数理解析研究所講究録
第102巻 1970年 9-23

Maxwell方程式に対する散乱理論

京大 教養 望月 清

§0. まえがき

以下では電磁波の障害物及び媒質のinhomogenuityによる散乱問題を考える。障害物の表面 S は $\mathbb{R}^3$ に於ける充分滑かな有界閉曲面であるとし，S の外部を Ω で表わす。Ω で静止した媒質の誘電率，導磁率を表わすtensorをそれぞれ $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ とするとき，Ω に於ける電磁波の伝播現象はMaxwell方程式

(0.1) $\qquad \varepsilon(x)\,\partial_t \mathbb{E} = \nabla\times\mathbb{H}, \quad \mu(x)\,\partial_t \mathbb{H} = -\nabla\times\mathbb{E}$

によって規定される。吾々は障害物の表面 S が完全導体であるとする。このとき S に於ける境界条件は次のようになる：

(0.2) $\qquad \mathbb{n}\times\mathbb{E}\big|_S = 0.$

ここに $\mathbb{n}=\mathbb{n}(x)$ は外法線方向の単位vectorである。

$\varepsilon(x)=[\varepsilon_{ij}(x)]$, $\mu(x)=[\mu_{ij}(x)]$ は次の条件を充すとする：

<u>条件 I.</u> 各 $x\in\bar{\Omega}=\Omega\cup S$ に対して $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ は共に実対称で，正定値な 3×3 matrixである。

<u>条件 II.</u> $\varepsilon_{ij}(x)$, $\mu_{ij}(x)\in C^2(\bar{\Omega})$，さらに δ を $\mathbb{C}^3$ に於ける単位行列とするとき，正数 ρ が存在して，

$$\varepsilon(x)-\delta = \mu(x)-\delta = 0 \quad \text{for} \quad |x|>\rho .$$

この条件のもとに，吾々は(0.1)，(0.2)の解をFree space（$\mathbb{R}^3$全体）でのMaxwell方程式

(0.3) $\quad \partial_t \mathbf{E}^0 = \nabla\times\mathbf{H}^0, \quad \partial_t \mathbf{H}^0 = -\nabla\times\mathbf{E}^0$

の解と関係させる"Wave operator"の存在と完備性を示し，かつその積分による表現を求める。

証明の中心は(0.1)，(0.2)に対するreduced equationについて，いわゆる「極限吸収の原理」を示すことにあり，そのためにEidus [1]がHelmholtz equationの外部問題の場合に用いた方法を改良(?)して用いる。

電磁波の障害物による散乱問題はSchmidt（[11]及び[6]のappendix）による研究がすでにある。そこでは真空中（$\varepsilon(x)=\mu(x)\equiv\delta$）の電磁波だけを対象にして，同じ問題が，Lax-Phillips [6]の論法を適用することにより，証明されている。なお全空間の問題（もちろん変数係数）に対してはWilcox [12]，Kato [5]，Ikebe [4]等の研究がある。そこでは$\varepsilon(x)$，$\mu(x)$に対して上に仮定したものより弱い条件のもとでWave operatorの存在が証明されているが，その完備性や表現が未解決の問題として残されている。

§1. Free spaceに於けるMaxwell方程式

この節では(0.3)に対する初期値問題の解を考える。

$$A = \frac{1}{i}\begin{bmatrix} 0 & \nabla\times \\ -\nabla\times & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \{E^0, H^0\}$$

とおくと.(0.3)は次のように書ける:

(1.1) $$\frac{1}{i}\partial_t u = Au.$$

吾々はこれを Hilbert 空間 $\mathcal{H}^0 = L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^6)$ に於ける微分方程式と考える。$\mathcal{H}^0$ の内積, norm はそれぞれ

$$(f, g)_{\mathcal{H}^0} = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx, \quad \|f\|_{\mathcal{H}^0} = \sqrt{(f, f)_{\mathcal{H}^0}}$$

で与えられる。ここに $f\cdot\overline{g}$ は $\mathbb{C}^6$ に於ける内積を表わす。

$\mathcal{H}^0$ に属す滑かな函数に対して定義された微分作用素 A は一意的な自己共役拡張を持ち.それを L^0 とかくと L^0 の定義域は

$$\mathcal{D}(L^0) = \{ f(x);\ \hat{f}(\xi),\ A(\xi)\hat{f}(\xi) \in \hat{\mathcal{H}}_0 \}$$

で与えられる。ここに

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \xi\times \\ -\xi\times & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f] = (2\pi)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx$$

である。初期 data $g(x) = \{E^0(x,0),\ H^0(x,0)\} \in \mathcal{D}(L^0)$ に対し.(1.1)の解は Fourier inversion formula により.次のように表示される:

(1.2) $$u(x,t) = e^{iL^0 t}g(x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{iA(\xi)t}\hat{g}(\xi)].$$

$\lambda \in \mathbb{C}^1$ に対して

$$\det[A(\xi) - \lambda I] = \lambda^2(\lambda^2 - |\xi|^2)^2$$

に注意する(以下 I は $\mathbb{C}^6$ に於ける単位行列とし δ と区別する)。

行列 $A(\xi)$ の固有値 $\lambda=-|\xi|, 0, |\xi|$ に対する固有空間への射影をそれぞれ $P_{-1}(\xi)$, $P_0(\xi)$, $P_1(\xi)$ とおく。

$$[A(\xi)-\lambda I]^{-1}=\frac{1}{\lambda(\lambda^2-|\xi|^2)}\begin{bmatrix}(\xi\cdot\ )\xi-\lambda^2\delta & -\lambda\xi\times \\ \lambda\xi\times & (\xi\cdot\ )\xi-\lambda^2\delta\end{bmatrix}$$

であるから，$P_\nu(\xi)$ $(\nu=-1, 0, 1)$ は次のように表示される：

$$(1.3)\qquad P_0(\xi)=\frac{1}{|\xi|^2}\begin{bmatrix}(\xi\cdot\ )\xi & 0 \\ 0 & (\xi\cdot\ )\xi\end{bmatrix},\quad P_{\pm1}(\xi)=\frac{-1}{2|\xi|^2}\begin{bmatrix}\xi\times\xi\times & \pm|\xi|\xi\times \\ \mp|\xi|\xi\times & \xi\times\xi\times\end{bmatrix}.$$

$g(x)\in\mathcal{D}(L^0)$ を次のように分解する：

$$(1.4)\qquad g(x)=\mathcal{F}^{-1}[P_0(\xi)\hat{g}(\xi)]+\mathcal{F}^{-1}[\{P_{-1}(\xi)+P_1(\xi)\}\hat{g}(\xi)]$$
$$\equiv g_0(x)+g_1(x).$$

このとき $g_0(x)=\{E_0^0(x), H_0^0(x)\}$, $g_1(x)=\{E_1^0(x), H_1^0(x)\}$ は

$$\nabla\times E_0^0=\nabla\times H_0^0=0,\quad \nabla\cdot E_1^0=\nabla\cdot H_1^0=0$$

を充す。このことから $g_0(x)$ は L^0 の null space に属することがわかる。

$$(1.5)\qquad [A(\xi)-\lambda I]^{-1}=\frac{P_0(\xi)}{-\lambda}+\frac{P_1(\xi)}{|\xi|-\lambda}+\frac{P_{-1}(\xi)}{-|\xi|-\lambda}$$

であるから，(1.2) は次のように書き直せる：

$$(1.6)\qquad u(x,t)=g_0(x)+\mathcal{F}^{-1}[\{e^{-i|\xi|t}P_{-1}(\xi)+e^{i|\xi|t}P_1(\xi)\}\hat{g}_1(\xi)].$$

吾々は perturbed problem (0.1), (0.2) の解に対しても (1.6) に類似の表示を得たい。そのための第一歩として，ここで微分作用素 $A-\lambda I$ (λ: non real) の1つの基本解

$$(1.7)\qquad G(x,\lambda)=\mathcal{F}^{-1}[(A(\xi)-\lambda I)^{-1}]$$

の $|x|\to\infty$ での挙動をしらべる。

(1.5) より $G(x.\lambda)$ は次のように分けられる:

$$G(x.\lambda) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{P_0(\xi)}{-\lambda}\right] + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{P_1(\xi)}{|\xi|-\lambda} + \frac{P_{-1}(\xi)}{-|\xi|-\lambda}\right]$$

$$\equiv G_0(x.\lambda) + G_1(x.\lambda).$$

簡単な計算でわかるように, $\mathrm{Im}\lambda>0$ の場合には

$$G_0(x.\lambda) = \frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}\nabla\nabla\cdot\left[\frac{1}{|x|}\delta\right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda}\nabla\nabla\cdot\left[\frac{1}{|x|}\delta\right] \end{bmatrix}$$

$$G_1(x.\lambda) = \frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda}\nabla\times\nabla\times\left[\frac{e^{i\lambda|x|}-1}{|x|}\delta\right] & -\nabla\times\left[\frac{e^{i\lambda|x|}}{|x|}\delta\right] \\ \nabla\times\left[\frac{e^{i\lambda|x|}}{|x|}\delta\right] & \frac{1}{\lambda}\nabla\times\nabla\times\left[\frac{e^{i\lambda|x|}-1}{|x|}\delta\right] \end{bmatrix}$$

となる。ここに行列 $[\cdots]$ に対する $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ は columnwise に取っている。$\mathrm{Im}\lambda<0$ の場合は $e^{i\lambda|x|}$ を $e^{-i\lambda|x|}$ に置き変えればよい。

上の表示から次の定理が従う。

<u>定理 1.</u>

$x\neq0$ とすると $G(x.\lambda)$ は λ の函数として, $\mathrm{Im}\lambda>0$ 及び $\mathrm{Im}\lambda<0$ からそれぞれ実軸上まで解析接続出来る。又 $\lambda=\sigma\pm i\tau$ とおくとき, $\sigma_0\neq0$ なる任意の σ_0 (real) に対して, $R>0$, $a>0$, $\tau_0>0$ を適当にとれば

$$(1.8)\quad \begin{cases} |G(x,\sigma\pm i\tau)| \leq C|x|^{-1} \\ \left|\left\{A\left(\frac{x}{|x|}\right)\pm I\right\}G(x,\sigma\pm i\tau)\right| \leq C|x|^{-2} \end{cases} \quad \text{for } |x|>R,\ |\sigma-\sigma_0|<a,\ 0\leq\tau\leq\tau_0$$

が成り立つ。

証明は(1.8)の2つめの式がめんどうであるが，$G(x,\lambda)$ の表現に vector 値函数の微分に関する基本公式を用いればよい。

系 1.

$f(x)$ を $\mathcal{H}^0$ に属す support compact な函数とする。このとき $|\sigma-\sigma_0|<a$, $0\leq\tau\leq\tau_0$ なる σ,τ に一様に

$$
(1.9)\quad \left\{\begin{array}{l} |G(x,\sigma\pm i\tau)*f(x)|\leq C_f|x|^{-1} \\ |\{A(\frac{x}{|x|})\pm I\}\,G(x,\sigma\pm i\tau)*f(x)|\leq C_f|x|^{-2} \end{array}\right. \quad \text{for } |x|>{}^{\exists}R
$$

が成り立つ。

§2. 極限吸収の原理

Perturbed equation (0.1), (0.2) に対する reduced equation

$$(2.1)\qquad Av-(\sigma+i\tau)Mv=g(x) \qquad x\in\Omega$$

$$(2.2)\qquad Bv\Big|_S=0$$

を考える。ここに $M=M(x)=\begin{bmatrix}\varepsilon(x) & 0\\ 0 & \mu(x)\end{bmatrix}$ で，B は 3×6 matrix：$B=(n\times\ 0)$ である。

Linear space $L^2(\Omega;\mathbb{C}^6)$ に次の同値な2つの内積を定義する。

$$(f,g)_{\mathcal{H}}=\int_\Omega f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx,\quad \|f\|_{\mathcal{H}}=\sqrt{(f,f)_{\mathcal{H}}}\,,$$

$$(f,g)_{\mathcal{H}^1}=\int_\Omega M(x)f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx,\quad \|f\|_{\mathcal{H}^1}=\sqrt{(f,f)_{\mathcal{H}^1}}\,.$$

$\mathcal{H}=L^2(\Omega;\mathbb{C}^6)$ を内積 $(f,g)_{\mathcal{H}}$ による Hilbert 空間，$\mathcal{H}_1=L^2(\Omega;\mathbb{C}^6)$

を内積 $(f, g)_{\mathcal{H}'} = (Mf, g)_{\mathcal{H}}$ による Hilbert 空間とする。微分作用素 A は境界条件 (2.2) と共に $\mathcal{H}$ に於て唯 1 つの自己共役作用素 L を定める。L の定義域は

$$\mathcal{D}(L) = \{f(x)\,;\ f,\ Af \in \mathcal{H},\ Bf|_S = 0\}$$

で与えられる。ここに Af は distribution sense で考える。

$$L^1 = M^{-1}L, \quad \mathcal{D}(L^1) = \mathcal{D}(L)$$

とおく。明らかに L^1 は $\mathcal{H}^1$ に於ける自己共役作用素である。そこで $\tau \neq 0$ とすれば 任意の右辺 $g(x) \in \mathcal{H}^1$ に対して (2.1) (2.2) は $\mathcal{H}^1$ に於て一意的な解

(2.3) $$v(x, \sigma+i\tau) = \{L^1 - (\sigma+i\tau)\}^{-1} M^{-1} g = \{L - (\sigma+i\tau)M\}^{-1} g$$

を持つ。この節の吾々の目的は $\sigma \neq 0$ のとき $\tau \to \pm 0$ と共に解 $v(x, \sigma+i\tau)$ が収束することを示すことである。実軸は L^1 の連続スペクトルであるから もちろん極限函数は $\mathcal{H}^1$ には属さない。

次の補題はほとんど明らかである。

<u>補題 1</u>

$\mathfrak{N}(L^1)$ を L^1 の null space とする。$f(x) = \{E(x), H(x)\} \in \mathcal{D}(L^1) \ominus \mathfrak{N}(L^1)$ に対して次のことが成り立つ。

(2.4) $$\nabla \cdot \varepsilon(x) E = \nabla \cdot \mu(x) H = 0,$$

(2.5) $$n \times E|_S = n \cdot \mu(x) H|_S = 0.$$

定理２.

L^1 は０以外に固有値を持たない。

（証明）

$\sigma \neq 0$ (real) に対して $\{\Phi, \Psi\} \in \mathcal{D}(L^1)$ が方程式

$$\nabla\times\Psi - i\sigma\varepsilon(x)\Phi = 0,\quad -\nabla\times\Phi - i\sigma\mu(x)\Psi = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を充すとする。この方程式からただちに

$$(2.6)\quad \begin{cases} (\varepsilon(x)\nabla\cdot\nabla)\Phi = \nabla(\varepsilon(x)\nabla\cdot\Phi) + i\sigma\,\varepsilon(x)\nabla\times\mu(x)\Psi \\ (\mu(x)\nabla\cdot\nabla)\Psi = \nabla(\mu(x)\nabla\cdot\Psi) - i\sigma\,\mu(x)\nabla\times\varepsilon(x)\Phi \end{cases}$$

が従う。特に、仮定より，$\varepsilon(x)=\mu(x)=\delta$ for $|x|>\rho$ だから

$$\Delta\Phi = -\sigma^2\Phi,\quad \Delta\Psi = -\sigma^2\Psi \quad \text{for } |x|>\rho$$

を得る。よって Rellich の一意性定理から $\Phi(x)=\Psi(x)=0$ for $|x|>\rho$ が従う。ここで (2.4) に注意すれば，(2.6) に於て $\nabla(\varepsilon(x)\nabla\cdot\Phi)$，$\nabla(\mu(x)\nabla\cdot\Psi)$ は Φ, Ψ に対する高々一階の微分のみを含む低階の項になっていることがわかる。そこで我々は２階楕円型方程式に対する一意接続定理を用いることが出来て $\Phi(x)=\Psi(x)=0$ in Ω が示される。 ―以上―

さて $\tau\to\pm0$ に共う $v(x,\sigma+i\tau)$ の挙動をしらべるために方程式 (2.1), (2.2) をもっと広い class $\mathcal{H}_{loc}$（又は $\mathcal{H}^1_{loc}$）$= L^2_{loc}(\overline{\Omega};\mathbb{C}^6)$ で考える。この class で作用素 L_{loc}（又は L^1_{loc}）を

$$\mathcal{D}(L_{loc}) = \{f\in\mathcal{H}_{loc};\ \alpha(x)f\in\mathcal{D}(L) \text{ for } \forall\alpha(x)\in C_0^\infty(\overline{\Omega})\}$$

で定義された微分作用素 A (又は $M^{-1}A$) とする。$|x|\to\infty$ に於ける解の挙動は次の"radiation condition"によって制限する。

定義 1.

$|x|$ が充分大きな所で定義された函数 $f_\pm(x)$ が

(2.7) $$f_\pm(x)=O(|x|^{-1}),\quad \{A(\tfrac{x}{|x|})\pm I\}f_\pm(x)=O(|x|^{-2})\quad \text{as } |x|\to\infty$$

なる性質をもつとき $\begin{pmatrix}+:\ \text{incoming}\\ -:\ \text{outgoing}\end{pmatrix}$ radiation condition を充すと呼ぶ。

注意. 系 1 より. support compact な函数 $f(x)\in\mathcal{H}^0$ に対して $G(x,\sigma\pm i\tau)*f(x)$ ($\sigma\neq 0,\ 0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$) は radiation condition を充す。又. 上の定義がいわゆる Silver-Müller の radiation condition と同値な条件になっていることもすぐわかる (Mochizuki [9] 参照)。

補題 2.

$\sigma\neq 0$ に対して $\varphi(x)\in\mathcal{D}(L_{loc})$ が

$$L_{loc}\varphi-\sigma M(x)\varphi=0\quad(\text{in }\Omega)$$

を充し. さらに (incoming or outgoing) radiation condition を充すとすると $\varphi\in\mathcal{D}(L)$ である。従って定理 2 により $\varphi(x)\equiv 0$ in Ω である。

(証明)

$\varepsilon(x)=\mu(x)=\delta$ for $|x|>\rho$ であるから Green の公式を用いて $\tilde{\rho}>\rho$ ととれば

$$0 = \int_{\Omega \cap \{|x| < \tilde{\rho}\}} \{ L_{loc}\varphi \cdot \overline{\varphi} - \varphi \cdot \overline{L_{loc}\varphi} \} dx$$

$$= \int_{|x| = \tilde{\rho}} \frac{1}{i} A\left(\frac{x}{|x|}\right) \varphi \cdot \overline{\varphi} \, dS$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|x| = \tilde{\rho}} \left\{ A\left(\frac{x}{|x|}\right) \pm I \right\} \varphi \cdot \overline{\varphi} \, dS \mp \frac{1}{i} \int_{|x| = \tilde{\rho}} |\varphi|^2 dS.$$

よって (2.7) より

$$\int_{|x| = \tilde{\rho}} |\varphi|^2 dS \leq \int_{|x| = \tilde{\rho}} \left| \left\{ A\left(\frac{x}{|x|}\right) \pm I \right\} \varphi \right|^2 dS = O(\tilde{\rho}^{-2})$$

が従い，$\varphi \in \mathcal{H}$ が示される。 ―以上―

補題 3.

$\tilde{\rho} > \rho$ を充分大きくとり $g(x)$ の support が $\overline{\Omega}_{\tilde{\rho}} = \overline{\Omega} \cap \{|x| < \tilde{\rho}\}$ に含まれるとする。このとき (2.3) で与えられた (2.1), (2.2) の解 $v(x, \sigma + i\tau)$ は $|x| > \tilde{\rho} + 1$ で

(2.8) $$v(x, \sigma + i\tau) = G(x, \sigma + i\tau) * \frac{1}{i} \beta'(|x|) A\left(\frac{x}{|x|}\right) v(x, \sigma + i\tau)$$

なる表示をもつ。ここに $\beta(r)$ は $0 \leq \beta(r) \leq 1$，$\beta(r) = 0$ for $r < \tilde{\rho}$，$= 1$ for $r > \tilde{\rho} + 1$ なる C^∞-function であり，$\beta'(r)$ はその derivative である。

次の補題は境界条件 (2.2) が A に対して coercive であることを示すもので，以下の議論で本質的な役割をする。証明は Leis [7] を参照。なお Schmidt [11] は $\varepsilon(x) = \mu(x) = \delta$ の場合に Friedrichs [2] が証明した同じ不等式を用いている。筆者には Friedrichs の証明はよくわからない。

<u>補題 4.</u>

$\eta(x)$ を $\varepsilon(x)$ 又は $\mu(x)$ とする。$A(x) \in \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega ; \mathbb{C}^3)$ が $n\times A|_S = 0$ 又は $n\cdot A|_S = 0$ を充すとする。このとき

$$
(2.9) \qquad \sum_{i=1}^{3} \|\nabla A_i\|^2 \leqslant C\left\{ \|\nabla\times A\|^2 + \frac{1}{\kappa_1}\|\nabla\cdot\eta(x)A\|^2 + \|A\|^2 \right\}.
$$

ここに κ_1 は $\eta(x)\kappa(x) = (\det\eta(x))\delta$ を充す正定値行列 $\kappa(x)$ の operator norm である: $\kappa(x)\xi\cdot\bar{\xi} \leqslant \kappa_1|\xi|^2$ for $\forall x \in \bar{\Omega}$, $\forall \xi \in \mathbb{C}^3-\{0\}$. なる最小の正数である。

さて我々は上のいくつかの補題をもちいて、次の極限吸収の原理を証明することが出来る。

<u>定理 3.</u>

$\sigma \neq 0$ (real) とし、$g(x)$ を $\mathcal{H}^1$ に属す support compact な函数とする。このとき (2.1), (2.2) の解 $u(x, \sigma+i\tau) \in \mathcal{H}^1$ は $\tau \to \pm 0$ と共に $\mathcal{H}^1_{loc}$ の任意の semi-norm (local norm) の意味で収束し、その極限函数 $u_\pm(x,\sigma)$ は方程式

$$
L^1_{loc}\, u_\pm - \sigma u_\pm = M^{-1}(x)\, g(x)
$$

及び radiation condition (2.7) を充す。さらに $u_\pm(\cdot,\sigma)$ は $\mathcal{H}^1_{loc}$ valued continuous function of $\sigma \in R^1-\{0\}$ である。

この定理及び次節以下の ~~ほとんどすべての~~ 結果は Mochizuki [10] にくわしい証明を与えてあるので、ここでは証明しない。

[10] では方程式をすこし一般にしてあるので Maxwell 方程式に制限すると $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ が本質的に scalar の場合にしか議論が出来ていない。§1, §2 を通して、そのギャップがうめられるはずである。

§3. 一般化された固有函数展開

Perturbed problem (0.1), (0.2) の解を (1.6) と類似の形に表示するために plane waves $P_\nu(\xi)e^{ix\cdot\xi} \equiv \Phi_\nu^0(x,\xi)$ に変る distorted plane waves $\Phi_\nu^\pm(x,\xi) = \Phi_\nu^0(x,\xi) + V_\nu^\pm(x,\xi)$ を構成する必要がある。そのためにまず方程式

$$\{L^1-(\sigma+i\tau)\}\Psi_\nu = -\{L^1-\nu|\xi|\}\beta(|x|)\Phi_\nu^0 + (\nu|\xi|-\sigma-i\tau)\{1-\beta(|x|)\}M^{-\frac{1}{2}}\Phi_\nu^0 \tag{3.1}$$

$(\nu=-1,0,1)$ の解 $\Psi_\nu(x,\xi,\sigma+i\tau) \in \mathcal{H}^1$ を考える。ここに $\beta(r)$ は補題3で定義したものである。$|x|>\rho$ で L^1 は A に等しく

$$\{A-\nu|\xi|\}\Phi_\nu^0(x,\xi) = 0$$

に注意すれば、(3.1) の右辺が各 $\xi \in \mathbb{R}^3-\{0\}$, $\sigma \in \mathbb{R}^1-\{0\}$, $0 \leq \tau \leq \tau_0$ に対して $\mathcal{H}^1$ に属す support compact な函数になっていることがわかる。そこで

$$V_\nu(x,\xi;\sigma+i\tau) = \Psi_\nu(x,\xi;\sigma+i\tau) - \{1-\beta(|x|)\}\Phi_\nu^0(x,\xi) \tag{3.2}$$

とおくと、定理3から $\tau\to\pm0$ と共に極限 $V_\nu(x,\xi;\sigma\pm i0)$ が存在する。これは $\mathcal{H}^1_{loc}$-valued continuous function of $\xi\in\mathbb{R}^3-\{0\}$, $\sigma\in\mathbb{R}^1-\{0\}$ であり、明らかに radiation condition を充す。

$$(3.3)\qquad V_\nu^\pm(x,\xi)=V_\nu(x,\xi;\nu|\xi|\mp i0)\quad(\nu=-1,1)$$

とおく。このとき $\Phi_\nu^\pm=\Phi_\nu^0+V_\nu^\pm$ は $\{L_{loc}^1-\nu|\xi|\}\Phi_\nu^\pm=0$ を充す distorted plane waves を与える。

これを用いて次の展開定理を得る：

<u>定理 4.</u>

1° Q^0, Q^1 をそれぞれ L^0, L^1 の null spaces への射影とする。作用素 $W_\nu^\pm$ $(\nu=-1,1)$ を

$$(3.4)\qquad [W_\nu^\pm f](x)=\mathrm{l.i.m}\,(2\pi)^{-3/2}\int_{R^3}\Phi_\nu^\pm(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

で定義し、$W^\pm=W_1^\pm+W_{-1}^\pm$ とおくと、$W^\pm$ は $(I-Q^0)\mathcal{H}^0$ を $(I-Q^1)\mathcal{H}^1$ の上に写す unitary operator となる。

2° $f\in\mathcal{H}^1$ に対して次の inversion formula が成り立つ：

$$(3.5)\qquad f(x)=Q^1f(x)+(2\pi)^{-3/2}\int_{R^3}\{\Phi_1^\pm(x,\xi)\hat{f}_1^\pm(\xi)+\Phi_{-1}^\pm(x,\xi)\hat{f}_{-1}^\pm(\xi)\}\,d\xi\,;$$

$$(3.6)\qquad f_\nu^\pm(\xi)=(2\pi)^{-3/2}\int_\Omega\Phi_\nu^\pm(x,\xi)^*M(x)f(x)\,dx.$$

ここに $*$ はadjoint matrix を意味する。

3° $(I-Q^1)L^1$ は $(I-Q^0)L^0$ と unitary equivalent である：

$$(3.7)\qquad (I-Q^1)L^1=W^\pm(I-Q^0)L^0W^{\pm*}.$$

§ 4. 散乱理論

この節では $W^\pm$ が Møller の wave operator と一致することを示す。$-\infty<t<\infty$ に対して $W(t);\mathcal{H}^0\to\mathcal{H}^1$ を次で定義する。

$$(4.1)\qquad W(t)=e^{iL^1t}J\,e^{-iL^0t}(I-Q^0),$$

ここに $J: \mathcal{H}^0 \to \mathcal{H}^1$ は次で定義される truncation operator である：

(4.2) $\quad [Jf](x) = f(x) \quad \text{for} \quad x \in \Omega.$

吾々は次の定理を証明出来る。

定理5.

(4.3) $\quad W^{\pm} = \text{strong-}\lim_{t \to \pm\infty} W(t).$

つまり $W^{\pm}$ は Møller の Wave operator である。

これから scattering operator が $S = W^{+*} W^{-}$ によって定義されるが S は $(I-Q^0)\mathcal{H}^0$ 上の unitary operator で L^0 と可換になる。さらに任意の $g(x) \in (I-Q^1)\mathcal{H}^1$ に対して $g^+, g^- \in (I-Q^0)\mathcal{H}^0$ が存在し，$g^+ = Sg^-$ でかつ

(4.4) $\quad \lim_{t \to \pm\infty} \| e^{-iL^1 t} g - J e^{-iL^0 t} g^{\pm} \|_{\mathcal{H}^1} = 0$

となる。

なを scattering operator の積分表現と kernel の analyticity も得られるはずであるが，まだたしかめていない。方法は Schrödinger 作用素に対して，例えば Ikebe [3]，Mochizuki [8] 等に用いられたのと同様にして，うまくゆくであろうと思っている。

以上，紙数の関係で特に後半があらっぽくなってしまったが，終りにする。

References

[1] Eidus, D. M., The principle of limiting absorption. Mat. Sb. (N. S.) 58 (100) (1962), 65-86 (Russian).

[2] Friedrichs, K. O., Differential forms on Riemanian manifolds. CPAM 8 (1955), 551-590.

[3] Ikebe, T., On the phase-shift formula for the scattering operator. Pacific J. Math. 15 (1965), 511-523.

[4] ———, Scattering for the uniformly propagative systems. Proc. International Conference on Functional Analysis and Related Topics (1969), to appear.

[5] Kato, T., Scattering theory with two Hilbert spaces. J. Functional Anal. 1 (1967), 342-368.

[6] Lax, P. D., and R. S. Phillips, Scattering Theory. Academic Press, New York (1967).

[7] Leis, R., Zur Theorie electromagnetischer Schwingungen in anisotropen inhomogenen Medien. Math. Zeitschr. 106 (1968), 213-224.

[8] Mochizuki, K., Eigenfunction expansions associated with the Schrodinger operator with a complex potential and the scattering theory. Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A 4 (1968), 419-466.

[9] ———, Some remarks on radiation conditions. Proc. Japan Acad. 45 (1969), 700-705.

[10] ———, Spectral and scattering theory for symmetric hyperbolic systems in an exterior domain. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 5 (1969), 219-258.

[11] Schmidt, G., Spectral and scattering theory for Maxwell's equations. Arch. Rational Mech. Anal. 28 (1968), 284-322.

[12] Wilcox, C. H., Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problem of classical physics. ibid. 22 (1966), 37-78.