数理解析研究所講究録
第 102 巻 1970 年 104-148

散乱の定常論の微分作用素の散乱問題への応用

東大 理　黒田成俊

研究集会の折の話が，話の標題とは少しずれたものになってしまったので，講究録では，標題も表記のように変更させて頂いたことを，はじめに御諒承頂きたい．大体，研究集会でお話ししたことを詳しく述べるが，紙数が許せば，その後しらべたこともつけ加える．(§4)

散乱理論でとり扱われている微分作用素と云えば，Schrödinger 作用素，外部問題，一階対称双曲系，特に uniformly propagative system などがある．いわゆる abstract stationary method はこれまで主として Schrödinger 作用素に応用されてきたが，多少の改良を加えると，他の問題にも応用できるようである．本稿は，これについての暫定的な報告である．

§1 で一般論について述べ，§2 以下で二，三の問題への応用について述べる．

§1. 一般論.

一般論は, "分解法" を用いた smooth perturbation による. すなわち, $H_2 \cong H_1 + A^*B$ のような場合を考える. このとき, 簡単のためという理由で, Domain も含めて $H_2 = H_1 + A^*B$ となる場合に限っても応用上可成りの場合を含むことができるが, 少し長くなっても一般性を犠牲にしないほうが, 結局はいいようなので, 以下 Assumptions to simplify はなるべく導入しないことにする.

1.1. 分解法. H_1 をヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ における自己共役作用素であるとし, また, A_k, B_k, $k=1,\cdots,r$, は $\mathbb{H}$ から他のヒルベルト空間 $\mathbb{X}_k$ への閉作用素で定義域は稠密であるとする (なお, 断らないかぎり, 作用素はすべて線型作用素とする). また, $C_k \in \mathbb{B}(\mathbb{X}_k)$ とする. ただし $\mathbb{B}(\mathbb{X}_k)$ は $\mathbb{X}_k$ における有界線型作用素で $\mathbb{X}_k$ を定義域とするもの全体とする. 以下

$$H_2 \sim H_1 + \sum_{k=1}^{r} A_k^* C_k B_k$$

で与えられる H_2 を考えるが, そのため Kato [5] に従って次の三条件 (C.1), (C.2), (C.3) を導入する.

(C.1) $D(A_k) \supset D(H_1)$, $D(B_k) \supset D(H_1)$,

$$k = 1, 2, \cdots, r.$$

条件 (C. 1) のもとで，次の (C. 2) を考える．ただし，$\mathbb{B}(\mathbb{X}_k, \mathbb{X}_j)$ の定義は $\mathbb{B}(\mathbb{X}_k)$ に準じ，$[A]^a$ は作用素 A の *closure* を表わす．この記号がでてきたときには，A が *closable* ということはつねに仮定されるものとする．

(C. 2) $\left\{\begin{array}{l} \text{任意の } z \in \rho(H_1) \text{ に対して,} \\ \quad Q_{jk}^{(0)}(z) \overset{def}{=} [B_j R_1(z) A_k^*]^a \in \mathbb{B}(\mathbb{X}_k, \mathbb{X}_j). \end{array}\right.$

(C. 2) のもとで，次の記号を導入する．*)

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{X}_r,$$

$$Q^{(0)}(z) = \{Q_{jk}^{(0)}(z)\} \in \mathbb{B}(\mathbb{X}),$$

$$Q_{jk}(z) = C_j Q_{jk}^{(0)}(z) \in \mathbb{B}(\mathbb{X}_k, \mathbb{X}_j),$$

$$Q(z) = \{Q_{jk}(z)\} \in \mathbb{B}(\mathbb{X}).$$

さて，条件 (C. 3) は次の通り．

(C. 3) $\left\{\begin{array}{l} (1+Q(z_0))^{-1} \text{ が } \mathbb{B}(\mathbb{X}) \text{ の元として存在す} \\ \text{るような } z_0 \in \rho(H_1) \text{ がある.} \end{array}\right.$

<u>定理</u> 1. 1. 条件 (C. 1), (C. 2), (C. 3) を仮定する．そのとき，$\mathbb{H}$ のなかの稠密な定義域をもつ閉作用素 H_2 で次の性質 i), ii) をみたすものが一意的に存在する．

i) 集合 $\Lambda = \{z \mid (1+Q(z))^{-1} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})\}$ は $\rho(H_1) \cap \rho(H_2)$ の連結成分いくつかの合併になる．ii) $z \in \Lambda$ に対して，

---

*) $A = \{A_{jk}\} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$ の定義は，$u = \{u_1, \cdots, u_r\}$ のとき $(Au)_j = \sum_{k=1}^{r} A_{jk} u_k$

$(1+Q(z))^{-1}=\{G_{jk}(z)\}$ とかき，また $R_j(z)=(H_j-z)^{-1}$ を H_j の resolvent とすると，

$$R_2(z)=R_1(z)-\sum_{j,k}[R_1(z)A_j^*]^a G_{jk}(z)C_k B_k R_1(z).$$

注意. 条件 (C.1) により，$[R_1(z)A_j^*]^a=\{A_jR_1(\bar{z})\}^*\in \mathbb{B}(\mathbb{X}_j,\mathbb{H})$. 上の定理には，$H_1$ の自己共役性はいらない．Resolvent が空でない閉作用素でよい．ただし，若干の修正（たとえば (C.1) で $D(A_k)\supset D(H_1^*)$ など）がいる．

定理 1.1 の証明は，容易に $r=1$ の場合に帰着される．すなわち，上に定義した $\mathbb{X}$ をとり，$A:\mathbb{H}\to\mathbb{X}$ として，$D(A)=\bigcap_k D(A_k)$，$Au=\{A_1u,\cdots,A_ku\}$，B も同様，また $C:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ としては $C\{u_1,u_2,\cdots\}=\{C_1u_1,C_2u_2,\cdots\}$ ととればよい．$r=1$ の場合の証明は，Kato [5] の証明はとんどそのままである．

定理 1.1 において，A_k, B_k に条件を追加すれば，H_2 も自己共役になることが証明できる（以下の定理 1.2 参照）．しかし，本稿で論ずる応用では，自己共役作用素 H_1, H_2 が与えられて，定理 1.1 の関係が成り立つ場合を考えるので，定理 1.2 は使わない．以下 §1.1 の残りはとばして読まれても差し支えない．

次の条件 (C.4), (C.5) を考える．

(C.4)　$z_0 \in \mathbb{C}$, $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, および ζ_0 と 1 を結ぶpath Γ (Γ は端点を含むものとする)で，次の性質をみたすものが存在する．i) $\|\zeta_0 Q(z_0)\| < 1$, $\|\zeta_0 Q(\bar{z}_0)\| < 1$；ii) 任意の $\zeta \in \Gamma$ に対して，$(1+\zeta Q(z_0))^{-1}$，$(1+\zeta Q(\bar{z}_0))^{-1}$ が $\mathbb{B}(\mathbb{X})$ の元として存在する．

(C.5)　任意の $u, v \in \{\bigcap_{k=1}^{r} D(A_k)\} \cap \{\bigcap_{k=1}^{r} D(B_k)\}$ に対して，次の式が成り立つ．

$$\sum_{k=1}^{r} (C_k B_k u, A_k v)_{\mathbb{X}_k} = \sum_{k=1}^{r} (A_k u, C_k B_k v)_{\mathbb{X}_k}.$$

定理 1.2．条件 (C.1)―(C.5) が成立するならば，定理 1.1 の H_2 は自己共役になる．

注意．条件 (C.4) は条件 (C.3) を含む．(C.3) が成り立ち，$Q(z_0)$，$Q(\bar{z}_0)$ が完全連続ならば，(C.4) が成り立つ．摂動項が，非摂動項に比べて低階のときには，このcriterion が使えることが多い．

定理 1.2 は Konno and Kuroda [10] の Lemma 2 の証明に用いた方法で容易に証明できるが，ここでは省略する．

1.2. Smooth Perturbation の一つの定理．

$H_2 \doteqdot H_1 + A^*CA$ の形で Schrödinger 作用素を取り扱ったとき (Kato-Kuroda [8], Kato [7] 参照) 主な役割りをしたのは，

H_1 の或る意味での spectral density $M(\lambda)=(d/d\lambda)AE_1(\lambda)A^*$（$E_1$ は H_1 のスペクトル分解）と $Q(z)=CAR_1(z)A^*$ であった．$M(\lambda)$ については存在と，Hölder 連続性，$Q(z)$ については，完全連続性が要求された．本稿では，それを一般化して，$Q(z)$ の完全連続性の要求をはずす*)．その代り，$M(\lambda)$ が完全連続であるとする．もともと，$M(\lambda)$ は local に定義されていれば十分で，例えば $\lambda=0$ で定義されないような場合があったのであるが，$Q(z)$ の完全連続性をはずした代りに，$\|M(\lambda)\|$ の local integrability が要求される．なお，ついでに，H_1 は discrete な固有値（連続スペクトルに埋った固有値）をもってもよい状況にも使える形にする．ただし，以下の応用では H_1 はすべて絶対連続である．定理の正確な形は次の通りである．（定理 1.3）

まず，H_1，A_k，B_k は §1.1 の冒頭に述べた通りとし，条件（C.1）を仮定する．そのとき，任意の有界な Borel 集合 e に対して，$[B_j E_1(e) A_k^*]^a = B_j E_1(e)[E_1(e)A_k^*]^a \in \mathbb{B}(\mathfrak{X})$ となる．このことに注意した上で，次の条件（C.6）－（C.9）を導入する．ただし，これらの条件の中で，集合 e_1 は，$\mathbb{R}$ の可算部分集合 $e_1=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$ で，(有限な)集積点をもたないものとし，以下そのような e_1 が一つ固定されていると考える．

*) もともと，完全連続性は $(1+Q(z))$ が，大部分の実軸上の境界点も含めて，正則であることを示すためのみに用いられていた．

(C.6) 次の性質 i), ii) をもつような作用素値函数 $M_{jk}: \mathbb{R}-e_1 \to \mathbb{B}(\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_j)$, $1 \le j, k \le r$, が存在する. i) M_{jk} は $\mathbb{R}-e_1$ で作用素のノルムの意味で Hölder 連続; ii) $\bar{I} \subset \mathbb{R}-e_1$ であるような任意の有界区間 I に対して

$$[B_j E_1(I) A_k^*]^a = \int_I M_{jk}(\lambda)\, d\lambda.$$

(C.7) $\tilde{M}_{jk}: \mathbb{R}-e_1 \to \mathbb{B}(\mathfrak{X}_k, \mathfrak{X}_j)$, $1 \le j, k \le r$, が存在して, (C.6) の性質 i), ii) が, 上の式を次のように変えて成り立つ.

$$[A_j E_1(I) A_k^*]^a = \int_I \tilde{M}_{jk}(\lambda)\, d\lambda.$$

(C.8) (C.6) の $M_{jk}(\lambda)$ が次の性質 iii), iv) をもつ.
iii) 任意の j, k と任意の $N > 0$ に対して

$$\int_{-N}^{N} \| M_{jk}(\lambda) \| \, d\lambda < \infty,$$

iv) 任意の $\lambda \in \mathbb{R}-e_1$ に対して, $M_{jk}(\lambda)$ は完全連続である.

(C.9) $\lambda_k \in e_1$ が H_1 の固有値であるならば, その多重度は有限である.

§1 の主定理は次の通り.

<u>定理</u>1.3. H_1, A_k, B_k, C_k は§1.1冒頭の通りとし, $0 \leqq \sigma_k \leqq 1$, $0 \leqq \rho_k \leqq 1$,

(1.1) $\quad \max\limits_k \sigma_k + \max\limits_k \rho_k \leqq 1$

をみたすような σ_k, ρ_k が存在して, 任意の k に対して

(1.2) $\quad D(A_k) \supset D(H_1^{\sigma_k}),\ D(B_k) \supset D(H_1^{\rho_k})$

が成り立つとする. しからば, (C.1), (C.2) は明らかに成立するが, さらに (C.3) が二つの点 $z_0 = z_\pm$, $\mathrm{Im}\, z_\pm \gtrless 0$ に対して成立すると仮定し, そのとき定理1.1で定まる H_2 が自己共役であると仮定する. また, 条件 (C.6), (C.8), (C.9) がみたされていると仮定する. そのとき, 次の i), ii), iii) が成り立つ. i) 任意の $\lambda \in \mathbb{R} - e_1$ に対して, 極限

$$Q(\lambda + i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q(\lambda + i\varepsilon)$$

がノルム収束の意味で存在する; ii) $Q(\lambda + i\varepsilon)$ は, $\lambda \in \mathbb{R} - e_1$, $\varepsilon \geqq 0$ でノルムの意味で連続である; iii) $e_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} - e_1 \mid (1 + Q(\lambda + i0))^{-1}$ が $\mathbb{B}(\mathfrak{X})$ の元として存在しない$\}$ とすると, e_+ は閉集合かつ零集合である. 同様の主張は, $\lambda + i\varepsilon$, $\lambda + i0$ を $\lambda - i\varepsilon$, $\lambda - i0$ に変えても成立する.

以上の仮定に加えて, さらに (C.7) を仮定すれば, wave operator $W_\pm(H_2, H_1)$ が存在して完備である.

注意1. 定理の最後の部分の仮定のもとでは, 散乱理論の種

種の結論も導かれる．すなわち，1) いわゆる invariance principle が成り立つ；2) $W_\pm$ は定常的に構成される；3) $R(A^*) = A^* \mathfrak{X}$（ただし A は 4 頁で定義したもの）を自然にプレ・ヒルベルト空間とみるとき，$R(A^*)^*$ において固有関数展開の摂動論を構成できる．なお定理の最後の部分の証明，および上の諸性質の検証は，実質的にはすでになされている．（Kato and Kuroda [8, 9] 参照）

注意 2．$M_{jk}(\lambda)$ および $\tilde{M}_{jk}(\lambda)$ の Hölder 連続性の指数が $> 1/2$ ととれるときには，$e_+ = e_- \equiv e_2$ であり，e_2 は $R - e_1$ の内部には集積しない可算集合であり，e_2 の各点は H_2 の多重度有限な固有値となる（Kuroda [12] 参照）．

定理 1.3 の証明は，紙数に余裕があれば，最後に述べる．(§5)

§2．応用 1．二階の摂動を含む Schrödinger 作用素．

$L^2(R^n)$ で次の作用素を考える．H_2 の正確な定義はのちに述べる．

$$H_1 = -\Delta = \sum_{k=1}^{n} D_k^2, \qquad D_k = -i\,\partial/\partial x_k,$$

$$H_2 = \sum_{j,k=1}^{n} D_j(\delta_{jk} + a_{jk}(x))D_k + \sum_{j=1}^{n}\left(b_j(x)D_j + D_j\overline{b_j(x)}\right) + q(x).$$

この問題は，Ushijima [16]（$a_{jk} \equiv 0$ の場合），Ikebe and

Tayoshi [4] によって考察され，各係数および適当な微係数が遠方で $|x|^{-(2+\varepsilon)}$，または $|x|^{-(3+\varepsilon)}$ の order で減少すれば（またはそれに相当する integrability condition をみたせば） $W_\pm$ が存在して Complete ということがわかっている．ここでは，定理 1.3 を用いて，$|x|^{-(1+\varepsilon)}$ までいけることを示す．

分解法を用いるのに，固有函数展開のことを考えるならば，$H_2=\sum(\delta_{jk}+\alpha_{jk})D_jD_k+\sum\beta_jD_j+\gamma$ の形を採用して，$A=(1+|x|)^{-\delta}$ とえらぶのがよいかもしれないが，ここでは，分解法と Form の理論の関係をみる目的もあって，さきに与えた H_2 の形を用いて，Form の理論を使うことにする．なお，簡単のため係数はすべて有界とするが，ある種の非有界性を許すこともできる．

この§を通じて，次の (A.1) − (A.3) を仮定する．

(A.1)　q は実数値，また $a_{jk}(x)=\overline{a_{kj}(x)}$;

(A.2)　ある $\alpha>1$ に対して，

$$
\left\{
\begin{aligned}
&c_{jk}(x)=(1+|x|)^{\alpha}a_{jk}(x),\\
&c_j(x)=(1+|x|)^{\alpha}b_j(x),\\
&c(x)=(1+|x|)^{\alpha}q(x)
\end{aligned}
\right.
$$

はすべて $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属する．

(A.3)　（一様楕円性）ある $\delta_0>0$ が存在して，

$$\left\{ \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk}+a_{jk}(x))\xi_k\bar{\xi}_j \geqq \delta_0|\xi|^2,\ 0\neq\xi\in\mathbb{C}^n. \right.$$

まず，$H^1(\mathbb{R}^n)=\mathcal{E}^1_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ を定義域とするエルミート形式を次のように導入する．

$$h_1[u,v]=\sum_j (D_j u, D_j v)$$
$$h_{20}[u,v]=\sum_{j,k}((\delta_{jk}+a_{jk})D_k u, D_j v)$$
$$h_2[u,v]=h_{20}[u,v]+\sum_j\{(b_j D_j u,v)+(u,b_j D_j v)\}$$
$$+(qu,v).$$

命題 2.1. h_1, h_{20}, h_2 は下に有界で閉なエルミート形式である．

証明. h_1, h_{20} については明らか (cf. (A.3))． b_j, q は有界だから，h_2-h_{20} は h_1 従って h_{20} に関して相対的に有界で，relative bound は任意に小さくできる．これより h_2 に関する主張がでる．(証終)

定理 2.2. h_1, h_2 に Form の理論の意味で対応する自己共役作用素を H_1, H_2 とする．しからば，wave operators $W_\pm(H_2,H_1)$ が存在して完備である．

定理 2.2 を証明するために，まず，Form による定義と分解法の関係を与える次の一般的補題を証明する．

補題 2.3. h_1 を非負かつ閉であるエルミート形式とし，H_1 を h_1 に対応する自己共役作用素とする．また，A_k,

B_k, C_k は §1.1 冒頭の仮定をみたす作用素とし，$D(A_k) \supset D(H_1^{1/2})$，$D(B_k) \supset D(H_1^{1/2})$ とする．さらに，$D(H_1^{1/2})$ 上で定義される二次形式

(2.1) $\qquad h_2[u,v] = h_1[u,v] + \sum_{k=1}^{r} (C_k B_k u, A_k v)_{\mathfrak{X}_k}$

が下に有界な閉エルミート形式であると仮定する．そのとき，条件 (C.1), (C.2), (C.3) が成立し，定理1.1できまる H_2 は h_2 に対応する自己共役作用素と一致する．

(C.1), (C.2) がなりたつこと，および補題2.3の証明が $r = 1$ の場合に帰着されることは容易にわかる．以下，$r = 1$ の場合の証明において，$A_1, \cdots$ は $A, \cdots$ とかき，また H_2' は h_2 に対応する自己共役作用素とし，$R_2'(z) = (H_2' - z)^{-1}$ とする．z はつねに $\rho(H_1) \cap \rho(H_2)$ からとる．$D(h_1) = D(h_2) = D(H_1^{1/2})$ を D とかく．

<u>命題</u> 2.4. 任意の $u \in \mathfrak{X}$ に対して $v = [R_1(z) A^*]^a u$ とおくと，$v \in D$ であり，

$$(h_1 - z)[v, w] = (u, Aw)_{\mathfrak{X}}, \quad \forall w \in D.$$

証明. $v \in D$ は容易．まず $w \in D(H_1)$ とする．しからば，$(h_1 - z)[v,w] = (v, (H_1 - \bar{z})w) = (u, AR_1(\bar{z})(H_1 - \bar{z})w)_{\mathfrak{X}} = (u, Aw)_{\mathfrak{X}}$．任意の $w \in D$ に対しては，$w_n \in D(H_1)$ により，$w_n \to w$，$H_1^{1/2} w_n \to H_1^{1/2} w$ と近似すればよい．ただし，$Aw_n = A(H_1+1)^{-1/2}(H_1+1)^{1/2} w_n \to Aw$ に注意．(証終)

命題2.5. $1+Q(z)$ は一対一である.

証明. $(1+Q(z))u=0$, $u\in\mathfrak{X}$, とし $v=[R_1(z)A^*]^a u$ とおく. すなわち, $u=-Q(z)u=-CBv$. そこで, 命題2.4 を使えば,

$$(\mathfrak{h}_1-z)[v,w]=(u,Aw)=-(CBv,Aw),\quad \forall w\in D.$$

すなわち, $(\mathfrak{h}_2-z)[v,w]=0$. 故に, $\mathfrak{h}_2\geqq\gamma$ であるような任意の γ に対して,

$$((H_2-\gamma)^{1/2}v,(H_2-\gamma)^{1/2}w)=(z-\gamma)(v,w),$$
$$\forall w\in D=D((H_2-\gamma)^{1/2}).$$

故に $v\in D(H_2)$ で $H_2v=zv$ となるが, $z\in\rho(H_2)$ であったから, $v=0$. $u=-CBv$ により $u=0$ を得る. (証終)

命題 2.6. $CBR_1(z)=(1+Q(z))CBR_2'(z)$,
$(1+Q(z))(1-[CBR_2'(z)A^*]^a)=1$.

証明. $u,w\in\mathbb{H}$, $v=R_2'(z)u$ とすると,

$$(2.2)\quad (R_1(z)u,w)=((H_2'-z)v,R_1(\bar{z})w)$$
$$=(\mathfrak{h}_1-z)[v,R_1(\bar{z})w]+(CBv,AR_1(\bar{z})w)$$
$$=(v,w)+(CBv,AR_1(\bar{z})w).$$

ここで $w=B^*w'$, $w'\in D(B^*)$, を入れれば,

$$BR_1(z)=BR_2'(z)+Q^{(0)}(z)CBR_2'(z)$$

を得る. これに左から C をかければ, 証明すべき第一の式

が得られ，それに右からA^*をかけて変形すれば才二の式が得られる．（証終）

補題2.3 の証明．命題2.5および命題2.6の才二式により，$(1+Q(z))^{-1}\in \mathbb{B}(\mathbb{X})$が存在することがわかり（C.3）が成り立つ．よって補題（2.6）式の才一の式より，$CBR_2'(z)=(1+Q(z))^{-1}CBR_1(z)$を得て，これを（2.2）に代入すれば，$R_1(z)=R_2'(z)+[R_1(z)A^*]^a(1+Q(z))^{-1}CBR_1(z)$が成りたつ．一方定理1.1により，$H_2$のresolventもこの式をみたしたから，$(H_2'-z)^{-1}=(H_2-z)^{-1}$，すなわち$H_2'=H_2$が示された．（証終）

さて，いよいよ定理1.3，補題2.3を利用して，定理2.2を証明するのであるが，そのためには，この問題におけるA_k等を定めねばならない．この場合，添字を$1\leq k\leq r$と一列に並べる代りに，次のような添字の組を考える．1）零階の項に対応して，添字0；2）一階の項(u,b_jD_jv)に対応して添字j，$1\leqq j\leqq n$；3）一階の項(b_jD_ju,v)に対応して添字j，$1\leqq j\leqq n$；4）二階の項に対応して，添字jk，$1\leq j,k\leq n$．（結局$r=(n+1)^2$である）1)，2)，3)，4）の場合における作用素A，B，Cをそれぞれ，$A_0,\cdots;A_j,\cdots;A_j',\cdots;A_{jk},\cdots$とかく．また，$\mathbb{X}_k$に当る空間はすべて$\mathbb{H}=L^2(R^m)$に等しいとする．こ

のとき，A_0 etc. を次のようにとれば，エルミート形式 h_2 が（2.1）の形になることがわかる．ただし，α は仮定（A.2）にでてきた数で，$s=\alpha/2$ とする．また・は掛け算作用素を表わす．

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} &A_0 = B_0 = (1+|x|)^{-s}\cdot \;;\; A_j' = B_j = A_0\;;\\ &A_j = B_j' = A_{jk} = B_{kj} = (1+|x|)^{-s} D_j\;;\\ &C_0 = c(x)\cdot,\quad C_j = C_j' = c_j(x)\cdot,\\ &C_{jk} = c_{jk}(x)\cdot\;;\qquad 1\leqq j,k\leqq n. \end{aligned}$$

このように定義した上で，定理1.3の仮定を検証しよう．ただし，添字 k は上のようにおきかえて考える．（1.2）はすべての σ，ρ を 1/2 として成立するから，（1.1）も成り立つ．h_2 が下に有界な Hermite 形式であることは，命題2.1でわかっていたから，h_2 に補題2.3を適用することができる．よって（C.3）はみたされ，h_2 に対応する H_2 に対して，定理1.1の分解法が適用できる．したがって，定理2.2を証明するには，$e_1=\{0\}$として条件（C.6），（C.7），（C.8）が検証できれば十分である．*)

（2.3）にでてきた $(n+1)^2$ 個の作用素は，同じ形のものが多い．結局のところ，（C.6）—（C.8）を検証するには，

$$(2.4)\qquad [A_j E_1(I) A_k^*]^a = \int_I M_{jk}(\lambda)\,d\lambda,\; 0\leqq j,k,\leqq n,$$

*) H_1 は固有値をもたないから，（C.9）は当然みたされる

(ただし，$A_j=(1+|x|)^{-s}D_j$, $D_0=I$, を示し，$M_{jk}(\lambda)$ の性質を論ずればよいことになる．それには，Schrödinger 作用素の場合と同じように，$M_{jk}(\lambda)$ の"平方根"のようなものを考えればよい．

<u>補題</u> 2.7. 任意の $\lambda>0$ と $k=0,1,\cdots,n$ に対して，次の (2.5) をみたすような $T_k(\lambda)\in\mathbb{B}(L^2(R^n),L^2(S^{n-1}))$ が存在する：(次式右辺の $\sqrt{2}\lambda^{(n-2)/4}$ の因子は後の便宜のためにつけてある)

(2.5) $\quad (T_k(\lambda)u)(\omega)=\sqrt{2}\,\lambda^{(n-2)/4}(\mathcal{F}(A_k^*u))(\lambda^{1/2}\omega),$

$$\forall u\in\mathcal{D}(R^n),$$

ただし，$\mathcal{F}$ はFourier変換 $(\mathcal{F}v)(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int v(x)e^{-i\xi\cdot x}dx$ をあらわす．この $T_k(\lambda)$ に対して，次の性質 i), ii), iii) が成りたつ：i) $T_k(\lambda)$ は $\lambda\in(0,\infty)$ に関し，次数 $s-1/2$ の局所 Hölder 連続性**) をもつ；ii) 任意の $\eta>2(n-1)/(2s-1)$ $=(n-1)/(s-1/2)$ に対して*)，$T_k(\lambda)\in\mathbb{B}_\eta(L^2(R^n),L^2(S^{n-1}))$; iii) $\|T_k(\lambda)\|^2$ は $\lambda=0$ の近傍で可積分である．

証明. $A_k^*=D_k(1+|x|)^{-s}$ $(k\neq 0)$, $A_0^*=A_0=(1+|x|)^{-s}$. だから，$(\mathcal{F}(A_k^*u))(\xi)=\xi_k(\mathcal{F}(A_0^*u))(\xi)$. 故に，$T_0(\lambda)$ が存在して，性質 i), ii), iii) を満足することが云え

---

*) $\mathbb{B}_\eta(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_2)$ は von Neumann-Schatten class を表わす．すなわち，完全連続作用素 $T:\mathbb{H}_1\to\mathbb{H}_2$ で T^*T の固有値 $\{\alpha_n\}$ が $\sum\alpha_n^{\eta/2}<\infty$ を満足するものの全体．なお，(C.8) の検証のためには，$T_k(\lambda)$ の完全連続性だけがあればよい．

**) $s-1/2\geq 1$ のときは，しかるべく云い換えねばならない．

れば，$(T_k(\lambda)u)(\omega)=\lambda^{1/2}\omega_k(T_0(\lambda)u)(\omega)$ とおくことによって，補題が証明される．さて，

$$(\hat{T}(\lambda)v)(\omega)=\lambda^{\frac{n-2}{4}}(\mathcal{F}v)(\lambda^{\frac{1}{2}}\omega),\quad v\in\mathcal{S}(R^n)$$

とおく．また

$$\|v\|^2_{L^2_s(R^n)}=\int_{R^n}(1+|x|^2)^s|v(x)|^2dx$$

とおき，$\|v\|_{L^2_s(R^n)}<\infty$ なる v の全体を $L^2_s(R^n)$ とかく．任意の $s'>1/2$ に対して，不等式

(2.6) $$\|(\mathcal{F}v)(\omega)\|_{L^2(S^{n-1})}\leqq C_{s'}\|v\|_{L^2_{s'}(R^n)}$$

が成り立つ．一方

$$(\mathcal{F}v)(\lambda^{1/2}\omega)=(2\pi\lambda)^{-n/2}\int_{R^n}e^{-i\omega y}v(\lambda^{-1/2}y)dy$$

である．これに(2.6)を適用すれば，$0\leqq\lambda<1$ として

$$\|(\mathcal{F}v)(\lambda^{1/2}\omega)\|^2_{L^2(S^{n-1})}$$

$$\leqq C^2_{s'}\lambda^{-n/2}\int_{R^n}(1+\lambda|x|^2)^{s'}|v(x)|^2dx\leqq C_{s'}\lambda^{-n/2}\|v\|^2_{L^2_{s'}(R^n)}$$

したがって

(2.7) $$\|\hat{T}(\lambda)v\|_{L^2(S^{n-1})}\leqq C_{s'}\lambda^{-1/2}\|v\|^2_{L^2_{s'}(R^n)}.$$

一方，$n/2<s''$ であるような任意の s'' に対して $|(\mathcal{F}v)(\omega)|\leqq C_{s''}\|v\|_{L^2_{s''}(R^n)}$ であるから，

(2.8) $$\|\hat{T}(\lambda)v\|_{L^2(S^{n-1})}\leqq C_{s''}\lambda^{n/4-1/2}\|v\|^2_{L^2_{s''}(R^n)}.$$

さて，$s=\alpha/2>1/2$ であるが，$T_0(\lambda)$ の存在と性質iii)を云うには，$1/2<s\leqq n/2$ として証明すれば十分．そこで，

$1/2 < s' < s$, $n/2 < s''$ なる s', s'' をとり, $s = \theta s' + (1-\theta) s''$ とすれば, (2.7), (2.8) より, interpolation により

$$\|\hat{T}(\lambda) v\|_{L^2(S^{n-1})} \leqq C_{s'}^{\theta} C_{s''}^{1-\theta} \lambda^{\frac{n(1-\theta)}{4} - \frac{1}{2}} \|v\|_{L^2_s(R^n)}.$$

ここで, $v = A_0^* u$ を代入すれば,

$$\|T_0(\lambda) u\|_{L^2(S^{n-1})} \leqq \sqrt{2}\, C_{s'}^{\theta} C_{s''}^{1-\theta} \lambda^{\frac{n(1-\theta)}{4} - \frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(R^n)}.$$

これより, $T_0(\lambda) \in \mathbb{B}(L^2(R^n), L^2(S^{n-1}))$ の存在と, 性質 iii) がでる. 性質 i), ii) は $\hat{T}(\lambda)$ が同種の性質をもつことより導かれる (Kuroda [13] 参照). (証終)

定理 2.2 の証明を完了するために,

$$M_{jk}(\lambda) = T_j(\lambda)^* T_k(\lambda)$$

とおく.*) M_{jk} が Hölder 連続であり, かつ (C.8) にのべた性質をもつことは, 補題 2.7 の i), ii), iii) からでる. よって, (2.4) を証明すればよい. $u, v \in \mathcal{D}(R^n)$ に対して,

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\{R_1(\lambda+i\varepsilon) - R_1(\lambda-i\varepsilon)\} A_k^* u, A_j^* v\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{R^n} \frac{\varepsilon}{(\xi^2-\lambda)^2+\varepsilon^2} (\mathcal{F} A_k^* u)(\xi) \overline{(\mathcal{F} A_j^* v)(\xi)} d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2} \left(T_k(\mu) u, T_j(\mu) v\right)_{L^2(S^{n-1})} d\mu$$

となる. ここで $\varepsilon \to 0$ とすれば,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(E_1(\lambda) A_k^* u, A_j^* v\right) = \left(T_k(\lambda) u, T_j(\lambda) v\right), \text{a.e.}$$

---

*) なお $\lambda < 0$ では $M_{jk}(\lambda) = 0$ とる.

が得られて，これから，(2.4)が証明される．（定理2.2の証明終り）

注意．H_1 のスペクトルは絶対連続で $(0,\infty)$ と一致するから，H_2 の絶対連続スペクトルは $(0,\infty)$ と一致する．一方 H_2 の特異スペクトル $\sigma_s(H_2)$ は $e_+\cup e_-$ と一致することがわかっている．$\sigma_s(H_2)\cap(-\infty,0)$ はもちろん discrete である．もし $\delta>1$ すなわち $\alpha>2$ ととれれば，$T_j(\lambda)$ したがって $M_{jk}(\lambda)$ の Hölder 連続性の指数は 1/2 より大きくとれるから，9頁の注意2によって，$\sigma_s(H_2)\cap(0,\infty)$ も discrete になる．

§3．応用2．Uniformly propagative system.

§2で考えた問題は Schrödinger 作用素からおこってきたものであろうが，wave propagation の問題として，Wilcox, Ikebe らによって取り扱われている uniformly propagative system がある．考察される方程式は

(3.1) $$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=iE_1^{-1}\sum_{k=1}^{n}L_kD_ku(x,t)\equiv H_1'u(x,t),$$

(3.2) $$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=iE_2(x)^{-1}\sum_{k=1}^{n}L_kD_ku(x,t)=H_2'u(x,t).$$

ここで，$u(x,t)$ は m-ベクトル値函数，E_1, $E_2(x)$, L_k は m-m 行列である．E_1 などに課す仮定については後に述べる．系 $\{L_k\}$ に対する適当な条件と，$|x|\to\infty$ のとき適当な速さで $E_2(x)\longrightarrow E_1$, $|x|\longrightarrow\infty$，という仮定のもとで，wave operator などについて論ずるのが問題である．

$\{L_j\}$ に uniformly propagative という条件をつけると，wave operator が存在することは，Wilcox [17], Ikebe [3] によって示された．$E_2(x)$ に関する仮定は，大雑把に云って，$|E_2(x)-E_1| = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ である．Wave operator の completeness については，Birman による trace 条件を使う方法が適用される．いわゆる static solution がない場合には，$|E_2(x)-E_1| = O(|x|^{-3-\varepsilon})$ で completeness がでることがわかっていたが，最近 Wilcox and Schulenberger [14] は Birman の一般論を改良することにより，static solution がある場合にも，$E_2(x)$ に関する同種の条件のもとで，completeness が成り立つことを示した．この § では，この問題に定理 1.3 を適用することを試みる．差し当り，static solution がないと仮定せねばならず，その仮定のもとで $E_2(x)$ に関する仮定を $|E_2(x)-E_1| = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ 程度に改良するにとどまる．

(3.1), (3.2) の右辺にあらわれている作用素は，E_1 ま

たは $E_2(x)$ を weight とするヒルベルト空間で自己共役となるから，問題は，二つのヒルベルト空間を含む問題であるが，適当なユニタリ変換で一つの空間の問題に帰着することができる（このこと，および二つのヒルベルト空間のときの wave operator の定義などについては，Kato [6] 参照）.

まず，ヒルベルト空間 $\mathbb{H}=\{L^2(R^n)\}^m$ における一階対称双曲系に対する散乱問題を考え，のちにその結果を uniformly propagative system に応用する.

$\mathbb{H}=\{L^2(R^n)\}^m$ において，二つの作用素

$$(3.3)\quad \begin{cases} H_1=\sum_{k=1}^{n} L_k^1 D_k\ , \\ H_2=\sum_{k=1}^{n} L_k(x) D_k + L_0(x). \end{cases}$$

を考えよう．係数 L_k^1, $L_k(x)$ につき，次のような仮定をする.

まず H_1 においては，L_k^1 は $m\text{-}m$ 行列で $L_k^{1*}=L_k^1$ とし，さらに，$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$P(\xi,\lambda)=\det\left(\lambda I-\sum_{k=1}^{n}\xi_k L_k^1\right)$$

とおいて，$\xi\neq 0$ に対して $P(\xi,\lambda)=0$ を λ について解いた時の根はすべて 0 でなく，その多重度が ξ に無関係であると仮定する.

$$L(\xi)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k L_k^1$$

の斉次性を考慮すれば，この仮定は次のように云い表わせる.

$$(3.4)\quad \begin{cases} P(\xi,\lambda)=\prod_{j=1}^{\ell}(\lambda-\lambda_j(\xi))^{\nu_j}\cdot\prod_{j=1}^{\ell}(\lambda-\lambda_{-j}(\xi))^{\nu_j}, \\ \lambda_\ell(\xi)>\cdots>\lambda_1(\xi)>0>\lambda_{-1}(\xi)>\cdots>\lambda_{-\ell}(\xi). \end{cases}$$

ここで $2\sum_{j=1}^{\ell}\nu_j=m$ であるから，m は偶数である．また斉次性からの帰結として，

$$\lambda_j(\xi)=|\xi|\lambda_j(\omega),\qquad \xi=|\xi|\omega$$
$$\lambda_{-j}(\xi)=-\lambda_j(-\xi),$$

が成り立っている．さらに，この仮定のもとでは，各 $\lambda_j(\xi)$ は $\xi\in R^n-\{0\}$ で実解析的となることがわかる．

H_2 において，$L_k(x)$，$L_0(x)$ は m-m 行列であり，$L_k(x)$ は一階連続的微分可能で，一階導函数とともに有界，$L_0(x)$ は有界かつ可測とする．さらに，対称性の条件

$$(3.5)\quad \begin{aligned} &L_k(x)^*=L_k(x), \\ &\sum_{k=1}^{n}D_kL_k(x)+L_0(x)^*=L_0(x). \end{aligned}$$

および楕円性

(3.6) 任意の x と $\xi\neq0$ に対して，$L(\xi,x)=\sum_{k=1}^{n}\xi_kL_k(x)$ は正則行列である．

を仮定する．また $|x|\to\infty$ における条件として，

(3.7) ある $\alpha>1$ が存在して

$$C_k(x)=(1+|x|)^\alpha\{L_k(x)-L_k^1\},\quad k=1,\cdots,n,$$
$$C_0(x)=(1+|x|)^\alpha L_0(x).$$

はすべて有界である．

ということを仮定する.

<u>命題</u> 3. 1. 以上の仮定のもとで, H_1, H_2 は $\{H^1(R^n)\}^m$ を定義域とする自己共役作用素となる.

証明. H_1 については, Fourier 変換を考えれば自明. H_2 については, (3. 6) と (3. 7) から一様楕円性: $\exists\delta>0$, $|L(\xi,x)u|^2 \geqq \delta|\xi|^2|u|^2$, がでる. それを用いて, $\|u\|_1^2 \leqq c(\|H_2u\|^2+\|u\|^2)$ をだす. well-known といってよいことかもしれないが, Wilcox and Schulenberger [15] に詳しい解説がある. (証終)

<u>定理</u> 3. 2. 仮定 (3. 4), (3. 5), (3. 6), (3. 7) のもとで, Wave operators $W_\pm(H_2, H_1)$ が存在して complete である.

この定理を証明するために,

$$H_2 = \sum_{k=1}^n L_k' D_k + \sum_{k=1}^n (L_k(x) - L_k') D_k + L_0(x)\cdot$$

と書いて, 定理 1.3 を適用する. まず, $H_2 - H_1$ を分解せねばならないが, §2 と異なり, ここでは非対称な分解を行う. すなわち, $s = \alpha/2$ として,

$$A_1 = \cdots = A_n = A_0 = \frac{1}{(1+|x|)^s}\cdot \quad ,$$

$$B_k = \frac{1}{(1+|x|)^s} D_k, \quad k = 1, \cdots, n,$$

$$B_0 = \frac{1}{(1+|x|)^s}\cdot \quad ,$$

$$C_k = C_k(x)\cdot \quad , \quad k = 0; 1, \cdots, n,$$

ただし $C_k(x)$ は (3.7) で定義された m-m 行列であり, A_k, B_k は m次元数列空間においては, スカラー演算子のように作用する. このように A_k, B_k, C_k を定義すれば,

$$H_2 = H_1 + \sum_{k=0}^{n} A_k^* C_k B_k$$

となることは明らか. ($A_k^* = A_k$ であるが, §§1, 2 との対応上 * をつけておく.) このとき, 定理 1.1 の仮定がみたされ, 定理 1.1 で構成される H_2 と, 上の H_2 とが一致することがわかる. この検証は, §2 で述べたものよりずっと容易である. すなわち, 問題は $H_2 = H_1 + A^*CB$ の場合に帰着するが, その場合には, 第二リゾルベント方程式

(3.8) $$R_2(z) - R_1(z) = -R_2(z)\, A^*CBR_1(z)$$

が成り立つ. これに右から A^* をかけて整理すれば,

$$R_2(z)A^*(1+Q(z)) = R_1(z)A^*.$$

ただし, $Q(z) = CBR_1(z)A^*$. 一方 $(1+Q(z))^{-1} = 1-CBR_2(z)A^*$ であることが容易にわかるから, $R_2(z)A^* = R_1(z)A^*(1+Q(z))^{-1}$ を (3.8) に代入すれば, 定理 1.1 のとおりとなる.

定理 1.3 の条件 (1.1), (1.2) は $\sigma_k = 0$, $\rho_k = 1$ で成り立っているから, あと検証すべきは (C.6), (C.7), (C.8) である. (ただし $e_1 = \{0\}$ とする. H_1 は絶対連続だから (C.9) は成立.) まず $L(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k L_k^1$ の固有値 $\lambda_j(\xi)$

((3.4) 参照) を多重度を反復して大きさの順に並べたものを $\mu_m(\xi) \geqq \cdots \geqq \mu_{m/2+1}(\xi) > 0 > \mu_{m/2}(\xi) \geqq \cdots \geqq \mu_1(\xi)$ とし，これらを対角要素にもつ m-m 対角行列を $D(\xi)$ としよう．すると，ある m-m ユニタリ行列 $U(\xi)$ により

$$L(\xi) = U(\xi)^{-1} D(\xi) U(\xi), \quad \xi \neq 0.$$

となる．$L(\xi)$ の斉次性を考えれば，$U(\xi)$ は角変数のみによるようにとれる：$U(|\xi|\omega_\xi) = U(\omega_\xi)$．また $U(\omega)$ は $\omega \in S^{n-1}$ について可測であるようにとれる*)．

(C.6), (C.7), (C.8) を検証するため，§2 の 16―18頁に対応する考察をするのであるが，ここではまず 18頁後半に述べた計算からはじめて，$T_k(\lambda)$ の形を導くことにしよう．A_k, B_k, $k=0,\cdots,n$ は 23頁に書いた通りとする．また，j は $1,\cdots,m$ をとる添数に使っているので，18頁 j, k の代りに l, k を使うことにする．

Fourier 変換すればすぐわかるように，任意の $u, v \in \mathcal{D}(R^n)^m$ に対して

---

*) $U(\omega)$ が S^{n-1} 上で連続であるようにとれるかどうかは，すぐには明らかでないが，次のようにはできる．すなわち，S^{n-1} を多角形的領域の有限個に分割して，各領域の内部で $U(\omega)$ は連続で，各領域の境界まで連続にのばせる．なお，各領域においては，$U(\omega)$ は実解析的にとれるであろう．

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\{R_1(\lambda+i\varepsilon)-R_1(\lambda-i\varepsilon)\}A_k^* u, A_\ell^* v\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{R^n}\left(\left\{\frac{\varepsilon\,\delta_{jj'}}{(\mu_j(\xi)-\lambda)^2+\varepsilon^2}\right\}U(\xi)(\mathcal{F}A_k^* u)(\xi), U(\xi)(\mathcal{F}A_\ell^* v)(\xi)\right)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{R^n}\frac{\varepsilon}{(\mu_j(\xi)-\lambda)^2+\varepsilon^2}\tilde{u}_j(\xi)\overline{\tilde{v}_j(\xi)}\,d\xi,$$

ただし, k, ℓ は固定した上で

$$\tilde{u}(\xi)= U(\xi)(\mathcal{F}A_k^* u)(\xi), \quad \tilde{v}(\xi)=U(\xi)(\mathcal{F}A_\ell^* v)(\xi)$$

とおいた. また $\tilde{u}_j(\xi)$ は $\tilde{u}(\xi)$ の第 j 成分をあらわす.

そこで, 一つ一つの積分

$$I_j(\lambda)=\int_{R^n}\frac{1}{(\mu_j(\xi)-\lambda)^2+\varepsilon^2}\tilde{u}_j(\xi)\overline{\tilde{v}_j(\xi)}\,d\xi$$

において, 変数を変換して $\xi\to(\mu,\omega)$, $\mu=\mu_j(\xi)$, $\omega=\omega_\xi$ とする. $\mu_j(\xi)=|\xi|\mu_j(\omega_\xi)$ だから, $|\xi|=\mu/\mu_j(\omega_\xi)$. Jacobianを計算すると $d\xi=|\mu|^{n-1}d\mu\,d\omega/|\mu_j(\omega)|^{n-1}$ となる. よって, $j>m/2$ なら

$$I_j(\lambda)=\int_0^\infty\frac{|\mu|^{n-1}\,d\mu}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}\int_{S^{n-1}}\frac{\tilde{u}_j(\mu\omega/\mu_j(\omega))\overline{\tilde{v}_j(\mu\omega/\mu_j(\omega))}}{|\mu_j(\omega)|^{n-1}}d\omega$$

となる. $1\leq j\leqq m/2$ のときは, $\int_0^\infty d\mu$ を $\int_{-\infty}^0 d\mu$ におきかえればよい. ここで, $u\in\mathcal{D}(R^n)^m$ を $T_k(\lambda)u\in L^2(S^{n-1})^m$ に写す作用素 $T_k(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$, $\lambda\neq 0$, $k=1,\cdots,n$, を次のように定める. $(T_k(\lambda)u)_j$ を $T_k(\lambda)u$ の第 j 成分とするとき,

$$(3.9)\qquad (T_k(\lambda)u)_j(\omega)=\frac{|\lambda|^{\frac{n-1}{2}}\chi_j(\lambda)}{|\mu_j(\omega)|^{n-1}}\,(U(\omega)\mathcal{F}A_k^*u)_j(\lambda\omega/\mu_j(\omega)),$$

ただし，$\chi_j(\lambda)$ は $1\leqq j\leqq m/2$ のときは $(-\infty,0)$ の定義函数，$m/2<j$ のときは $(0,\infty)$ の定義函数である．すると，前頁の計算により，次の式が得られる．

$$\frac{1}{2\pi i}(\{R_1(\lambda+i\varepsilon)-R_1(\lambda-i\varepsilon)\}A_k^*u,\ A_l^*v)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2}(T_k(\mu)u,\ T_l(\mu)v)_{L^2(S^{n-1})^m}d\mu.$$

以上の計算は，A_l^* の代りに B_l^* を使っても，全く同様である．あとは，18頁と同じように考えれば，(C.6), (C.7), (C.8) を検証するためには，次の補題を証明すればよいことがわかる．

<u>補題</u> 3.3. $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$, $k=0,1,\cdots,n$ とする．(3.9) によって与えられる作用素 $T_k(\lambda)$ は $T_k(\lambda)\in\mathbb{B}(L^2(R^n)^m, L^2(S^{n-1})^m)$ に拡張される．拡張された作用素 $T_k(\lambda)$ は次の性質 i), ii), iii) をもつ．i) $T_k(\lambda)$ は $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ で次数 $s-1/2$ の局所 Hölder 連続性*)（ノルムの意味）をもつ；ii) 任意の $\eta>2(n-1)/(2s-1)=(n-1)/(s-1/2)$ に対して，$T_k(\lambda)\in\mathbb{B}_\eta(L^2(R^n), L^2(S^{n-1}))$；iii) $\|T_k(\lambda)\|^2$ は $\lambda=0$ の近傍で可積分である．(3.9) で A_k^* を B_k^* におきかえたものに対し

*) $s-1/2\geqq 1$ のときは，しかるべく云い換えねばならない．

ても同様の結果が成り立つ．

証明．補題2.7の証明とほとんど同様である．前と同じ理由で，B_k の場合は A_k の場合に帰着される．(2.6)に相当する式は，左辺を $\|(\mathcal{F}u)(|\mu_j(\omega)|^{-1}\omega)\|^2_{L^2(S^{n-1})}$ に変えても成り立つ．これより，$T_k(\lambda)\in \mathbb{B}(L^2(R^n), L^2(S^{n-1}))$ の存在がでる．また17頁，18頁と同じやり方により $\|T_k(\lambda)\|^2$ の可積分性が証明されるから，iii)が成り立つ．i), ii) は前と同様(証終)

以上で，定理3.2が証明された．

次に定理3.2を uniformly propagative system の散乱問題(3.1), (3.2)に応用する．次の仮定をする

(3.10)
$$\begin{cases} E_1,\ E_2(x) \text{ はいずれも } m\text{-}m \text{ 行列で，} E_1>0, \\ c_1 I \leqq E_2(x) \leqq c_2 I,\quad 0<c_1\leqq c_2<\infty, \text{ をみたす} \\ (c_1,\ c_2 \text{ は } x \text{ に無関係な定数}) \end{cases}$$

(3.11)
$$\begin{cases} L_k \text{ はすべて } m\text{-}m \text{ 行列で，} L_k^* = L_k.\ \text{そして} \\ \qquad L_k^1 = E_1^{-1/2} L_k E^{-1/2} \\ \text{とおくと，} L_k^1 \text{ は条件(3.4)をみたす．} \end{cases}$$

(3.12)
$$\begin{cases} E_2(x) \text{ は滑らかであり，ある } \alpha>1 \text{ が存在し，} \\ \qquad (1+|x|)^\alpha \{E_2(x)-E_1\}, \\ \qquad (1+|x|)^\alpha D_k E_2(x),\quad k=1,2,\cdots,n \\ \text{はすべて有界である．} \end{cases}$$

注意．条件(3.10), (3.11)は Wilcox [17] が uniformly propagative とよんだもので, static solution がない場合とほぼ同じ条件である.

(3.1), (3.2) は二つのヒルベルト空間を含む問題なので, そのときの wave operator について一言しておこう. $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$ を m-ベクトル値函数の空間を

$$(u, v)_{\mathbb{H}_\ell} = \int_{R^n} (E_\ell(x) u(x), v(x)) dx, \quad \ell = 1, 2,$$

($E_1(x) = E_1$ とする) を内積としてヒルベルト空間としたものとしよう. (3.1), (3.2) の右辺にあらわれる作用素をそれぞれ H_1', H_2' とすると, H_ℓ' は $\mathbb{H}_\ell$ における自己共役作用素となる. Wave operator は

$$W_\pm(H_2', H_1'; J) = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH_2'} J e^{-itH_1'} P_1$$

で定義される. P_1 は H_1 に関して絶対連続な部分空間への射影で, static solution がない場合実は $P_1 = 1$. J は identification operator と称される $\mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ なる有界作用素である. Kato[6] によれば, J を少し変えても, $W_\pm$ (の存在とその形) は J に関係しない. 例えば, 上に述べた仮定のもとで,

$$J_1 u(x) = u(x)$$
$$J_2 u(x) = E_2(x)^{-1} E_1 u(x)$$
$$J_3 u(x) = E_2(x)^{-1/2} E_1^{1/2} u(x)$$

という三つの J を考えると，このうち一つの J について $W_\pm(H_2', H_1'; J)$ が存在すれば，他の J についても存在し，$W_\pm$ はどの J を使って作っても同じになることが証明されている．特に，J_3 はユニタリなので，$H_2'' = J_3^{-1} H_2' J_3$ とおけば，H_2'' は $\mathbb{H}_1$ における自己共役作用素である．そして

$$W_\pm(H_2', H_1'; J_3) = J_3 W_\pm(H_2'', H_1')$$

となるから，問題は一つのヒルベルト空間 $\mathbb{H}_1$ の問題に帰着する．さらに，$u(x) \to E_1^{1/2} u(x)$ により $\mathbb{H}_1$ を $\mathbb{H} = L^2(R^n)^m$ にユニタリにうつして考えれば，結局 $\mathbb{H}$ における二つの作用素

$$(3.13)\quad \begin{cases} H_1 = E_1^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} L_k D_k E_1^{-1/2} \\ H_2 = E_2(x)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} L_k D_k E_2(x)^{-1/2} \end{cases}$$

を取り扱えばよいことがわかる．これは丁度 (3.3) で考えた形である．すなわち，(3.3) の L_k^1，$L_k(x)$ を

$$\begin{aligned} L_k^1 &= E_1^{-1/2} L_k E_1^{-1/2}, \\ L_k(x) &= E_2(x)^{-1/2} L_k E_2(x)^{-1/2}, \quad k=1, \cdots, n, \\ L_0(x) &= \sum_{k=1}^{n} E_2(x)^{-1/2} L_k (D_k E_2(x)^{-1/2}) \end{aligned}$$

ととればよい．

このように定められた L_k^1，$L_k(x)$ に対して，条件 (3.5) は当然成り立ち，条件 (3.4) は条件 (3.11) より，条件

(3.6)は$\sum \xi_k L_k$が正則行列であることよりでる．最後に条件(3.7)は(3.12)から導かれる．実際，適当な積分路Γを使って，($|x|$は十分大とする)

$$E_2(x)^{-1/2}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma z^{-1/2}(z-E_2(x))^{-1}dz\ ,\ E_1^{-1/2}=\cdots$$

と表わすことにより，(3.12)より$(1+|x|)^\alpha\{E_2(x)^{-1/2}-E_1^{-1/2}\}$，$(1+|x|)^\alpha D_k E_2(x)^{-1/2}$の有界性を導くことができる．そうすれば，(3.7)はすぐにわかる．

かくして，定理3.2が適用され，次の定理を得る．

定理 3.4．(3.1),(3.2)で定まる伝播系に対して，(3.10),(3.11),(3.12)がみたされているとする．そのとき，(3.13)できまるH_1, H_2に対して，$W_\pm(H_2, H_1)$が存在してcompleteである．したがって，(3.1),(3.2)のH_1', H_2'に対して，$W_\pm(H_2, H_1; J)$が存在してcompleteである．ただし，Jは29頁のJ_1，J_2，J_3のいずれでもよい．

§4．応用3．外部問題．

§1で述べた方法は外部問題にも応用できるようである．これについては，まだ十分考察していないので，ポテンシャルなしのDirichlet境界条件の場合に限って，この方法が応用される可能性があることを略述するにとどめる．従って，証明される結果は，既知のことである．

Kを滑らかな境界をもつコンパクト集合(in R^n)とし, $\Omega = R^n - K$ とする. そして, Ω は連結であると仮定する. 函数空間の記号としては, $H^2(\Omega) = \mathcal{E}^2_{L^2(\Omega)}$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) = \mathcal{D}^1_{L^2(\Omega)}$, などを使用する. 問題は二つの作用素

$$H_1 = -\Delta, \quad D(H_1) = H^2(R^n), \quad \text{in } L^2(R^n),$$

$$H_2' = -\Delta, \quad D(H_2') = H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega), \text{ in } L^2(\Omega),$$

を比較することである. 同じヒルベルト空間の問題にするために, Birman [2], Kato [6] などにならって,

$$H_2'' = -\Delta, \quad D(H_2'') = H^2(K^{int}) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(K^{int}), \quad \text{in } L^2(K^{int})$$

を導入し, $L^2(R^n) = L^2(\Omega) \oplus L^2(K^{int})$ において, H_1 と $H_2 = H_2' \oplus H_2''$ を比較する. これと, もとの問題との関係については[6]を参照されたい.

H_1, H_2 は共に $\geqq 0$ であるから, Friedrichs の意味で H_1, H_2 に対応するエルミート形式 h_1, h_2 を考えることができる. それらは次のように与えられる*)

$$h_1[u, v] = \sum_{k=1}^{n} (D_k u, D_k v)_{L^2(R^n)}, \; D(h_1) = H^1(R^n)$$

$$h_2[u, v] = \sum_{k=1}^{n} (D_k u, D_k v)_{L^2(R^n)}$$

$$D(h_2) = \{u \in H^1(R^n) \mid u_{|\partial K} = 0\}.$$

ただし, $u_{|\partial K}$ は u の ∂K 上へのトレースを表わす. h_1 は h_2 の拡張である.

* $D(h_1)$ は Form h_1 の定義域を表わす

$D(\mathfrak{h}_1)$, $D(\mathfrak{h}_2)$ を内積 $\mathfrak{h}_1[u,v]+[u,v]$ によってヒルベルト空間としたものを D_1, D_2 としよう（$D_1=H^1(R^n)$ —— 内積もこめて —— であるが，今後 D_1 とかく.）D_2 は D_1 の閉部分空間である. D_1 における D_2 上への直交射影を P とかく. なお，$L^2(R^n)=\mathbb{H}$ とかく.

H_1 と H_2 に関する wave operator の問題を調べるには，

$$R_1=R_1(1)=(H_1+1)^{-1},$$
$$R_2=R_2(1)=(H_2+1)^{-1},$$

に関する wave operator の問題が，§1 の方法で調べられれば十分である. 詳しいことは省略するが，定理 1.3 の条件のもとで，いわゆる invariance principle が成り立つのがその理由である. 次の定理を §1 の方法で証明するのが目標である.

定理 4.1. $W_\pm(R_2,R_1)$ は存在して complete である.

系 4.2. $W_\pm(H_2,H_1)$ は存在して complete である.

R_2-R_1 を取り扱うため，次の命題 4.3 — 命題 4.7 を示す. これらは，おおむね Krein [11], Birman [1] に述べてあることであるが，一通りの証明をつけることにする.

命題 4.3. $R_2-R_1=-(1-P)R_1$.

証. 任意の $u, w\in\mathbb{H}$ をとり，$v=R_1u\in D_1$ とおく.

$$\begin{aligned}(R_2u,w)&=((H_1+1)v,R_2w)=(\mathfrak{h}_1+1)[v,R_2w]\\&=(\mathfrak{h}_1+1)[Pv,R_2w]\qquad \because\ R_2w\in D_2\end{aligned}$$

$$= (k_2+1)[Pv, R_2 w]$$
$$= (Pv, w) = (v, w) - ((1-P)v, w)$$
$$= (\{R_1 - (1-P)R_1\}u, w). \quad \text{(証終)}$$

命題 4.4.*) $R_1 - R_2 \geqq 0$.

証. $\|R_1^{1/2}u\| \geqq \|R_2^{1/2}u\|$, $\forall u \in \mathbb{H}$, を云えば十分. さて,

$$\|R_2^{1/2}u\| \leqq \|[R_2^{1/2}(H_1+1)^{1/2}]^a\| \|R_1^{1/2}u\|,$$

ここで $[R_2^{1/2}(H_1+1)^{1/2}]^a = \{(H_1+1)^{1/2}R_2^{1/2}\}^* \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$ で, そのノルムは 1 を越えない. 実際 $\|(H_1+1)^{1/2}R_2^{1/2}u\|^2 = (k_1+1)[R_2^{1/2}u, R_2^{1/2}u]$ $= (k_2+1)[R_2^{1/2}u, R_2^{1/2}u] = \|u\|^2$. (証終)

簡単のため $V = R_1 - R_2 = (1-P)R_1$ とかき, 次の記号を使う:

$$N(V) = \{u \in \mathbb{H} \mid Vu = 0\}$$

U は V を $N(V)^\perp$ に制限した作用素. $N(V)^\perp$ における作用素と考える. 値域が稠密な有界作用素である. ($N(V)^\perp = \mathbb{H} \ominus N(V)$)

G は $N(V)^\perp$ での U^{-1}. $N(V)^\perp$ における, 必ずしも有界でない自己共役作用素.

命題 4.5. $D_1 \cap N(V)^\perp = D_1 \ominus D_2$.

証. まず, $N(V) = \{v \in \mathbb{H} \mid R_1 v \in D_2\}$ に注意する. さて, $u \in D_1 \ominus D_2$, $R_1 v \in D_2$ とすると, $(u, v) = (k_1+1)[u, R_1 v]$ $= 0$. 故に命題の式で $\supset$ が成り立つ. 次に, $u \in D_1 \cap N(V)^\perp$

*) 命題 4.4, 4.5, 4.7 の定式化は Birman [2], Lemma 2, 1 による.

とする．任意の $w \in D_2 \cap D(H_1)$ は $w = R_1 v$ の形にかけ，$v \in N(V)$．故に $0 = (u, v) = (h_1+1)[u, R_1 v] = (h_1+1)[u, w]$ だから，u は $D_2 \cap D(H_1)$ と D_1 の内積で直交する．ところが，$D_2 \cap D(H_1)$ は D_2 で稠密である．（実際 ∂K の近傍で 0 である C^∞-函数は $D_2 \cap D(H_1)$ に属し，それらの閉包が $D_2 = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \oplus \overset{\circ}{H}{}^1(K^{int})$ と一致している．）故に $u \in D_1 \ominus D_2$．（証終）

<u>命題</u> 4.6．$u \in D(G)$，$v \in D_1 \cap N(V)^\perp$ ならば，

$$(h_1+1)[u, v] = (Gu, v).$$

注意．$V\mathbb{H} \subset D_1$ だから $D(G) \subset D_1 = D(h_1)$ である．

証．$(h_1+1)[u, v] = (h_1+1)[UGu, v] = (h_1+1)[VGu, v] = (h_1+1)[(1-P)R_1 Gu, v]$ であるが，命題4.5により $v \in D_1 \ominus D_2$ であるから，この式の右辺で $1-P$ はとってよい．よって $(h_1+1)[u, v] = (h_1+1)[R_1 Gu, v] = (Gu, v)$．（証終）

<u>命題</u> 4.7．$D(G^{1/2}) = D(h_1) \cap N(V)^\perp$ であり，任意の $u, v \in D(G^{1/2})$ に対して，$(G^{1/2}u, G^{1/2}v) = (h_1+1)[u, v]$．

証．上の注意により，$D(G) \subset D_1 \cap N(V)^\perp$ であり，$D(G)$ は $N(V)^\perp$ で稠密であるから，$D_1 \cap N(V)^\perp$ は $N(V)^\perp$ で稠密である．h_1+1 を $D_1 \cap N(V)^\perp$ に制限した二次形式は閉であるから，それに対応する $N(V)^\perp$ での自己共役作用素を G' としよう．命題4.6と，二次形式の一般論によれば，$G \subset G'$ したがって $G = G'$ となる．故に $N(V)^\perp$ における二次形式 h_1+1 と

$(G^{1/2}u, G^{1/2}v)$ は同じものであり，命題が示された．（証終）

命題 4.8．$T \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$ が存在して，

$$V^{1/2} = (1-P)R_1^{1/2}T.$$

証．$V^{1/2} = G^{1/2}V$ であるから，命題 4.7 により，

$\|V^{1/2}u\|^2 = (k_1+1)[Vu, Vu] = \|(H_1+1)^{1/2}Vu\|^2$．故に準等長作用素 T_1 が存在して $V^{1/2} = T_1(H_1+1)^{1/2}V$．よって $*$ をとれば $V^{1/2} = [(H_1+1)^{1/2}V]^* T_1^* = [V(H_1+1)^{1/2}]^a T_1^* = (1-P)R_1^{1/2}T_1^*$．

故に $T = T_1^*$ ととればよい．（証終）

以上の命題を利用して，V を分解し，その性質を調べる．V の分解は，$V = V^{1/2}V^{1/2}$ とするのが自然である．そうすると，§2 と同様の議論により，作用素

$$(T(\lambda)u)(\omega) = \sqrt{2}\,\lambda^{(n-2)/4}(\mathcal{F}V^{1/2}u)(\lambda^{1/2}\omega),\ \lambda>0$$

の性質を調べればよい．ここで，命題 4.8 を使えば，

$$K = (1-P)R_1^{1/2}$$

とおいて，作用素

$$(\hat{T}(\lambda)u)(\omega) = \sqrt{2}\,\lambda^{(n-2)/4}(\mathcal{F}Ku)(\lambda^{1/2}\omega),\ \lambda>0$$

を $L^2(R^n)$ から $L^2(S^{n-1})$ への作用素として考察し，有界性，λ についての Hölder 連続性などを調べればよいことがわかる．$\mathbb{H}_\rho$ によって weighted L^2-空間*)

$$\mathbb{H}_\rho = \{u \mid (1+|x|^2)^{\rho/2}u(x) \in L^2(R^n)\}$$

をあらわすと，次の命題が成り立つ．

*) 17頁で $L^2_\rho(R^n)$ とかいたものである．

<u>命題4.9.</u> 任意の $\rho>0$ に対して，K は $\mathbb{H}=\mathbb{H}_0$ から $\mathbb{H}_\rho$ への有界作用素である．

しばらく，命題4.9を仮定しよう．いま $\mathcal{F}$ をほどこした後の空間を，普通の x-空間のように思えば，命題4.9で $\rho>n/2$ ととって，$Ku\in\mathbb{H}_\rho$ は，$\mathcal{F}Ku$ が Sobolev 空間 $H^\rho(R^n)=\mathcal{E}^\rho_{L^2(R^n)}$ に属することを意味し，したがって $\mathcal{F}Ku$ は有界である．これより，$\mathcal{T}(\lambda)$ が $L^2(R^n)$ から $L^2(S^{n-1})$ への有界作用素であり，補題2.7の性質iii)をもつことがわかる．補題2.7の性質ii) は Lipschitz 連続という形で成り立ち，iii) は任意の $\eta>0$ のとき $\mathcal{T}(\lambda)\in\mathbb{B}_\eta$ という形で成り立つ．これらは既知のことである．よって，命題4.9を証明すれば，定理4.1が証明されたことになる．

<u>命題4.9の証明.</u> $(1-P)R_1^{1/2}$ は $\mathbb{H}_0=L^2(R^n)$ を $H^1(R^n)$ に連続に写像する．よって，$1-P$ の値域，すなわち $D_1\ominus D_2$ に属する u に対して，$\|u\|_{\mathbb{H}_\rho}\leqq c\|u\|_{H^1(R^n)}$ を云えばよい．$u\in D_1\ominus D_2$ ならば，K の境界 ∂K の近傍で 0 になる $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$ に対して，(そのような φ は D_2 に入るから)，$0=h_1[u,\varphi]=\sum(D_k u, D_k\varphi)+(u,\varphi)=(u,-\Delta\varphi+\varphi)$.

故に u は Ω および K^{int} において，

$$-\Delta u+u=0$$

の解である．$R_1>0$ を，$K\subset\{x \mid |x|<R_1\}$ となるような数，$R_2>R_1$ として，Green の公式を使えば，

(4.1) $$u(x)=\int_{|y|=R_1}\Big[u(y)\frac{\partial}{\partial|y|}F(x,y)-F(x,y)\frac{\partial}{\partial|y|}u(y)\Big]dy$$
$$-\int_{|y|=R_2}\Big[\qquad \text{〃} \qquad\qquad \text{〃} \qquad\Big]dy,$$

ただし，$F(x,y)$ は $-\Delta+1$ の基本解で，$n=3$ ならば，const $e^{-|x-y|}/|x-y|$ の形をもつ．また $R_1<|x|<R_2$．ここで $R_2\to\infty$ とすれば，第二の積分は 0 に収束する．実際 $\{|y|=R_2\}$ の近傍，例えば球殻 $\{R_2-\eta\leq|y|\leq R_2+\eta\}\equiv\Omega_{R_2,\eta}$ をとって，内部正則性の議論を用いれば，

$$\|u\|_{H^2(\Omega_{R_2,\eta})}\leqq C_{R_2,\eta}\|u\|_{H^0(\Omega)}\leqq C_{R_2,\eta}\|u\|_{H^1(R^n)}$$

η を固定して $R_2\to\infty$ とするとき，$C_{R_2,\eta}$ は ∞ にいったとしても，R_2 のべきの order にとどめることができる．よって，$u(y)$, $\frac{\partial}{\partial|y|}u(y)$ の $\{|y|=R_2\}$ 上へのトレースの L^2-ノルムは，たかだか R_2 のべきの order，一方 $\frac{\partial}{\partial|y|}F(x,y)$, $F(x,y)$ は $e^{-\mathrm{const.}|y|}$, const. >0, の order で減少するから $\int_{|y|=R_2}\longrightarrow 0$．故に任意の $x\in\Omega$ に対して，$u(x)$ は (4.1) の第二の積分を 0 とおいたもので表わされる．R_1 は固定しておいて，第一の積分に上と同様の考察を行えば，ある $\delta>0$ に対して，

$$|e^{\delta|x|}u(x)|\leqq C\|u\|_{H^1(R^n)},\quad (C \text{ は } u \text{ に無関係})$$

となり，よって $\|u\|_{\mathbb{H}_p}\leqq C'\|u\|_{H^1(R^n)}$ が成り立つ．(証終)

§5. 定理1.3の証明.

定理の最後の二行，すなわち（C.7）を仮定して，$W_{\pm}(H_2, H_1)$ の存在と完備性を主張する部分の証明は，すでになされている（Kato and Kuroda [8, 9]）．その証明をここに書くだけの紙数の余裕は，とうていないので，その部分の証明は認めて頂いて，$Q(\lambda+i\varepsilon)$ に対する性質 i), ii), iii) の証明だけを述べることにする．

4頁中段に述べたのと同様にして，証明は $r=1$ の場合に帰着できるから，以後 $r=1$ とし，添字 j, k は省略する．

<u>命題</u>5.1. 条件（C.1），（C.2），（C.6）を仮定すれば，定理1.3の i), ii) が成り立つ．

証．閉包が $\mathbb{R}-e_1$ に含まれるような任意の有界開区間 I に対して $Q(z)$, $\mathrm{Im}\, z>0$, が $\{z=\lambda+i\varepsilon \mid \lambda\in I,\ \varepsilon\geqq 0\}$ の上の連続函数に延長できることを証明する．下半平面に対しても同様にできるから，i), ii) が得られる．さて，$\mathrm{Im}\, z_0 \neq 0$ であるような z_0 を一つとると，リゾルベント方程式により

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad Q(z) &= C[BR_1(z)A^*]^a \\
&= C[BR_1(z_0)A^*]^a + (z-z_0)CBR_1(z)[R_1(z_0)A^*]^a \\
&= Q(z_0) + Q_1(z) + Q_2(z),
\end{aligned}
$$

$$Q_1(z) = (z-z_0)CBR_1(z)E_1(I^c)[R_1(z_0)A^*]^a,$$

$$Q_2(z) = (z-z_0)CBR_1(z)E_1(I)[R_1(z_0)A^*]^a.$$

$Q_1(z)$は，実軸上Iをこえて連続に下半面までのばせる．実際，リゾルベント方程式を再度用いて，$BR_1(z)E_1(I^c) = BR_1(z_0)E_1(I^c) + (z-z_0)BR_1(z_0)R_1(z)E_1(I^c)$ とし，$R_1(z)E_1(I^c)$ はIの近傍で連続であることに注意すればよい．

$Q_2(z)$については，条件(C.6)より，

$$Q_2(z) = (z-z_0)\int_I \frac{1}{(\mu-z)(\mu-z_0)} CM(\mu)d\mu$$

とかける．$M(\mu)$はHölder連続だから，Privalovの定理により，$Q_2(\lambda+i\varepsilon)$の$\varepsilon \downarrow 0$のときの極限がノルムの意味で存在し，極限値まで入れて，$\lambda+i\varepsilon$の連続函数になる．（もちろん，$\varepsilon\downarrow 0$の極限値と，$\varepsilon \uparrow 0$の極限値とが一致するとは限らない．）（証終）

<u>命題</u> 5.2. (1.1), (1.2), (C.3), (C.6), (C.8), (C.9)を仮定すれば，定理1.3のiii)が成り立つ．ただし，(C.3)は定理1.3におけるように，$z_0 = z_+$, $z_0 = z_-$の両方に対して仮定する．

証明．上半平面の場合を取り扱う．z_+を上の通りとする．また，$K(z) = Q_1(z) + Q_2(z)$とおく．$1 + Q(z_+) = S$とおけば，Sは$\mathbb{B}(\mathfrak{X})$で逆をもち，(5.1)で$z_0 = z_+$として，

$$1 + Q(z) = S(1 + S^{-1}K(z))$$

が得られる．したがって，iii)を証明するためには，iii)に

述べられた性質が，$1+S^{-1}K(z)$ に対してなりたつことを証明すればよい．そのためには，$K(z)$ が完全連続であることを云えば十分である（[12; Lemma 6.2] 参照．なこの Lemma を適用するに際して，$K(z)$ の正則性は自明であり，$1+S^{-1}K(z)$，$\mathrm{Im}\, z \neq 0$，が逆をもつことは，定理 1.1 からわかる．）

さて，任意に $N>0$ をとり，$I_N=(-N,N)$，

$$K_N(z)=(z-z_+)CBR_1(z)E_1(I_N)[R_1(z_+)A^*]^a,$$

$$K_N'(z)=(z-z_+)CBR_1(z)E_1(I_N^c)[R_1(z_+)A^*]^a$$

とおく．$K(z)=K_N(z)+K_N'(z)$ である．

まず $K_N(z)$ が完全連続であることを示す．e_1 の元の番号をつけかえて，$e_1\cap I_N=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}$ とする．そして，λ_k に属する H_1 の固有空間への直交射影を P_k とする．（λ_k が H_1 の固有値でなければ，$P_k=0$）しからば，

$$K_N(z)=\int_{I_N}\frac{z-z_+}{(\mu-z)(\mu-z_+)}CM(\mu)d\mu+\sum_{k=1}^{m}\frac{z-z_+}{(\lambda_k-z)(\lambda_k-z_+)}C[BP_kA^*]^c$$

となる．$M(\mu)$ は完全連続で I_N 上で Bochner 可積分だから，*) 第一項は完全連続．*) (C.9) により，P_k は有限次元空間への射影だから，完全連続である．

よって，$N\to\infty$ のとき，$\|K_N'\|\to 0$ となることを証明すれば，命題が云えたことになる．(1.1) により，σ または

*) (C.8) による．

ρのどちらかは1より小さいから，たとえば$\rho<1$とする．すると，$\|BR_1(z)E_1(I_N^c)\| \leqq \|B|H_1-z|^{-\rho}\| \, \||H_1-z|^{-(1-\rho)}E_1(I_N^c)\| \to 0$, $N\to\infty$. これより$\|K_N'\|\to 0$がでる．$\sigma<1$の場合の証明もほぼ同様である．（証終）

以上で定理1.3は証明された．

結び．§2，§3，§4で述べた問題をもう少し一般の場合で考えられるであろうか．§2の例では，H_1, H_2が微分作用素であるということはほとんど使われていないから，これらを擬微分作用素にしても，同じような議論ができるであろう．たとえば，"H_1をsymbolがxによらない擬微分作用素，H_2-H_1を（函数）×（symbolがxによらない擬微分作用素）の一次結合とする"，などはほとんど形式的な拡張といえよう．もちろん，楕円性の条件などは必要である．次に，§3の問題では，static solutionがある場合も扱えないか，§4の問題では，potentialがある場合も扱えないか，ということが，すぐ問題になるが，これらについては，引き続き，調べるつもりである．

補題2.7の性質ii)，補題3.3の性質ii)により，$T(\lambda)$の型がわかり，それより散乱行列$\mathcal{S}(\lambda)$について，$\mathcal{S}(\lambda)-1$の型がわかる（[13]参照）．これについての詳細は省略する．

文　　献

[1] Birman, M. Sh., On the spectra of singular boundary value problems, Mat. Sb. 55 (97) (1961), 125-174. (AMS Transl. Ser.2 vol.53, 23-80.)

[2] ——— , Perturbations of the continuous spectrum of a singular elliptic operator under the change of the boundary and boundary conditions, Vest. Leningrad Univ., Ser. Mat., Meh., Astron. 1 (1962), 22-55.

[3] Ikebe, T., Scattering for uniformly propagative systems, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, 225-230, Univ. of Tokyo Press, 1970.

[4] Ikebe, T. and T. Tayoshi, Wave and scattering operators for second order elliptic operators in R^3, Publ. Research Inst. Math. Science Kyoto Univ. Ser. A 4 (1968), 483-496.

[5] Kato, T., Wave operators and similarity for non-selfadjoint operators, Math. Ann. 162 (1966), 258-279.

[6] ——— , Scattering theory with two Hilbert spaces, J. Funct. Anal. 1 (1967), 342-369.

[7] ——— , Some results on potential scattering, Proc. Intern. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, 206-215, Univ. of Tokyo Press, 1970.

[8] Kato, T. and S. T. Kuroda, Theory of simple scattering and eigenfunction expansions, to appear in F. E. Browder, ed., Functional Analysis and Related Fields, Springer-Verlag.

[9] ———————, The abstract theory of scattering, Lecture notes, 1969.

[10] Konno, R. and S. T. Kuroda, On the finiteness of perturbed eigenvalues, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I 13 (1964), 55-63.

[11] Kreĭn, M. G., Theory of self-adjoint extension of semi-bounded Hermite operators and its application, I. Mat. Sb. 20 (62) (1947), 431-495 (in Russian).

[12] Kuroda, S. T., An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory, J. Analyse Math. 20 (1967), 57-117.

[13] ———, Some remarks on scattering for Schrödinger operators, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 17 (1970).

[14] Schulenberger, J. R. and C. H. Wilcox, Completeness of the wave operators for perturbations of uniformly propagative systems, Technical Summary Report #5, Univ. of Denver, 1970.

[15] ————————, Coerciveness inequalities for nonelliptic

systems of partial differential equations, Technical Summary Report #4, Univ. of Denver, 1970.

[16] Ushijima, T., Note on the spectrum of some Schrödinger operators, Publ. Research Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. Ser. A, 4(1968), 483-496.

[17] Wilcox, C. H., Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics, Arch. Rat. Mech. Anal. 22 (1966), 37-78.