

Vortex sheet のまきとりについて

東大 理 桑原 邦郎

§1. 序.

Vortex sheet の運動を考る際、その vortex sheet に有限個の渦系をかまかえたものを考える。このモデルを今、Discrete vortex model とよぶ。 N の渦系の存在する系を考え、 i 番目の渦系に注目すると、その渦系は他の $N-1$ の渦系により、 t 運動をおこなう。その速度は各渦系により誘起される速度の和として与えられるから、

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i} \frac{k_j (y_i - y_j)}{r_{ij}^2}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i} \frac{k_j (x_i - x_j)}{r_{ij}^2} \quad (1)$$

となる。ここで (x_i, y_i) は i 番目の渦系の位置、 k_i はその強さ、 $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$ である。時刻 $t=0$ における渦系の位置および強さを与えれば、 $t>0$ における渦系の位置は、この連立方程式によって完全に決定される。この実際の計算は計算機によって、比較的簡単に実行ができる。速度の不

連続面の安定性をとりあつかった Rosenhead (1931) 以来、いくつかの問題について、この方式による計算がおこなわれている。しかし、このモデルには強い不安定性があることがわかっていく。その上、その不安定性は、計算を精密化するために渦系の数 N を大きくするほど強くなる。この不安定性の原因は、二つの渦系がある瞬間に接近したとすると、たかいいに、その距離に反比例する強い速度が誘発されることによると思われる。実際の流れでは、このようなことはおこりえない。したがって、この不安定性をさけるために、粘性を考慮してみる。いま $t=0$ において $\frac{k}{2\pi} \frac{1}{r}$ なる速度分布をもつ粘性流を考えると $t>0$ においては、Navier-Stokes 方程式を解いて

$$\frac{k}{2\pi} \frac{1}{r} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right\} \quad (2)$$

で与えられる(図1)。ここで ν は運動粘性率である。(1)における定数 k を距離と時間の関数

$$k_j \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right\} \quad (3)$$

でおきかえた方程式を考えると、 r が $2\sqrt{\nu t}$ より大なるときは完全流体の場合に漸近的に一致し、二つの渦系が非常に接近した場合には、完全流体のときとは異なり、とくに強い速

度が誘起されることはない。したがって、この流れは安定化される。

§2. 数値解

例として、粘度が、 $-1 \leq x \leq 1$ の間で、

$$(I) \quad K(x) = -\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(II) \quad K(x) = -\frac{d}{dx}(1-x^2)$$

$$(III) \quad K(x) = -\frac{d}{dx}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

という分布をしている vortex sheet を考える。

例(I)で粘性を考慮していない TAKAMI(1964)の結果では、vortex sheet のまき上り部分は強く乱れてしまう(図2)の如く反して、 $\nu=0.003$ とした結果では(図3)なめらかなまき上りがみられる。ここで(—)は粘性のきく範囲 $2\sqrt{\nu}$ を示している。図4では $\nu=0.002$ までにはなめらかなまき上りを示すが、 ν をそれ以下にしてしまうと、乱れてしまふ、安定化させる ν の限界を表している。

例(II)の場合も(図5) $\nu=0.001$ とすると十分安定なまき上りがみられる。

例(III)の場合(図6, 7, 8), D を大きくするほど安定が良くなり、なめらかなまき上りが見られる。

結論として, D を適当に大きくすれば, vortex sheetはなめらかなまき上りを示し, D を小さくするにしたがい, そのまきこむ回数が多くなり, ある D よりさらに小さくすると, 乱れてしまい, なめらかなまき上りが見られなくなる。(しかし, D が計算を安定化させるための以上の, 真の粘性という意味をもたせることが出来るかは, ここでは結論できない。

文献

1. Rosenhead, L., The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity, Proc. Roy. Soc. A 134, 170-92, 1931.
2. Takemi, H., A numerical Experiment with Discrete-Vortex Approximation, with Reference to the Rolling up of a Vortex Sheet, Department of Aeronautics and Astronautics Stanford University, SUPAER No. 202 September 1964.

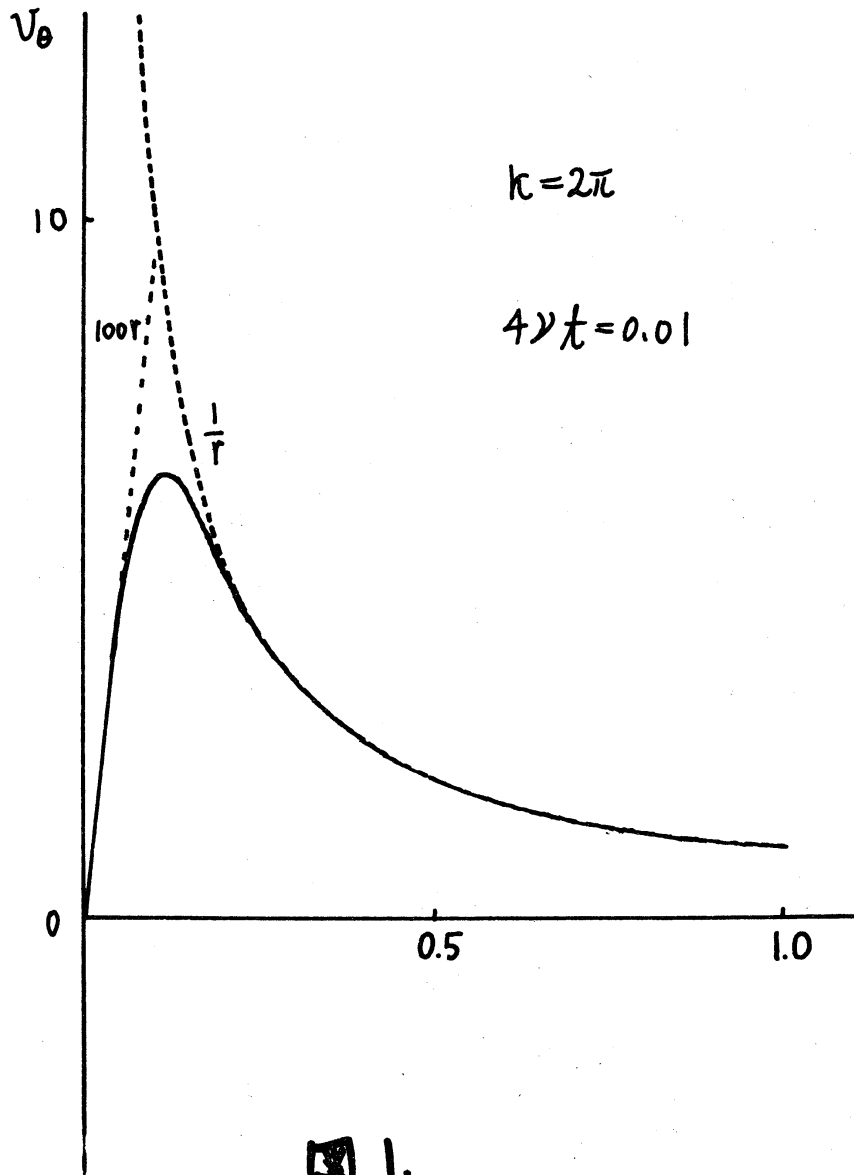
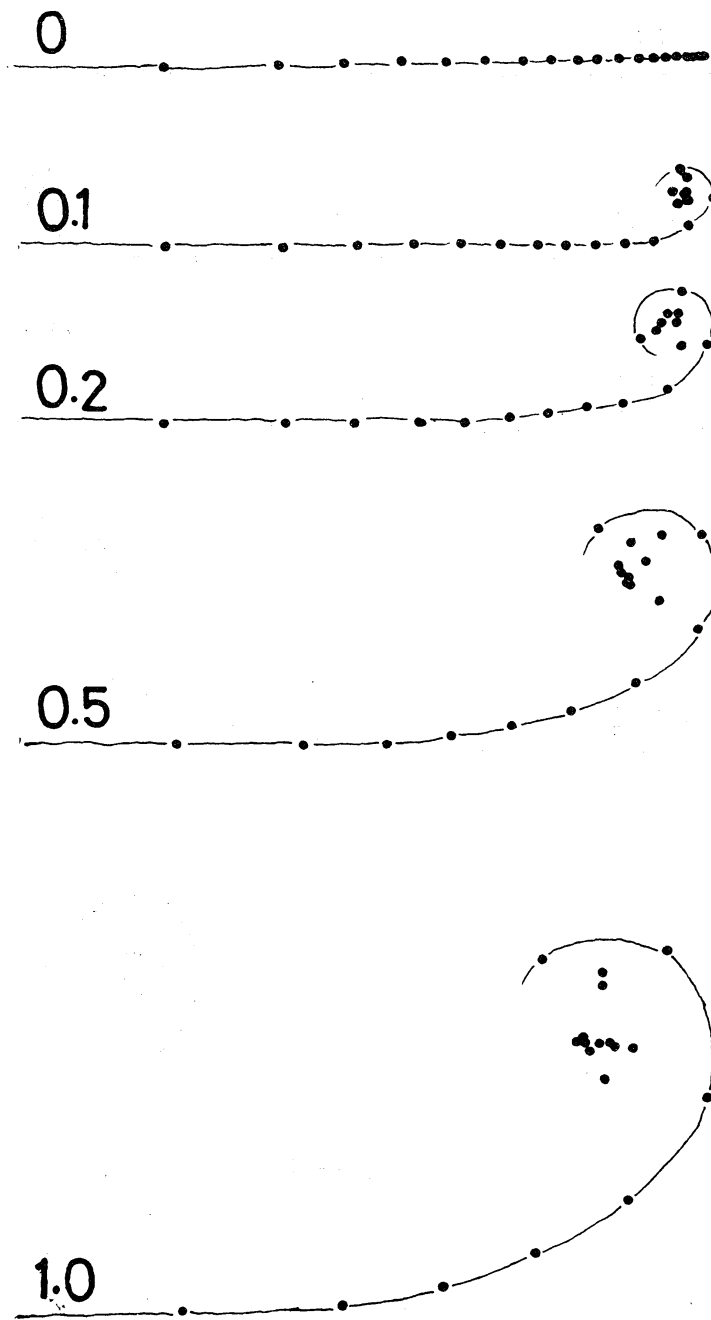
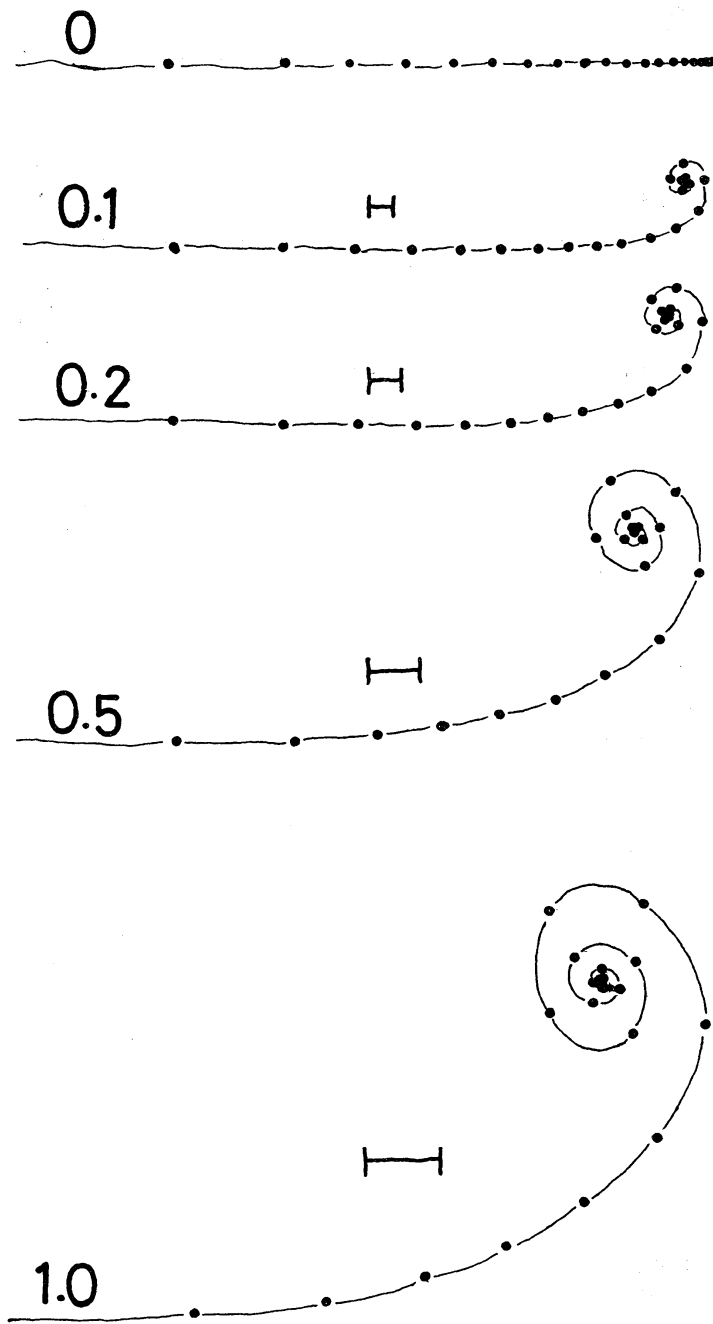


图 1.



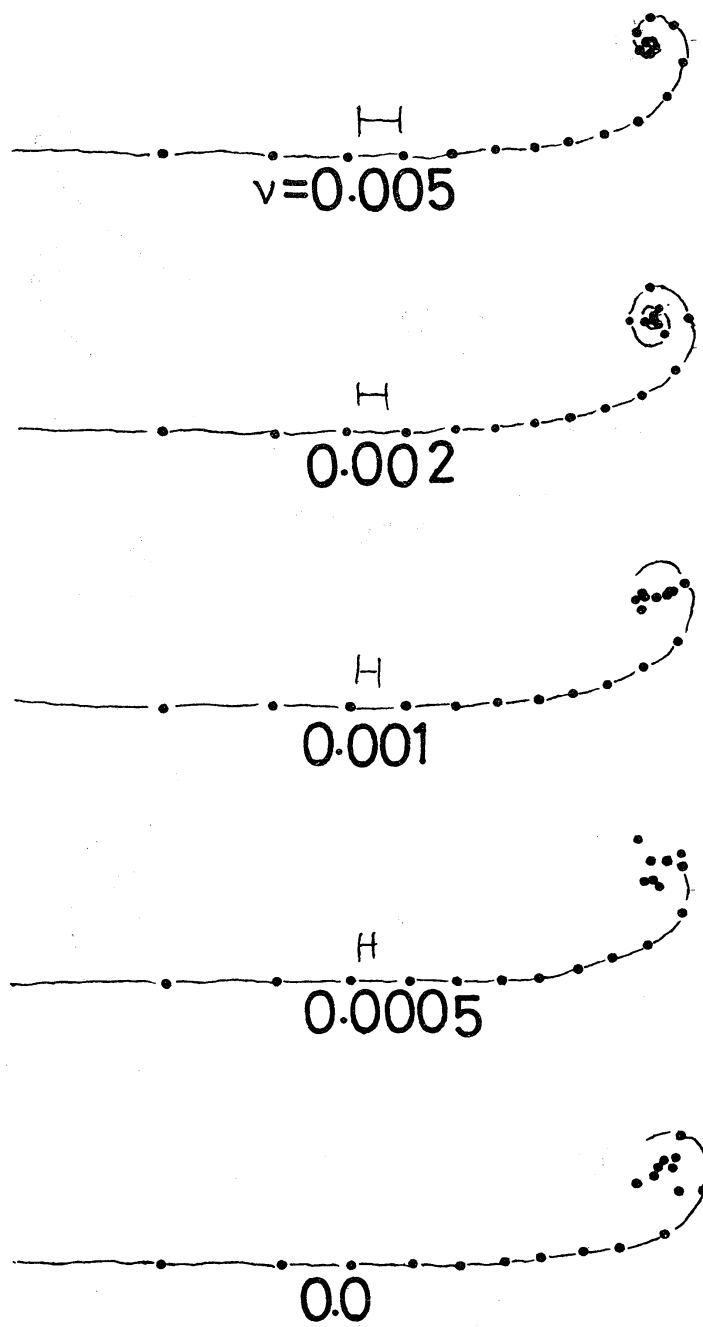
$v=0$ (TAKAMI)

图 2



$$v=0.003$$

图 3.



$t = 0.2$

图4

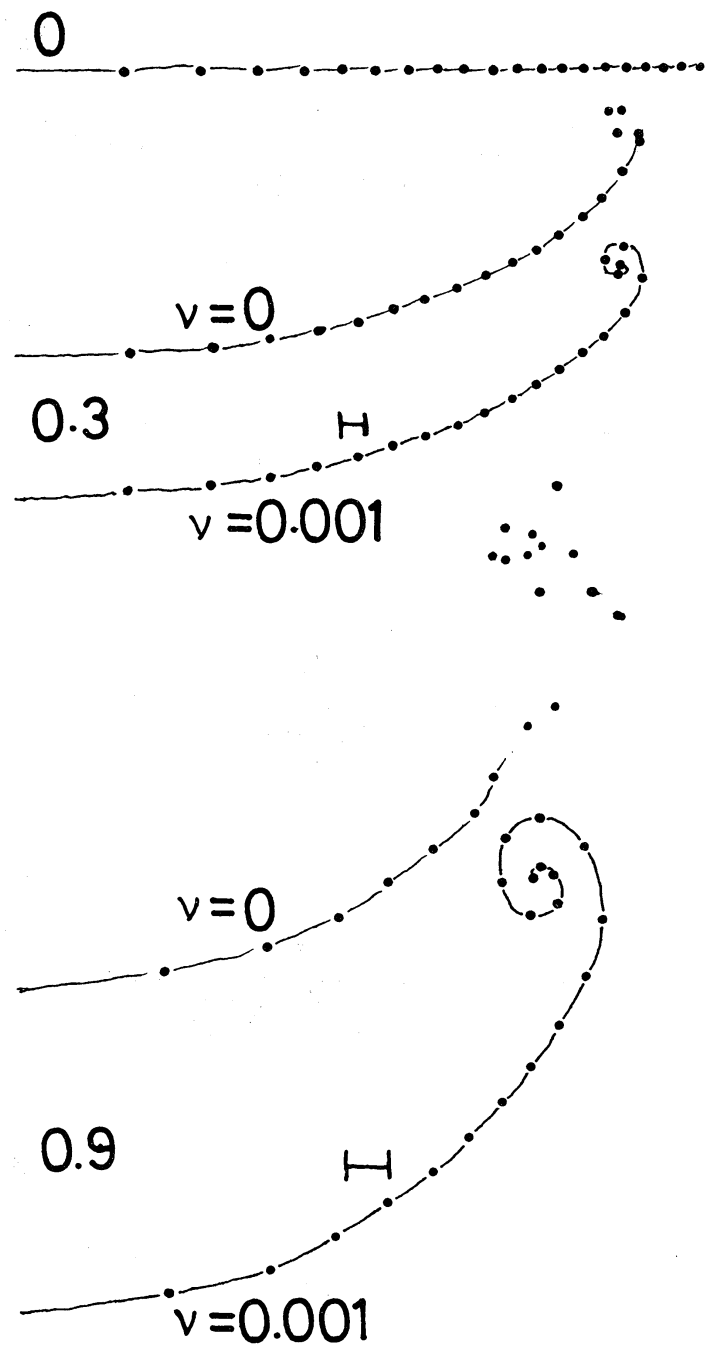
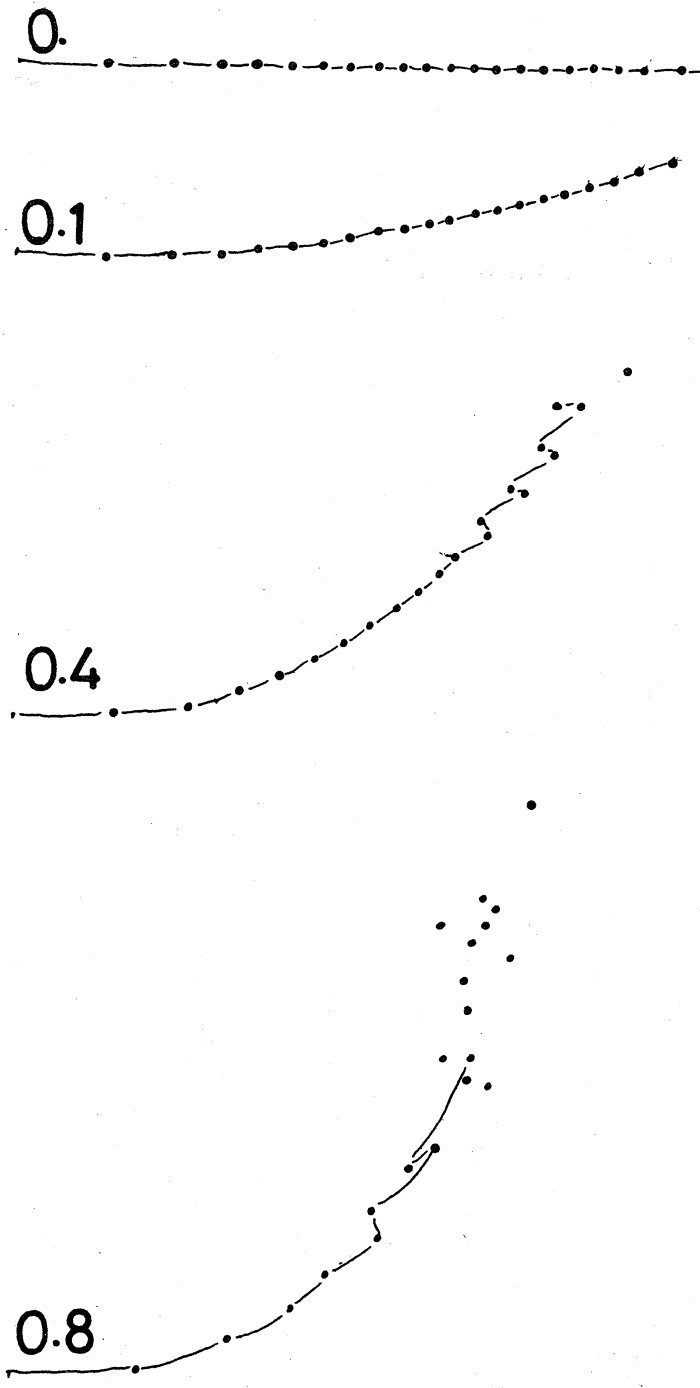
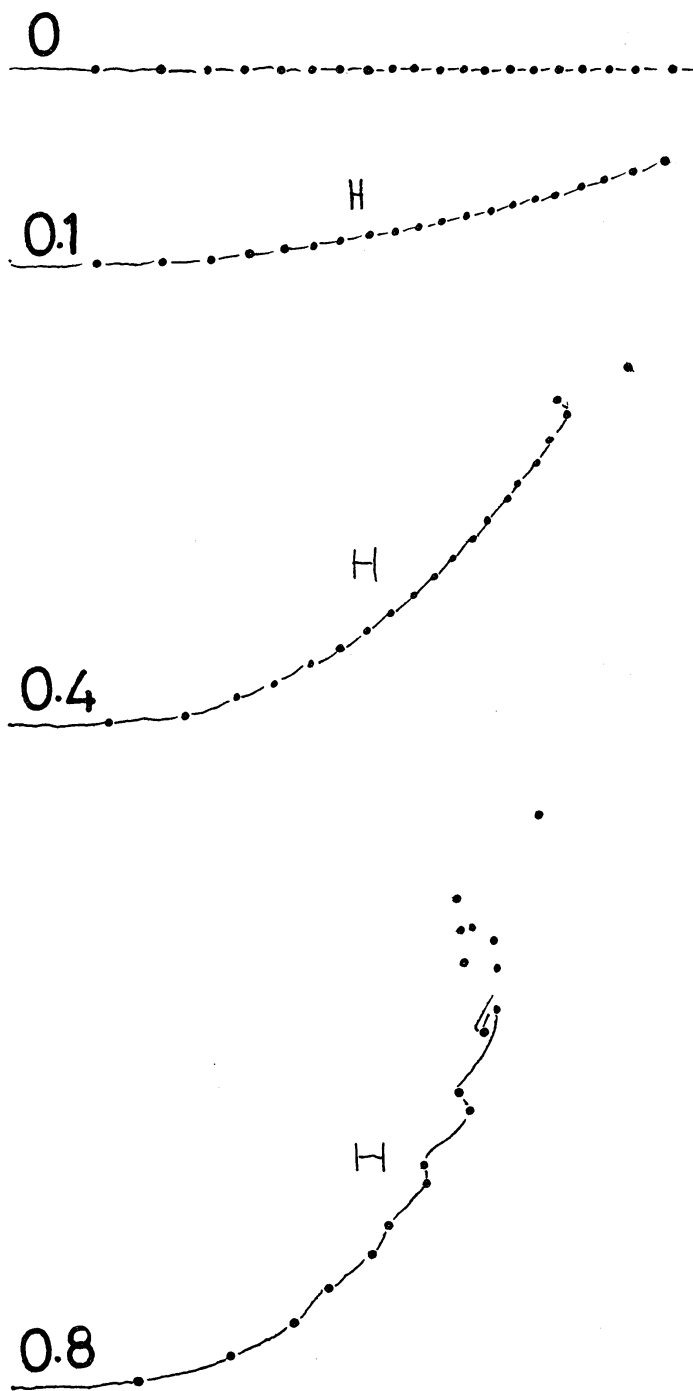


图 5



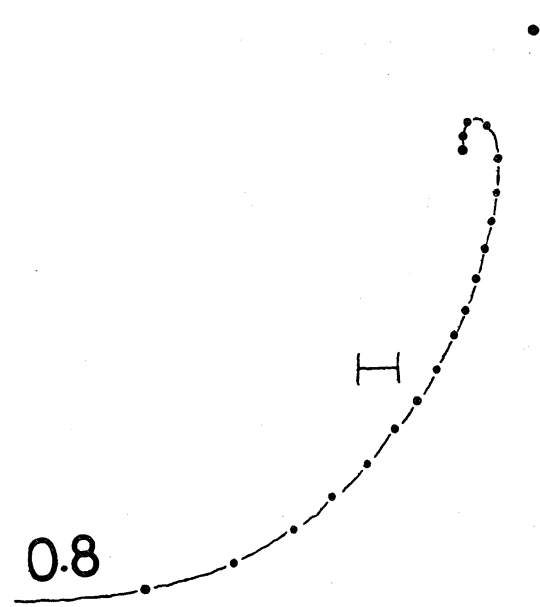
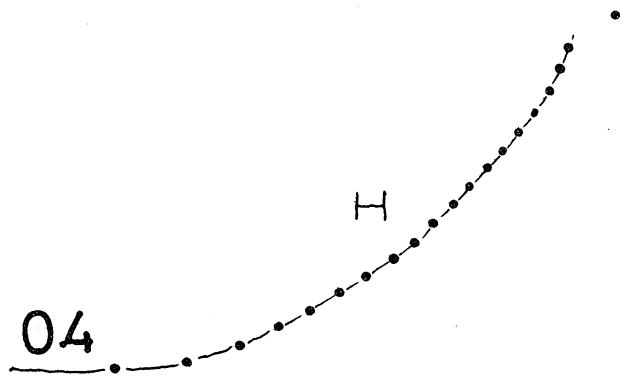
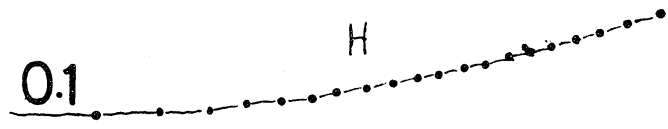
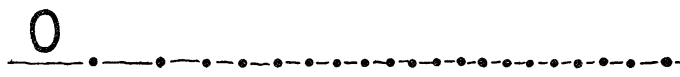
$v=0$

图 6



$v=0.0005$

图7



$\nu = 0.001$

8