数理解析研究所講究録
第101巻 1970年 52-65

トンネルと列車系の非定常問題

鉄道技研　　山本彬也

§1　まえがき

列車がトンネルに突入するとき，列車によって排除された空気は横方向に逃げることができず，圧力波となってトンネルの前方と後方とに伝わる。列車の速さが音波の速さにくらべてあまり大きくない（250 km/hでもこの比，すなわちマッハ速度は 0.2 程度）にもかかわらず，トンネルと列車系の空気力学では，空気の圧縮性――少なくとも，音響学的な考慮は本質的なものとなっている。トンネルはもちろんのことであるが，その中を走る列車も特に細長い一様断面の物体であることが，この系を1次元的に扱うことを可能にし，その結果よく知られている特性曲線法などの手法により問題を解くことができるのであるが，一方実際の測定によると列車の側面およびトンネル壁面の粗さによる摩擦の影響もいちぢるしく，摩擦力の大きさは表面における相対速度の2乗に比例すると考えられるので，現象をあらわす方程式を線型として

あつかうことができない。そこで摩擦を無視して圧縮性だけを考慮して解いた結果に摩擦の影響を摂動として考える方法は，摂動が特に小さい場合には有用であり，現象の理解には便利であるが，一般にはそれぞれの場合に数値積分によって結果を得ることになるであろう。この報告の前半は、詳細な議論を省略して，そのようにして得られた結果をいくつかの例について示す。

列車がトンネルに突入してからしばらくの間，列車側面とトンネル壁面とのすき間の摩擦によって，列車側面での静圧は緩やかに上昇する。（この圧力は，車両が特に気密につくられていないかぎり，車両のすきまから車室内に侵入するので，時として私達がこの圧力変化を感ずることがある。） この圧力を測定することによって，列車の表面摩擦係数を算出することができ，しかもこの方法が最も精度の高いと信じられている。この係数は，列車の空気抵抗の推定や，トンネル内の圧力変動の予測などに重要である。非線型偏微分方程式を常微分方程式に書きかえて積分することにより，ある近似解を求めることができるが，これを後半に述べる。

以下で用いる記号を説明しよう。距離 x，時間 t の原点はトンネル入口，

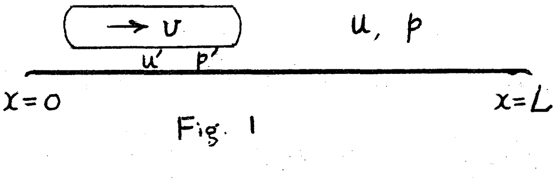


Fig. 1

および列車の前頭部が突入する時刻とする。風速，圧力をそれぞれ u，p であらわし，特に列車側方では u'，p' とする。列車がトンネルに入る前 $t<0$ は，$u=p=0$ とする。

a	音の速さ（$=1226$ km/h）
A	トンネル断面積
A'	列車の断面積
d	トンネル水力直径（$=4\times$断面積／周長）
d'	列車の水力直径（$=4\times$断面積／周長）
f	摩擦力
L	トンネルの長さ
l	列車の長さ
$R=A'/A$	列車とトンネルとの断面積比
v	列車の速さ
$V=v/a$	列車のマッハ速度
λ	トンネルの水力的摩擦係数
λ'	列車の水力的摩擦係数
φ	摩擦による逸散項
C_p	トンネル外における列車の圧力抵抗係数

§2　基礎方程式と境界条件

流量およびエントロピー s の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \qquad \rho：空気の密度$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\varphi}{T} \qquad T：温度$$

$$p = \rho R T \qquad R：気体定数$$

$$T\,ds + \frac{dp}{\rho} = c_p\,dT \qquad c_p：定圧比熱$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}c_p = R, \quad a^2 = \gamma p/\rho \qquad \gamma：比熱の比$$

より近似を行なわずに導かれる"連続の式"と運動の式とを基礎方程式とする。

$$\begin{aligned} a^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x}\right) &= (\gamma-1)\varphi \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= f. \end{aligned} \qquad (1)$$

式(1)で，音速aや密度ρにたいして$(u/a)^2$の大きさの変化を無視することができれば，それらを定数とみなすことができ，特性線 $dx/dt = u \pm a$ に沿って

$$\frac{d}{dt}[p \pm \rho a u] = \{(\gamma-1)\rho\varphi \pm \rho a f\} \qquad (2)$$

である。ここで，式(2)の特性線を音波と同じ $dx/dt = \pm a$ で近似する場合を考えよう。この近似は，式(1)で対流項$u\frac{\partial}{\partial x}$を省略することに相当し，形式的には u/a の大きさの変化を無視するように見えるが，実は式(2)で与えられるように得られる値には影響を及さず，ただx-t図上の位置にu/aの大きさの近似が入るにすぎない。しかも，この影響は，圧力波がトンネルの端口で反射してくるとき互に打消すように働らくので，全体として誤差は局所的であっても集積することは

ない。この理由によって，基礎方程式として(1)の代りに，次の式(3)を（列車のマッハ速度 $v/a = 0.2$ の場合でも，誤差は数パーセントを超えない程度の精度で）用いることにする。

$$
\left.
\begin{aligned}
a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} &= (\gamma - 1)\,\varphi \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= f , \qquad a, \rho : \text{定数}.
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

摩擦項 f, φ はトンネル表面および列車表面の粗さと，そこにおける相対風速によってあらわされ，管直径5m で平均風速 0.3 m/s としても，空気密度×管直径×平均風速／空気粘性係数で与えられるレイノルズ数は 10^5 となって，流れは完全乱流であり，摩擦係数の値は面の粗さだけによってきまると考えられるので，

列車のないところ（$x < vt - l$ あるいは $vt < x$）：

$$f = -\frac{\lambda}{2d}\, u|u| , \qquad \varphi = \frac{\lambda}{2d}\, |u|^3$$

列車のあるところ（$vt - l < x < vt$）：

$$
\begin{aligned}
f &= -\frac{\lambda}{2d}\frac{1}{1-R}\, u'|u'| - \frac{\lambda'}{2d'}\frac{R}{1-R}\,(u'-v)|u'-v| \\
\varphi &= \frac{\lambda}{2d}\frac{1}{1-R}\, |u'|^3 + \frac{\lambda'}{2d'}\frac{R}{1-R}\, |u'-v|^3 .
\end{aligned}
\quad (4)
$$

なお，水力的摩擦係数 λ, λ' の大きさは，面の粗さが管半径の 1/100 ～ 1/1000 の場合 Nikuradse, Moody の実験[1]によると 0.030 ～ 0.017 であることから，トンネルと列車系においてもその程度の値になることが期待される。

解かれるべき領域は，列車前方（$vt < x < L$），列車側方（

$vt-l<x<vt$),列車後方 ($0<x<vt-l$) の3領域で,それぞれの境界の連続の条件は次の通りである.

列車前頭部 ($x=vt$)

$$\begin{aligned} &\text{流量} &:&\quad (1-R)(u'-v) = u-v \\ &\text{エネルギー} &:&\quad p' + \frac{\rho}{2}(u'-v)^2 = p + \frac{\rho}{2}(u-v)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

列車後尾部 ($x=vt-l$):

$$\begin{aligned} &\text{流量} &:&\quad u-v = (1-R)(u'-v) \\ &\text{運動量} &:&\quad p + \rho(u-v)^2 = p' + (1-R)\rho(u'-v)^2 - C_p R \frac{\rho}{2}(u'-v)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

式(6)のさいごは,列車後尾部で流れの剥離のおこること,ならびに形状抵抗の因を後尾に負わせたものである。

トンネル両端の境界条件は,外向きの流れの場合に剥離がおこることを考慮して,

$$\begin{aligned} &\text{入口}\ (x=0) : && p = -\frac{1}{2}\rho u^2 && u \geqq 0\ \text{のとき} \\ & && p = 0 && u<0\ \text{のとき} \\ &\text{出口}\ (x=L) : && p = 0 && u \geqq 0\ \text{のとき} \\ & && p = -\frac{1}{2}\rho u^2 && u<0\ \text{のとき}. \end{aligned} \tag{7}$$

さいごに,列車の単位断面積あたりの空気抵抗は

$$\frac{\rho}{2}\left\{\begin{matrix} R \\ 0 \end{matrix}\right\}_{\text{外}}^{\text{内}} (u'-v)^2 + \frac{\rho}{2} C_p \left\{\begin{matrix} (u'-v)^2 \\ v^2 \end{matrix}\right\}_{\text{外}}^{\text{内}} + \frac{\rho}{2}\frac{\lambda'}{d'}\left\{\int_{\text{内}} (v-u')|v-u'|\,dx + v^2\int_{\text{外}} dx\right\} + \Delta p'_{\text{前後}}. \tag{8}$$

第1項は,列車前頭がトンネル内にあれば R を,トンネル外にあれば 0 をとり; 第2項は,列車後尾がトンネル内ならば

上を，そうでないとき下の表現をとり；第3項の積分は，それぞれトンネル内および外において列車の長さに沿って積分をとることを意味し；最後の $\Delta p'$ は列車前頭部と後尾部における静圧の差を意味する。

§3 数値例[2]

摩擦項 $f = \varphi = 0$ の場合，近似式(1)でなくて，速度 u，音速 a，エントロピー s についての方程式より式(2)のように特性線 $dx/dt = u \pm a$ に沿ってリーマン変数が不変であるという関係を用いて解くことができる。列車のマッハ速度 $V = U/a = 0.1$ の場合の x-t 図の一部を Fig. 2 に示してあるが，破線は列車前頭部の軌跡で，ここでは列車長は充分長いとして後尾の軌跡は記入されていない。この方法で得られた，トンネル中央の静圧，列車前頭部の静圧と岐点圧を，列車速度 $V = 0.1$ で列車/トンネル断面積比 $R = 0.2$ (Fig. 3) および $V = 0.2$ $R = 0.2$ (Fig. 4) の場合，次のページに実線であらわしてある。これらの例では後尾の影響が入ってないが，それですら x-t 図の各領域ごとに計算する

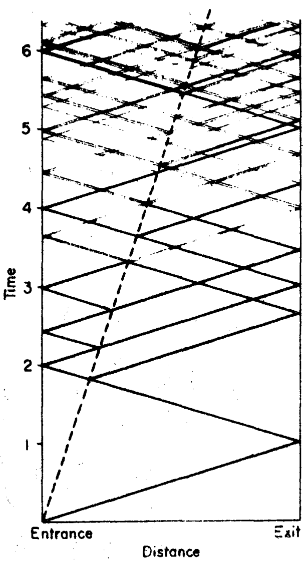
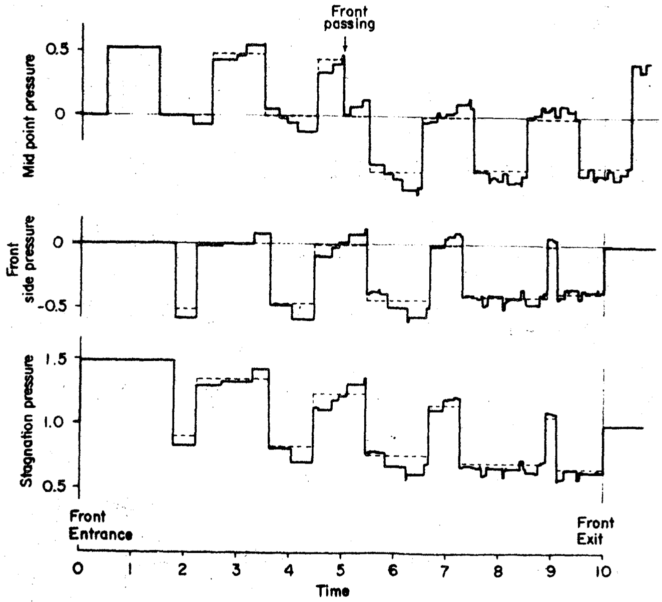


Fig. 2　Wave diagram for train Mach number V =0. 1

ことは容易ではないし，また得られた結果をみると必ずしも忠実に計算を行なう必要はないように思われる。



solid lines ―― exact calculation
broken lines --- fundamental wave approximation
Fig. 3 Pressures in case of $V = 0.1$ and $R = 0.2$

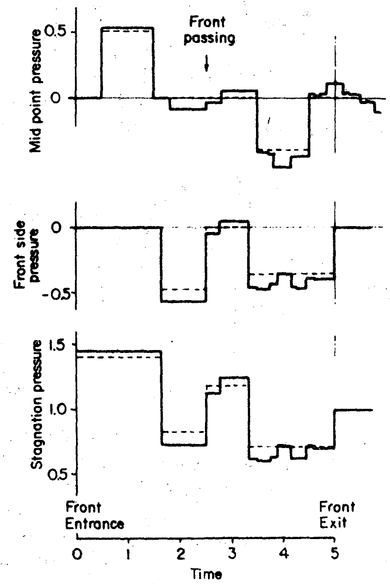


Fig. 4 Pressures in case of $V = 0.2$ and $R = 0.2$

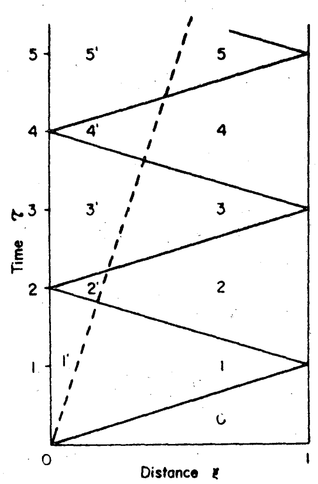
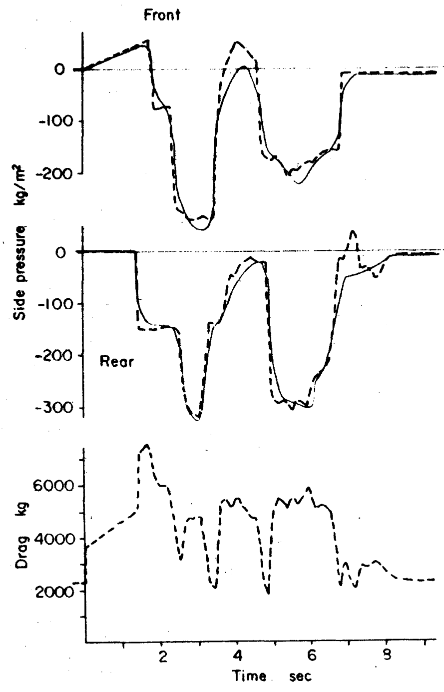


Fig. 5 Fundamental wave diagram for $V = 0.1$

断面積比Rがあまり大きくない場合は，列車前頭および後尾での反射波の割合はRの大きさの程度であろう。従って，トンネル内の圧力波の基本波は，列車の前頭部および後尾部のトンネル進入によってつくられる圧縮波および膨脹波が，トンネル両端間を往復する波で，Fig. 5 は後尾の影響のない場合の例を示している。ここで，式(2)と類似の関係として，領域 $2n$ から $2n+1$ へは $p-\rho a u$ の値は保存し，$2n'-1$ から $2n'$ へは $p'+\rho a u'$ が保存することと，式(5)，(7) 等により各領域での速さ u，圧力 p とをマッハ速度 V の程度までの近似で解析的に求めることができる。前ページ Fig. 3 と 4 の破線はこの基本波によって求めたものである。このような考え方は，$R \sim 0.5$ の程度でも有効である。

摩擦を考慮する場合は，式(2)の形の差分形式に書き改めた式(3)～(7)によって数値計算するプログラムができている。右の Fig. 6 は出縄トンネルでの例で，計算値を破線で，実測値を実線で示し

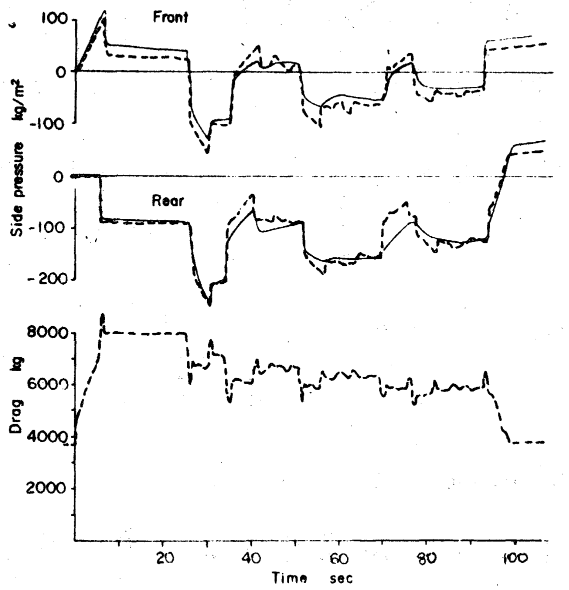


solid lines —— observed (Mar. 30, 1963)
broken lines --- estimated
tunnel DENAWA 471 m, 61.4 m^2,
circumference 29.2m, λ =0.020
test train #19 100 m, 13.7 m^2
C_p =0.12, λ'=0.018
speed of entrance 249 km/h
(V = 0.203, R = 0.223)

Fig. 6 Pressures and drag in a double-tracked short tunnel

である。この図はFig.4（後尾の影響を考慮してない）に相当するものである。長い複線トンネルの場合の代表的な例として，音羽山トンネルを16両編成の東海道新幹線での計算値と測定値をFig.7に示す。

これらの計算において，実験値と適合させるための主パラメータは，列車の摩擦係数λ'である。形状抵抗係数C_pは風洞試験あるいはトンネル外での走行抵抗の測定から，トンネル摩擦係数λは列車通過後のトンネル内の風速あるいは圧力波の減衰から推定されるべき量であるが，上記の計算に大きな寄与をあたえない。



solid lines ——observed (Dec. 1, 1966)
broken lines - - - estimated
tunnel OTOWA 5044 m, 61.4 m², circumference 29.2 m, $\lambda = 0.020$
train "HIKARI" 300 m, 13.7 m² $C_p = 0.12$ $\lambda' = 0.018$
speed of entrance 195 km/h ($V = 0.159$, $R = 0.223$)

Fig.7 Pressures and drag in a double-tracked long tunnel

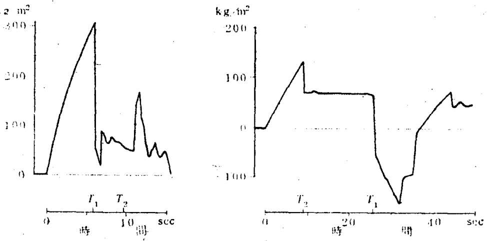
§4 トンネルに突入した列車の摩擦による圧力上昇[3]

列車がトンネルに突入した後，列車前頭部の受ける静圧は，Fig.8に例示しているように単調に増加する。これは，トン

ネル内の列車風の摩擦によって生ずる抵抗に起因するので，列車前頭のトンネル突入による圧力波が出口で反射して戻って前頭部に達するまでの時間 T_1 と，列車後尾のトンネル突入による膨張波が前頭部に達するまでの時間 T_2，との小さい方の時間持続する。トンネル，列車の長さを L, l，音速，列車の速さを a, v とすると，T_1, T_2 は下式で与えられる。

$$T_1 = \frac{2L}{a+v}, \qquad T_2 = \frac{a}{a-v}\cdot\frac{l}{v} \tag{9}$$

この時刻以後圧力は一般に減少するので，この時刻における圧力は（すれちがい列車の影響，線路こう配，列車の加減速および断面積比 R がいちぢるしく大きい場合でない場合），列車がトンネル通過中の正の最大圧力となる。しかも，この測定値より，前節で述べたように，列車の摩擦係数 λ' を推定することができる。



鳥越トンネル ($L=1{,}055$ m, 16.0 m²)
はつかり ($l=211$ m, 10.5 m²)
突入速度　86 km/h

音羽山トンネル ($L=5{,}044$ m, 61.4 m²)
こだま 953 ($l=400$ m, 13.7 m²)
突入速度　192 km/h

T_1：列車前頭のトンネル突入による圧縮波が出口から反射して前頭に達する時刻
T_2：列車後尾のトンネル突入による膨張波が前頭に達する時刻

Fig. 8 トンネルに突入した列車前頭における圧力変動

この問題は，式(1)，(4)，(5)，(7)を時間 $0<t<\min(T_1, T_2)$ の範囲で，解析的な解を求めることである。普通行われるように，解を x, t のべき級数に展開する方法は可能であるが，実際に係数をあたってみると，（λ', R が特に小さい場合を除き）収束の点で実用にならない場合がある。そこで，列車の長さが充分長い場合の漸近解を求

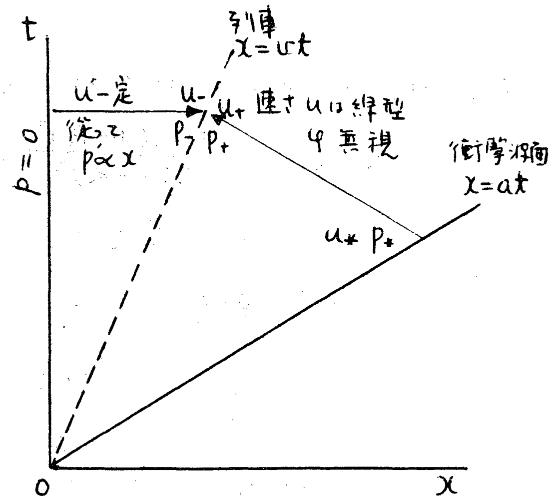


Fig.9　漸近解を求めるための，列車前方と側面との領域における流れについての仮定

めるために，Fig.9 に示すような仮定を行なう。ここで，列車前頭部直前の量に添字+を，直後の量に添字−をつけることにする。トンネル入口 $x=0$ で，多くの場合空気は外へ向かい（反対の場合でも速度はあまり大きくないのでそれを無視すると）圧力 $p=0$ と仮定しよう（cf 式(7)）．列車側方領域では速さ u' は t のみにより x には依存しないと仮定すると，f は式(4)により u' すなわち t のみの関数であることに注意すると式(1)の運動方程式より $p' \propto x$ である．従って，

$0<x<vt$ ：

$$p_-/\rho = \left\{-\frac{\lambda}{2d}\frac{1}{1-R}u_-|u_-| + \frac{\lambda'}{2d'}\frac{R}{1-R}(v-u_-)^2\right\}vt - \frac{du_-}{dt}vt \quad (10)$$

列車前方領域では特性線 $dx/dt=-a$ に沿って，速度 u は線型すなわち時間 t の1次式で，さらに速度は全体としてあまり大きくないのでその3乗の形の φ を無視することとする。

$vt<x$ ：

$$p_+/\rho - au_+ = \frac{\lambda}{2d}\frac{a-v}{2}\frac{u_+^2+u_+u_*+u_*^2}{3}t \quad . \quad (11)$$

ここに u_* は衝撃波面上の速さで式(2)より容易に求められ，

$$u_* = u_0/(1+\frac{\lambda}{4d}u_0 t_*) \quad , \quad t_* = \frac{a+v}{2a}t \quad (12)$$

で，u_0 は $t=0$ における u_* で，式(5)より $p'=0$ として

$$a u_0 = \frac{1-(1-R)^2}{2(1-R)^2}(v-u_0)^2 \qquad (12')$$

の（小さい方の）根として求められる。

列車前頭の連続の条件(5)と，式(10)，(11)とより列車直前の速さ u_+ についての常微分方程式がえられる：

$$\begin{aligned}&\frac{du_+}{dt}\frac{vt}{1-R} + \frac{\lambda}{2d}\frac{a-v}{6}(u_+^2+u_+u_*+u_*^2)t \\ &-\left\{\frac{\lambda}{2d}\frac{1}{1-R}\frac{Rv-u_+}{1-R}\left|\frac{Rv-u_+}{1-R}\right| + \frac{\lambda'}{2d'}\frac{R}{1-R}\left(\frac{v-u_+}{1-R}\right)^2\right\}vt \\ &+ au_+ - \frac{1-(1-R)^2}{2(1-R)^2}(v-u_+)^2 = 0 \qquad (13)\end{aligned}$$

式(13)を初期条件 $t=0$ で $u_+=u_0$ のもとに数値積分するか，或いは

$$\frac{du_+}{dt}t \simeq \frac{u_+-u_0}{1+\left\{\frac{\lambda}{d}\frac{1}{1-R}\frac{Rv}{1-R}+\frac{\lambda'}{d'}\frac{R}{1-R}\frac{v}{1-R}\right\}\frac{vt}{a}}$$

とおいて，式(13)を代数式として解くこともできる。

列車側方の圧力 p' の近似解の一つの形として，

$$p' = \frac{C_1 x}{2\sqrt{1+C_2 vt}-1}\cdot\frac{1}{2}\rho v^2 \qquad (14)$$

$$C_1 = \left\{\frac{\lambda}{d}\frac{1}{1-R}\left(\frac{R-u_0/v}{1-R}\right)^2+\frac{\lambda'}{d'}\frac{R}{1-R}\left(\frac{1-u_0/v}{1-R}\right)^2\right\}\frac{a+\frac{1-(1-R)^2}{(1-R)^2}(v-u_0)}{a+\frac{1-(1-R)^2}{(1-R)^2}(v-u_0)+\frac{v}{1-R}}$$

$$C_2 = \left\{\frac{\lambda}{d}\frac{1}{1-R}\left(\frac{R-u_0/v}{1-R}\right)+\frac{\lambda'}{d'}\frac{R}{1-R}\left(\frac{1-u_0/v}{1-R}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{1-R}\cdot\frac{v}{a+\frac{1-(1-R)^2}{(1-R)^2}(v-u_0)+\frac{2v}{1-R}}$$

であらわすことができる．この式で x は圧力の測点の位置，vt は列車前頭部の位置であって，速度 u_0 は式(12')で与えられる。式(14)では，$x=vt$ の場合，充分大きな x に対して p'

は$x^{1/2}$に比例して増加するが，式(13)を正しく解いた結果はxに比例することが示される。その意味で式(14)は，きわめて大きなxに対しては正しい形ではないが、実際の列車とトンネル系に対しては充分満足できる近似解を与えることは、いくつかの数値例で確められている。

文　献

(1) H. Schlichting : Boundary Layer Theory (Mc Graw-Hill, 1968) の Chapt. XX 参照

(2) A. Yamamoto : Aerodynamics of Train and Tunnel Proc. 1st Intn. Conf. on Vehicle Mechanics (Detroit, 1968) p. 151/163 (Swets & Zeitlinger , Amsterdam 1969)

(3) 山本彬也 : トンネルに突入する列車の摩擦による圧力上昇 鉄道技術研究報告 no. 666 (1969)