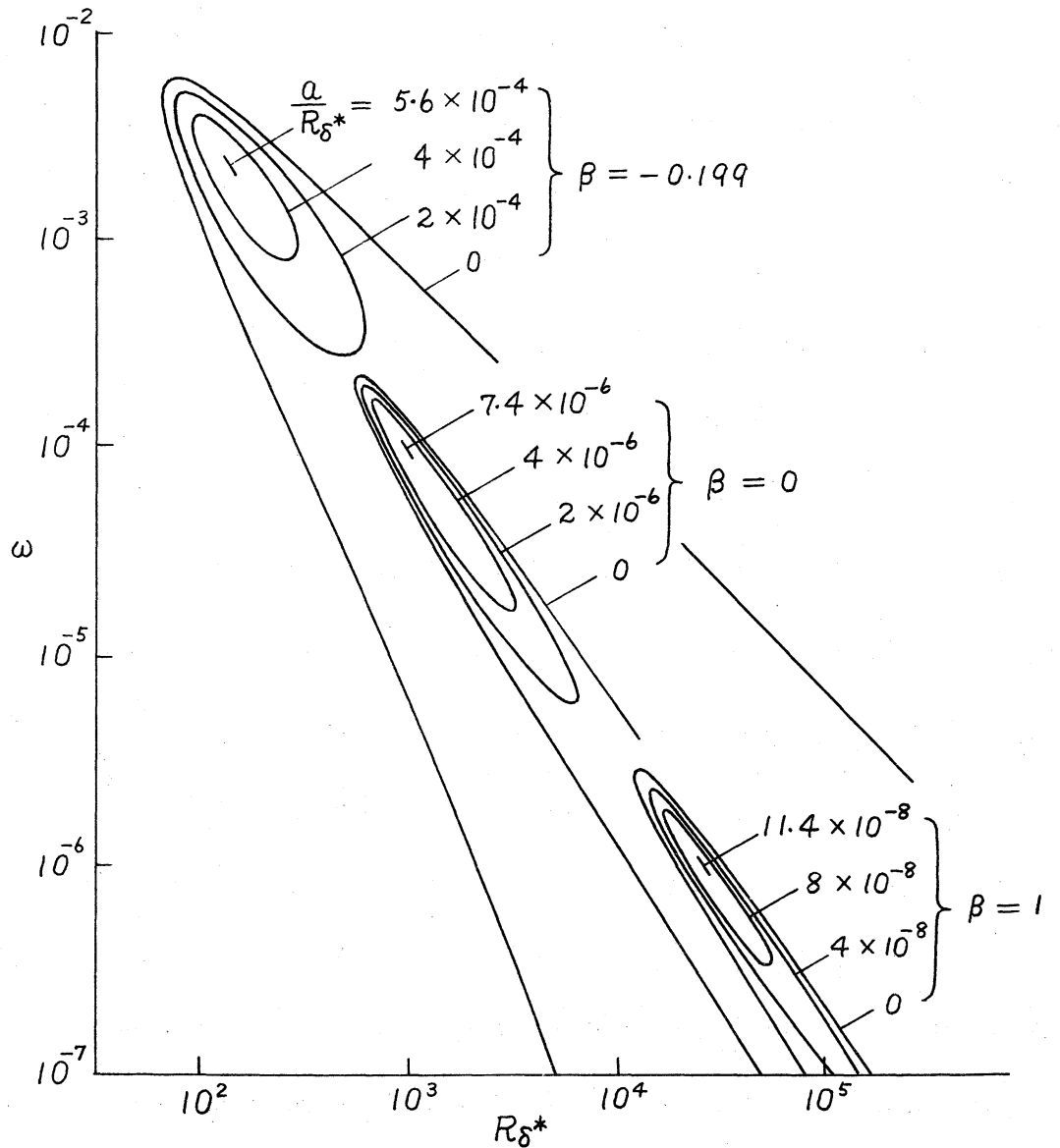
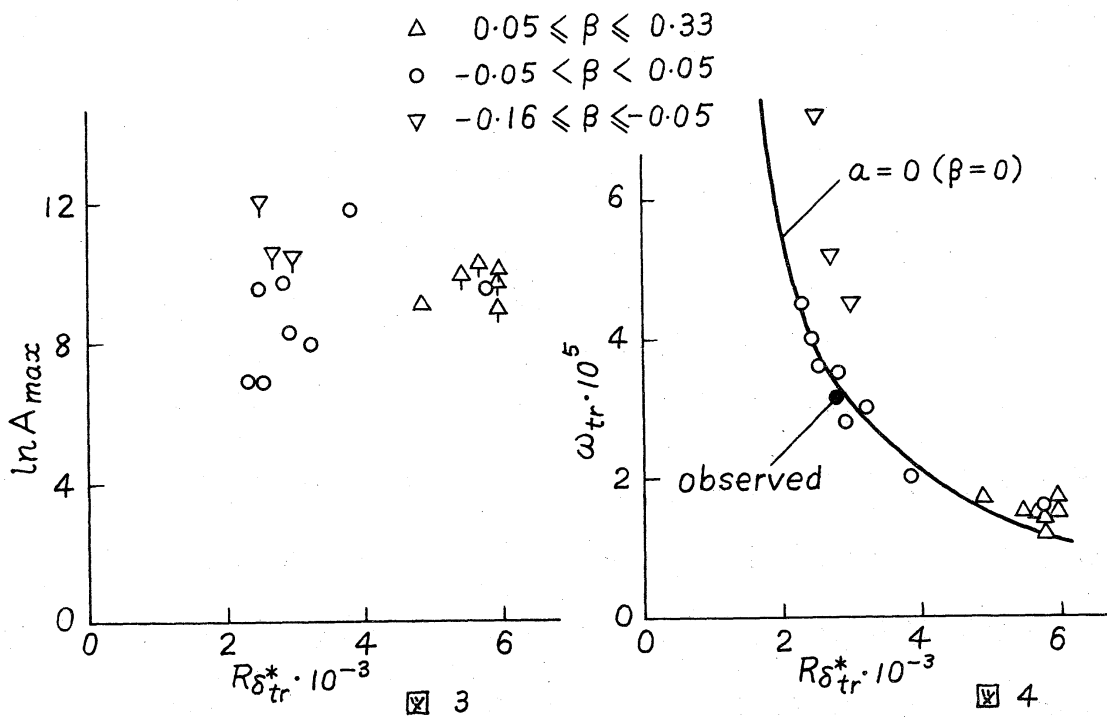


図 2

る値,  $\alpha_2$  として観察された遷移開始点を採るとき, 最大増幅倍率  $A_{max}$  が図3に示すように求められている。ここで  $R_{\delta_{tr}}^*$  は遷移開始点での境界層レイノルズ数, 記号  $\Delta$   $\circ$   $\nabla$  は遷移開始点での  $\beta$  がそれぞれ正, ほぼ0および負であることを示す。  
 $\ln A_{max}$  は 6.8 から 12.1 の間に散らばるが, [21] ではその平均



を 10 と見て,  $A_{max} = e^{10}$  を遷移開始推定の条件に用いることを薦めている。大体的見当をつけるにはよいであろうが, 図3の点の散乱は著しく, 十分に満足すべきものとは言い難い。図3で記号の下に細線を付けたものは, 風洞の乱れが幾分大きい場合, まねは物体表面の平滑が幾分ある場合を示すが, このような場合に特に  $A_{max}$  が小さくなるような傾向も見られ

ないので、 $A_{max}$  の値にのみ依存するのは疑問に思われる。それよりむしろ、遷移開始点で最大増幅倍率を與える無次元周波数  $\omega_{tr}$  に注意を払うべきではなからうか。図4はこのことを裏付けるために、遷移開始点での  $R_S^*$  と  $\omega$  の関係を示したものであるが、ここで少なくとも  $\beta$  が0に近いものは、ほぼ一本の曲線を形成し、しかもその曲線は図2の中立曲線の上分枝とほとんど一致している。境界層の遷移に先立って観察される波動の周波数が、中立曲線の上分枝に乗ることはよく知られているが[2]、遷移開始点の周波数も上分枝に乗ることは新しい知見である。もつともこの場合の周波数は計算値であつて、実際に観察された値ではない。このことによる不確かさを吟味する一助として、実際に遷移開始点で周波数が観察された一例[14]を黒円で図4に記入してある。

なお遷移開始点での  $R_S^*$  が  $\omega$  の函数になることは、超音速の流れで問題視されている単位レイノルズ数効果に一つの説明を與える。なぜなら、波動の波長を  $l$  とするとき、 $\omega$  はほぼ  $U_1 l / \nu$  に逆比例するので、もし與えられた実験装置の種々の条件で  $l$  が大体一定に保たれるならば、遷移開始点の  $R_S^*$  は  $U_1 / \nu$  の函数になるからである[20]。

○ ○ ○ ○ ○

上述の計算では、外來攪乱が白色スペクトルを持つこと

が暗に仮定されている。もしこの仮定が実際に成り立つならば、卓越する波動の周波数は下流に行くほど増すことになるはずである。しかし従来の実験の多くは、振動リボンなどで特定の周波数の波動が人工的に加えられたものであり、自然に発生する遷移で変動の周波数分析の行なわれたものは皆無である。ただ僅かに二次元粗さの下流で、速度分布が剥離型から Blasius 型に回復するにつれて、卓越周波数の減少が観察された Klebanoff の実験 [18] を挙げ得るに過ぎない。自然遷移について、周波数分析を含むよい実験のなされることが望ましく思われる。

強制遷移についても、行なわれてほしい実験がある。図 5 は Klebanoff, Tidstrom および Sargent の実験 [14] で、 $U_1 = 15.2 \text{ m/s}$ , 平板の前縁から  $x_r = 89 \text{ cm}$  の位置のリボンによつて、中立曲線のほぼ中間にある周波数  $\beta_r/2\pi = 145 \text{ Hz}$  の波動を興えたとき、リボンの下流の種々の距離  $x - x_r$  に対して、平板から一定の距離  $y = 1.14 \text{ mm}$  で測られた速度変動の  $x$  成分の二乗平均平方根  $u' = \sqrt{u'^2}$  の変化を示す。  $u'$  そのものでなくて、 $x - x_r = 7.6 \text{ cm}$  での  $u'$  の値  $u'_0$  で割つた値を示してある。  $u'_0/U_1$  が小さくある値以下ならば、  $u'/u'_0$  は一つの曲線を形成し、  $x$  方向の位置が peak と呼ばれる  $u'$  の大きいところでも、または valley と呼ばれる  $u'$  の小さいところでも、同じ一つの曲線

を形成する。そしてある距離まで増幅されて後に減衰され、乱流への遷移に到達しない。増幅から減衰に移る位置は、中立曲線の上分枝に相当し、線型理論の示すところに従っている。しかし  $u'_0/\sigma_1$  がある値を越えると、 $u'/u'_0$  は線型範囲に共通の曲線から外れ、peak の場合には急に増加するが、valley の場合には一旦減少してから増加する。そしてどちらの場合にも、 $u'/u'_0$  が最大値を越えて後に遷移をもたらしている。このような peak と valley の弁達で表徴される  $z$  方向の変化は、波動の非線型効果によるものであるが、いまの例でそれが始まるのは、 $u'/u'_0$  が線型範囲に共通の曲線から外れるところで

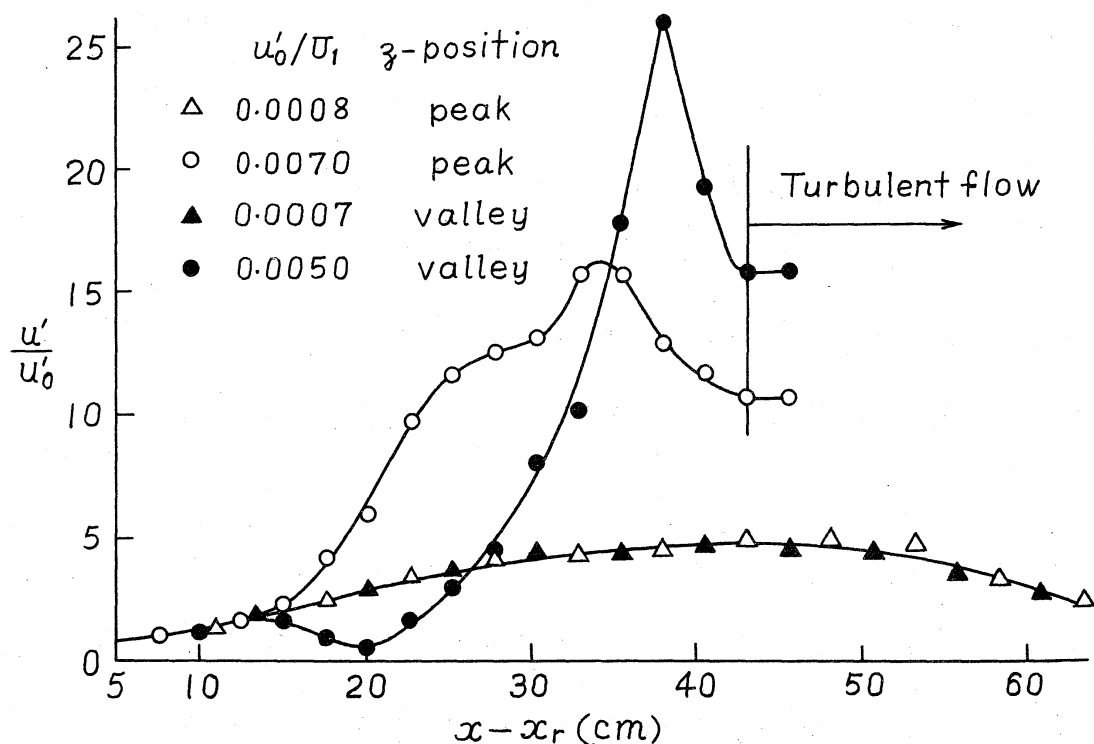


図 5



の  $u'/U_1$  の値 0.013 によつて表わされる。測定に選ばれた  $y$  の値は境界層の厚さのほぼ  $1/4$  であつて、 $u'/U_1$  の  $y$  方向の分布の最大値に近い値を與えるような距離である。したがつて  $u'/U_1 = 0.013$  という値は、分布の最大値を示すものと考えてよい。この臨界的な値は、[10]にある同様の実験では 0.014 と 0.021 であり、三つの値を單純に平均するときは 0.016 という値が得られる。

このような  $u'/U_1$  の値が、線型範囲の限界を表わす普遍的な数であるかどうかは明らかでない。しかしそれを吟味するため、実験を行なう価値はあるように思われる。図 5 に示す例では、線型範囲の  $u'/u'_0$  は  $x-x_r = 43 \text{ cm}$  で最大値 5 に達しているので、 $u'_0/U_1 = 0.013 \div 5 = 0.0026$  までは、遷移が起こらないはずである。そして  $u'_0/U_1$  が 0.0026 を超過すると、まず  $x-x_r = 43 \text{ cm}$  の位置から、非線型効果が現われてくるのではないかと想像される。このようにして、もし  $u'/U_1$  の臨界値が定められるものとするれば、遷移開始の推定は一層合理的なものになるであらうと考えられる。

○ ○ ○ ○ ○

最後に、境界層外の流れの速度勾配（圧力勾配）の遷移に及ぼす影響について述べる。図 6 はこの問題に対して教科書に見られる解答であつて、線型安定理論による臨界レイノ

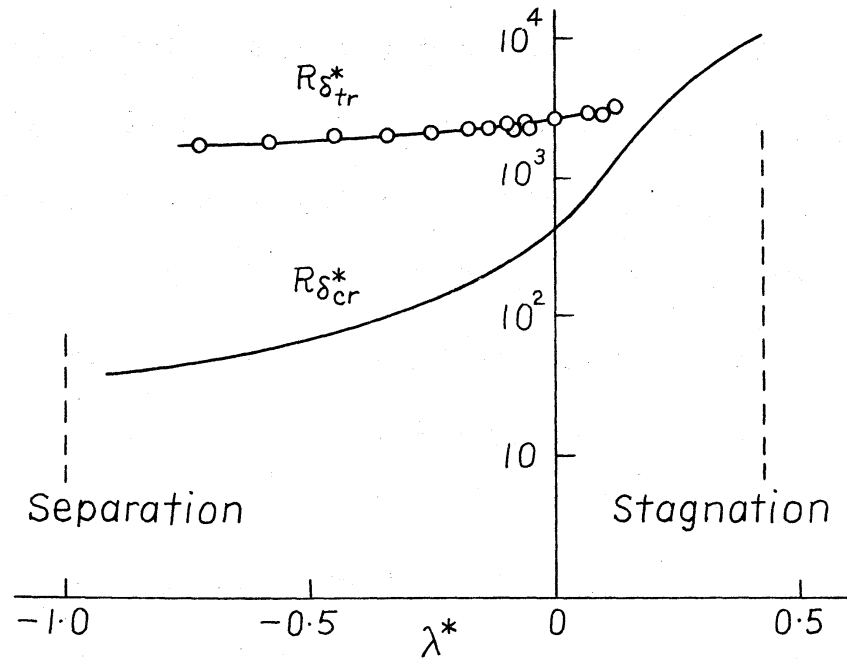


図 6

ルズ数  $R_{\delta_{cr}}^*$  [16] も, Liepmann の実験 [3] による遷移開始点のレイノルズ数  $R_{\delta_{tr}}^*$  も, Pohlhausen 数  $\lambda^* = (\delta^{*2}/\nu)(dU_1/dx)$  の増加とともに増加することを示している。しかし詳しく見れば,  $R_{\delta_{cr}}^*$  の増加するほどには  $R_{\delta_{tr}}^*$  は増加しておらず, 臨界レイノルズ数を越えてからの非線型効果に, 速度勾配の影響の現われることが明らかである。しかも, 淀み点に近い加速の著しいところ, つまり  $\lambda^*$  の大きいところでは, 自然遷移の実験がほとんど行なわれていない。

もっとも粗さによる遷移については, 正の速度勾配の流れで行なわれた実験がある。粗さが二次元的な円柱(針金)の場合には, Fage & Preston [1] および 谷, 井内 および 山本

[5] の実験があり、そのデータから遷移がほぼ粗さの位置から始まる状態の臨界レイノルズ数  $(kU_1/\nu)_{cr}$  を求めると[11]、図7に示すような結果が得られる。ここで  $k$  は粗さの高さ、 $\lambda^*$  は粗さの位置での Pohlhausen 数である。気流の乱れの大きい場合[1]も小さい場合[5]も、 $(kU_1/\nu)_{cr}$  は  $\lambda^*$  の増加とともに減少し、加速流で粗さによる遷移の早められることを示している。次に球または直径に等しい高さの円柱のような三次元的な粗さの場合には、速度勾配のない流れで Klebanoff, Schubauer & Tidstrom [7], 望月 [13], および 谷, 菰田, 小松 および 井内 [15] の実験があり、淀み点に近い正の速度勾配の流れで Peterson & Horton [12] および Dobbinga [17] の実験がある。これらの実験の結果から、遷移が粗さの位置から楔状に

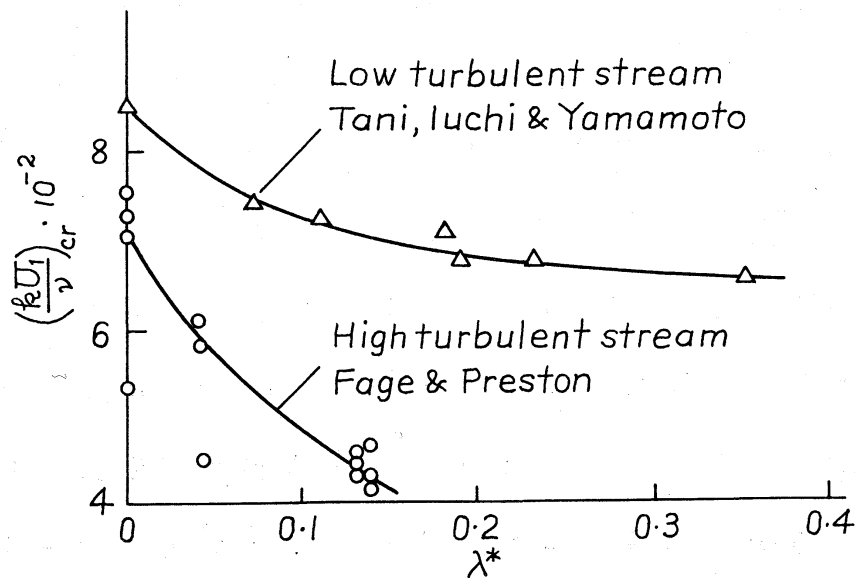


図 7

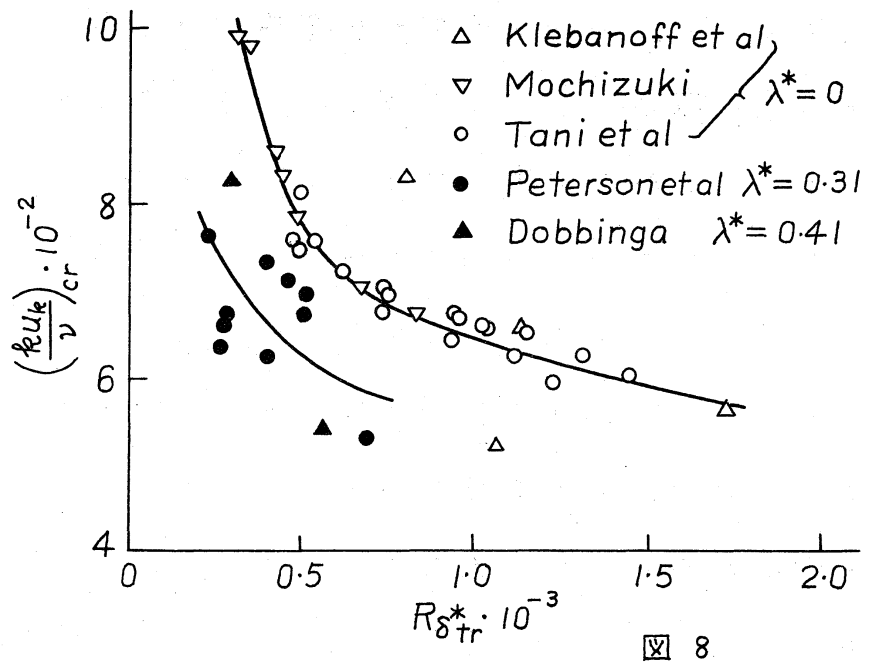


図 8

広がる状態の臨界レイノルズ数  $(k u_k / \nu)_{cr}$  を求めると、その値は図8に示すようになる。ここで  $u_k$  は粗さの頂点での粗さのない場合の流束の速度、 $R_{\delta_{tr}^*}$  は粗さの位置での境界層レイノルズ数である。この実験の結果も図7と同様に、加速流で粗さによる遷移の促進される傾向を示している。

以上に述べた事実は一貫して、淀み点に近い加速流での境界層の遷移が、従来信じられていたよりも早期に起こる可能性を暗示する。このような可能性は、レイノルズ応力の方程式を適当な完結仮説によって解く Donaldson [19] の数値計算で支持されるようであるが、安定理論の非線型取扱いによる研究の進められることが、さらに一層望ましいことと思われる。

## 文 献

1. A. Fage & J. H. Preston, Proc. Roy. Soc. London, A, 178, 201 (1941).
2. G. B. Schubauer & H. K. Skramstad, NACA ACR (1943) [= NACA TR 909 (1948)].
3. H. W. Liepmann, NACA ACR 4J28 (1945).
4. H. W. Bennett, Rep. Kimberly-Clark Corp., Neenah, Wisconsin (1953).
5. I. Tani, M. Iuchi & K. Yamamoto, Rep. Inst. Sci. Technol., Tokyo Univ.,  
8, 171 (1954).
6. G. B. Schubauer & P. S. Klebanoff, NACA TN 3489 (1955).
7. P. S. Klebanoff, G. B. Schubauer & K. D. Tidstrom, J. Aero. Sci., 22, 803  
(1955).
8. A. M. O. Smith & N. Gamberoni, Douglas Aircraft Co., Rep. ES-26388 (1956).
9. J. L. van Ingen, Aero. Engng. Dept., Delft, Rep. VTH-74 (1956).
10. P. S. Klebanoff & K. D. Tidstrom, NASA TN D-195 (1959).
11. J. C. Gibbings, ARC CP 462 (1959).
12. J. B. Peterson & E. A. Horton, NASA Memo. 2-8-59L (1959).
13. M. Mochizuki, J. Phys. Soc. Japan, 16, 995 (1961).
14. P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom & L. M. Sargent, J. Fluid Mech., 12, 1  
(1962).
15. I. Tani, H. Komoda, Y. Komatsu & M. Iuchi, Aero. Res. Inst., Tokyo Univ.,  
Rep. 375 (1962).
16. L. Rosenhead, Laminar Boundary Layers (Oxford, 1963), Fig. 9.14.
17. E. Dobbings, AGARDograph 97, 503 (1965).
18. P. S. Klebanoff, Proc. 11 Int. Congr. Appl. Mech., Munich 1964, 803 (1966).
19. C. duP. Donaldson, AIAA Paper 68-38 (1968).
20. E. Reshotko, AIAA Paper 68-669 (1968).
21. N. A. Jaffe, T. T. Okamura & A. M. O. Smith, AIAA Paper 69-10 (1969).