数理解析研究所講究録
第100巻 1970年 22-32

有限群のコホモロジーに関するAtiyahの理論，そのArtin-Tate群への応用

東大教養　中村得之

§1　序

有限群のコホモロジー群については様々の結果が得られているがその具体的な構造については未知の部分が多い。以下紹介するAtiyahの結果は，有限群のコホモロジー環と表現環との間の関係を明らかにするものである。

すなわち，Gを有限群，$H^*(G;\mathbb{Z})$を整係数コホモロジー環，$R(G)$を複素数体上の表現のつくる表現環とするとき，次の性質をもつ以下にのべる性質 a)〜f) をもつスペクトル系列が存在し

$$E_2^p = H^p(G;\mathbb{Z}), \qquad E_\infty^p = R_p(G)/R_{p+1}(G)$$

が成立する。こゝで $R(G)=R_0(G)\supset \quad \supset R_p(G)\supset R_{p+1}(G)\supset$ は$R(G)$のあるfiltrationである。

a) 準同型 $G\to G'$ はスペクトル系列の準同型 $E_r'\to E_r$ をひきおこす。

b) 単射 $G \to G'$ はスペクトル系列の準同型 $E_r \to E_r'$ をひきおこす.

c) $E_r = \sum E_r^p$ は環の構造をもつ

d) $d_{2r}: E_{2r}^p \to E_{2r}^{p+2r}$ は 0 である

e) $R_{2k-1}(G) = R_{2k}(G)$

f) $I(G)$ を augmentation ideal とするとき,
$R_p(G)$, $I^p(G)$ は $R(G)$ に同じ位相を定める

§2 表現

Gを有限群, Mを複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間 $\rho: G \to GL(M)$ を表現, Mをρの表現加群とみたときこれを $M(\rho)$ と書くことにすると次のことが成り立つことはよく知られている.

1. $M(\rho \oplus \sigma) = M(\rho) \oplus M(\sigma)$
2. $M(\rho \otimes \sigma) = M(\rho) \otimes M(\sigma)$
3. $M(\lambda^i \rho) = \lambda^i M(\rho)$ λ^i は i 次の外積代数を表わす
4. $f: H \to G$ を準同型とするとき, $M(f^*\rho) = M(\rho)$.
5. $f: G \subset H$ を単射とするとき, $M(f_*\rho) = \mathbb{Z}H \otimes_G M(\rho)$

特に Frobenius の定理によれば, $f_*(\rho \otimes f^*\sigma) = f_*\rho \otimes \sigma$ が成りたつ.

$[\rho]$ を ρ を含む表現の同値類, $R(G)$ を表現環とすれば

$$R(G) \cong \sum \oplus \mathbb{Z}[\rho] / ([\rho \oplus \sigma] - ([\rho] + [\sigma]))$$

が成り立つ。ここで和はすべての表現の類にわたり, I の下つイデヤルは(　)のもの全体で生成される両側イデヤルを表わす. augmentation $\varepsilon : R(G) \to \mathbb{Z}$ を $\varepsilon([\rho]) = \dim \rho$ で定義すれば, augmentation ideal $I(G)$ は $\mathrm{Ker}\,\varepsilon$ となる. $R(G)$ の $I(G)$-完備化と $\hat{R}(G)$ を $\varprojlim_n R(G)/I(G)^n$ で定義し, $\hat{I}(G)^p = \varprojlim_n I(G)^p/I(G)^{p+n}$ とかくことにする

§3　K theory

X を有限 CW 複体, ξ を X 上の複素ベクトル束とする. $E(\xi)$ を ξ の全空間, $E(\xi)_x$ を点 $x \in X$ 上のファイバーとする. このとき次の性質が成り立つ.

1. $E(\xi \oplus \eta)_x = E(\xi)_x \oplus E(\eta)_x$
2. $E(\xi \otimes \eta)_x = E(\xi)_x \otimes E(\eta)_x$
3. $E(\lambda^i \xi)_x = \lambda^i E(\xi)_x$
4. $f : Y \to X$ を連続写像とするとき, $E(f^*\xi)_y = E(\xi)_{f(y)}$.
5. $f : X \to Y$ を有限被覆とするとき, $E(f_*\xi)_y = \sum_{f(x)=y} \oplus E(\xi)_x$ と定める.

表現の場合と同様に, $f_*(\xi \otimes f^*\eta) = f_*\xi \otimes \eta$ がなりたつ.

$[\xi]$ を ξ と含むベクトル束の同値類とするとき, $K(X)$ を

$$K(X) = \sum \oplus \mathbb{Z}[\xi] / ([\xi \oplus \eta] - ([\xi] + [\eta]))$$

$$\fallingdotseq [X, \mathbb{Z} \times B_U]$$

で定義する. 記号は §1 の場合と同様とする. $x_0 \in X$ を定め,

$i:\{x_0\}\subset X$ を移入写像とすれば $i^*: K(X)\to K(x_0)\cong\mathbb{Z}$ が定義される. $\tilde{K}(X)=\mathrm{Ker}\, i^*$ と書く. $SX=S^1\times X/(S^1\times x_0\cup *\times X)$ をXの懸垂とすれば Bott の周期性により $\tilde{K}(S^2X)\cong\tilde{K}(X)$ が成りたつ. そこで $\tilde{K}^i(X)=\begin{cases}\tilde{K}(X) & i\equiv 0 \mod 2\\ \tilde{K}(SX) & i\equiv 1 \mod 2\end{cases}$ と定義し, さらに $\tilde{K}^i(X/Y)=K^i(X,Y)$, $\tilde{K}^i(X\cup\{\phi\}/\{\phi\})=K^i(X)$ (ϕ はXに属しない任意の点) と書く.

一般にXを skeleton 有限なCW複体とするとき, X^m を m-skeleton とすれば移入写像 $i^n_m: X^m\subset X^n$ は準同型 $(i^n_m)^*: K^i(X^n)\to K^i(X^m)$ をひきおこす. $K^i_p(X^n)=\mathrm{Ker}\,(i^n_{p-1})^*$ とおく. $K^i(X)$ を $\varprojlim_n K^i(X^n)$ で定義し, $K^i_p(X)=\varprojlim_n K^i_p(X^{n+p})$ とかくことにする. $i_m: X^m\subset X$ を移入写像とすれば, $K^i_p(X)=\mathrm{Ker}\,(i_{p-1})^*$ となる. $GK^i(X)=\sum\oplus G_pK^i(X)$, $G_pK^i(X)=K^i_p(X)/K^i_{p+1}(X)$ とおく.

§4 cohomology

Xを Hausdorff 空間, u を特異cochain, $u(s)$ をその特異単体 s 上の値とすれば, §§2〜3 の 1〜5 に対応する性質が成り立つことはよくしられている. 特に $f_*(u\cup f^*v)=f_*u\cup v$ が成り立つ.

§5 Adams 作用素

R を可換な半群とするとき, 写像 $\lambda^i: R\to R$ がすべての負でない整数 i に対して定義され, 次の性質を満足

しているものとする

i) $\lambda^0(x)=1$

ii) $\lambda^1(x)=x$

iii) $\lambda^k(x+y)=\sum_{i+j=k}\lambda^i(x)\lambda^j(y)$

このようなものを λ-半群とよぶ。R を λ-半群とすれば

$\lambda_t: R\longrightarrow R[[t]]$ を $\lambda_t(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i(x)t^i$ で定義する。このとき

Adams 作用素 $\psi_t: R\longrightarrow R[[t]]$ を $\psi_t=-t\frac{d}{dt}(\log\lambda_t)$

で定める。$\psi_t(x)=\sum\psi^i(x)t^i$ とおけば次のことが成りたつ。

i) $\sum_{i=0}^{n}\lambda^i(x)t^i=\prod_{j=1}^{n}(1+\xi_j t)$

$\psi^i(x)=\sum_{j=1}^{n}(\xi_j)^i \qquad i\leq n$

ii) $\psi^0(x)=1$

iii) $\psi^1(x)=x$

iv) $\psi^i(x+y)=\psi^i(x)+\psi^i(y)$

例1 G 有限アーベル群とする。$\psi^i: R(G)\longrightarrow R(G)$

は次の性質をもつ

v) $\psi^i(xy)=\psi^i(x)\psi^i(y)$

vi) $\psi^i(\psi^j(x))=\psi^{ij}(x)$

さらに $\psi^i(I(G)^n)\subset I(G)^n$ が成り立つ。従って ψ^i は

$\psi^i:\hat{R}(G)\to\hat{R}(G)$ に拡張され、しかも $\psi^i(\hat{R}_p(G))\subset\hat{R}_p(G)$

が成り立つ

例2 X を skeleton 有限な CW 複体とすれば、

易に $\psi : K(X) \longrightarrow K(X)$ が定義され，しかし $\psi^i(K_p(X)) \subset K_p(X)$ が成り立つ．

§5 Atiyah の定理

X を skeleton 有限な CW 複体とする．$\pi_1(X) = G$ を有限群，$\hat{X} \longrightarrow X$ を普遍被覆とする．$f : H \subset G$ を移入写像とすれば 商空間 $Y = \hat{X}/H$，$X = \hat{X}/G$ が定まり，被覆写像 $f : Y \longrightarrow X$ が定義される．

$M(\rho)$ を G の表現加群とすれば，X 上のベクトル束 $E(\rho)$ を $\hat{X} \underset{G}{\times} M(\rho)$ によって定義することができる．

$$\alpha = \alpha_X : R(G) \longrightarrow K(X)$$

を $\alpha(\rho) = E(\rho)$ で定義すると，α は次の性質をもつことが容易に示される．

1. $\alpha(\rho \oplus \sigma) = \alpha(\rho) \oplus \alpha(\sigma)$
2. $\alpha(\rho \otimes \sigma) = \alpha(\rho) \otimes \alpha(\sigma)$
3. $\alpha(\lambda^i \rho) = \lambda^i \alpha(\rho)$
4. $\alpha_Y(f^* \rho) = f^* \alpha_X(\rho) \qquad \rho \in R(G)$
5. $\alpha_X(f_* \rho) = f_* \alpha_Y(\rho) \qquad \rho \in R(H)$

B_G を G の分類空間とし，γ_G を B_G 上の普遍ファイバー束とする。分類写像 $f_X : X \longrightarrow B_G$ により X の普遍被覆空間が得られるものとすれば，これと正則表現 $\rho : G \longrightarrow U(n)$ からひきおこされる写像 $B_\rho : B_G \longrightarrow B_{U(n)}$ を用いると $\alpha(\rho)$

の分類写像は $B_p \circ f_X$ で表わされることがわかる

こゝで $X = B_G$ とする。

$$\alpha = \alpha_G : R(G) \longrightarrow K(B_G)$$

が定義されるが，α は條件 $\alpha(I(G)^n) \subset K_{2n}(B_G)$ を満足し，したがって

$$\alpha : \hat{R}(G) \longrightarrow K(B_G)$$

に拡張される．特に G がアーベル群であれば $\psi^i\alpha = \alpha\psi^i$ が成りたつ．

Atiyah の主定理の一つは次のようになる

<u>定理</u>　$\alpha : \hat{R}(G) \longrightarrow K(B_G)$

をさきに与えた filtration に関し位相同型となる．

証明は巡回群の場合，可解群の場合のそれぞれについて證明したのち，Brauer の定理を用いて一般の場合を導く．

§6　スペクトル系列

冒頭にのべたスペクトル系列は，上記の定理と K-理論に関する，Atiyah-Hirzebruch による次の基本的な定理を組合わせて得られる

<u>定理</u>　X を skeleton 有限，かつ $H^q(X; \mathbb{Z})$ がすべての自然数 $q > 0$ に対して有限アーベル群となるような CW 複体とする．このときスペクトル系列 $\{E_r^p(X)\}$ で，$E_2^p(X) = H^p(X; \mathbb{Z})$，$E_\infty^p(X) = K_p^*(X)/K_{p+1}^*(X)$ となりしかも

次の性質を満たすものが存在する

a) 連続写像 $f: Y \to X$ はスペクトル系列の準同型 $E_r^p(X) \to E_r^p(Y)$ をひきおこす. しかしこの準同型は f のホモトピー類にしかよらない.

b) 有限被覆 $f: Y \to X$ はスペクトル系列の準同型 $E_r^p(Y) \to E_r^p(X)$ をひきおこす

c) $H^*(X;\mathbb{Z})$ のカップ積は $E_r\ (2 \leq r \leq \infty)$ の積を定め, これは $r=\infty$ の場合 　　　の積と一致する

d) 偶数次の微分 d_{2r} はすべて 0 であり, $d_3 = Sq^3$, $\dim x \leq 2$ であれば, すべての r に対して $d_r(x) = 0$ となる

上記のスペクトル系列において, X を有限群 G の分類空間 B_G ととれば, §1 にのべたスペクトル系列が得られる. 実際, その場合には $H^q(B_G;\mathbb{Z}) = H^q(G;\mathbb{Z})$, § の結果により $K^*(B_G) \cong \hat{R}(G)$ となるからである. 特にこの場合には単射 $G \to G'$ によってひきおこされるスペクトル系列の準同型 $E_r \to E_r'$ は $r=2$ の場合には transfer と, $r=\infty$ の場合には誘導表現と一致する

例 $G = T_n$, すなわち位数 n の巡回群とする. このときはコホモロジー群 $H^q(G;\mathbb{Z})$ は偶数次元以外は 0 となるから, 性質 d) により $H^*(G;\mathbb{Z}) \cong G\hat{R}(G)$. よくしられてい

るように $R(G)\cong \mathbb{Z}[X]/(X^n-1)\mathbb{Z}[X]$, Xの同値類を x とかくことにすれば $I(G)^k/I(G)^{k+1}\cong \mathbb{Z}_n(\bar{x}-1)^k$ となる. ここで $\bar{x}$ は x の剰余類を表わすものとする. いま $R_{2k}(G)=R_{2k-1}(G)=I(G)^k$ とおけば $GR(G)\cong \mathbb{Z}[\bar{x}-1]$, ただし $n(\bar{x}-1)=0$ となる. このとき § に与えた準同型 $\alpha: R(G)\to K^*(B_G)$ は階位のついた代数としての同型 $GR(G)\to GK^*(B_G)$ を与える.

§7　Artin-Tate 群の周期について.

G を有限群, G_p をその p-Sylow 群とする. Artin-Tate によれば, 次の二条件は同値である

1_p　$H^q(G;\mathbb{Z})_p$ の位数が G_p の位数と一致するような自然数 $q\geq 1$ が存在する. H^q_p は H^q の p 成分を表わす.

2_p　G_p は巡回群又は一般四元数群である.

このような群に対し, 1が成り立つ q を G の p-周期とよぶ. すべての素数に対し $1_p=2_p$ が成り立つ群を Artin-Tate 群とよぶ.

G が p-周期をもてば, $p\geq 3$ のとき $G_p\cong T_{p^h}$ となるが, このとき移入写像 $i: G_p\to G$ は, $H^*(G;\mathbb{Z})_p$ から $H^*(G_p;\mathbb{Z})$ への同型写像をひきおこすから, $H^q(G;\mathbb{Z})_p$ は q が偶数以外では 0 となる. d を p-周期とすれば, このことから d が偶数であることもわかる. さらに§6を考慮すれば

これは $i^*: K(B_G) \to K(B_{G_p})$ のひきおこす写像

$$G_d K(B_G) \longrightarrow G_d K(B_{G_p}) \cong Z_{p^h}$$

が同型写像となる。

以下，p 周期の上からの評価を与える一つの結果をのべる。

<u>定理</u>　ある素数 $p \geqslant 3$ に対し，$G_p \cong T_{p^h}$ が成り立つものとすれば $2\varphi(p)$ は p 周期となる。

<u>証明</u>　一般に G を有限群とするとき，移入 i: $G_p \to G$ に対し $i^*: K(B_G) \to K(B_{G_p})$ は 0 でないことがしられている。したがって $x \in K(B_G)$ を適当にとれば $i^*x \in K_k(B_{G_p})$，$i^*x \notin K_{k+1}(B_{G_p})$ となる。さらに $i: GK(B_G) \to GK(B_{G_p})$ は $GK(B_G)_p$ から $GK(B_{G_p})$ への同型をへの同型写像をおこすから i^*x の $G_kK(B_{G_p})$ における剰余類は $G_kK(B_{G_p})$ のある直和因子の生成元にとることができる。特に $G_p \cong T_{p^h}$ の場合には同型 α: $\hat{R}(G_p) \longrightarrow K(G_{G_p})$ はさきに定義した $GR(G_p)$ から $GK(B_{G_p})$ への同型をひきおすことに注意すれば $\alpha^{-1}i\,x = (y-1)^d z$　$2d=k$，の形に表わされる。こゝで y は同型 $R(T_{p^h}) \cong Z[Y]/(Y^{p^h}-1)Z[Y]$ における Y の同値類，$z \in \hat{R}(G_p)$，$z \equiv 1 \mod \hat{I}(G_p)$ とする。$p^h(y-1) \equiv p^{h-1}(y-1)^p \mod (y-1)^{p+1}$ となることから $\alpha^{-1}i\,p^h x \equiv p^{h-1}(y-1)^{d+(p-1)} \mod \hat{I}(G_p)^{d+p}$. こゝで $GK(B_G)$の像が直

和因子であることを用いれば，$x' \in K(B_G)$ を適当にとれば $\alpha^{-1} i x' \equiv (g-1)^{d+(p-1)} \mod \hat{I}(G_p)^{d+p}$ となる．これは $2(p-1)$ が p 周期となることを示している．