

## Lippmann-Schwinger 方程式

京大理 池部 晃生

### §1. 序

LS (= Lippmann-Schwinger) 方程式は, Schrödinger 作用素の色々な性質, 特に散乱状態 (連続固有値に属する状態) の固有函数を調べるのに重要であるが, その形は

$$(1.1) \quad \varphi(x) = e^{i\kappa x} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} V(y) \varphi(y) dy$$

である. ここでは 3次元空間  $R^3$  の場合を扱うが, 方法は高次元の場合にも適用できるであろう. (1.1) において  $x$  は普通のスカラー積,  $\kappa$  は  $\Im \kappa \geq 0, \kappa \neq 0$  なる範囲を動く parameter で, 積分領域は特に断らない限り  $R^3$  全体であるとする. "potential"  $V(x)$  は実数値函数で, 遠方で減少するものを考える.

$V(x) = O(|x|^{-2-h})$  ( $h > 0$ ) の場合については, おでに [1] で議論したが, ここでは (1.1) の解 ( $\kappa = |\kappa|$ ) を固有函数として展開定理を証明し, それによつて散乱問題を論じた. しかし最

近になって Kato [2] は抽象的方法 [3] の上に立って,  $V(x) = O(|x|^{-1-\epsilon})$  の場合にも満足すべき散乱理論が展開できることを示した. 我々はここで LS 方程式を解くという立場からこの場合を扱える可能性があることを示したい.

LS 方程式 (1.1) を扱う方法は, 本質的には [1] におけるのと変りはない. 即ちある Banach 空間を設定して作用素

$$(1.2) \quad (T_\kappa f)(x) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|} V(y) f(y) dy$$

がその上で定義された compact 作用素であることを示す. そうすれば Riesz-Schander の理論が適用できて (1.1) の可解性は (1.1) に対する homogeneous equation

$$(1.3) \quad f(x) = T_\kappa f(x)$$

の性質に帰着される. ここでの目的はこの段階までであって (1.3) の解の性質を論ずることはしない.

前述の Banach 空間としては次のようなものをとる:

$R_1 > 0$  とし,  $\mathbb{R}^3$  で連続な函数  $u(x)$  で, 特に  $|x| \geq R_1$  では球面上での函数として  $C^1$  であって

$$(1.4) \quad \|u\|_B = \sup_{0 \leq r < \infty} (1+r) |u(r\omega)| + \sup_{r \geq R_1} (1+r) \sup_{\omega \in \Omega} |\nabla_\Omega u(r\omega)|$$

が有限なるものの全体  $B$  を考える. ここに  $\Omega$  は 2次元球面

$S^2$  であつて  $V_\Omega$  は  $\Omega$  に沿つた grad を示す. ( $x=r\omega$ ). 空間  $B$  は norm  $\|\cdot\|_B$  で Banach space になる.

次に  $V(x)$  に対する仮定を述べよう.  $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$  と分解して  $V_1 \in L_2(\mathbb{R}^3)$  かつ support compact とする.  $V_2$  はその support が  $|x| \geq R_0$  ( $R_0 > 0$ ) に含まれる十分滑かき函数であつて

$$(1.5) \quad DV_2(x) = O(|x|^{-1-k}) \quad (k > 0)$$

とある. ただし  $D$  は関係する微分作用素 (0階も含めて) を表わすものとする (滑かきは  $C^2$  位で十分であろう).

なお前に挙げた定数  $R_1$  は十分大きくとつて

$$(1.6) \quad 0 < R_0 \leq R_1$$

が満たされているものとする.

## §2. Lippmann-Schwinger 作用素 $T_k$

主要な結果は次の定理である.

定理 2.1. LS 作用素  $T_k$  は  $B$  上で定義された compact linear operator である.

この定理の証明の詳細に立ち入ることはやめにして、[1]で述べられた評価がうまく行かない主要な点だけを指摘して、それに対する処理の仕方概要だけを述べる。その点とは

$$(2.1) \quad g(x) = \int \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} v(y) f(y) dy$$

あるいは  $\nabla_{\Omega} g(r\omega)$  が、 $r$  を十分大として、 $O(|x|^{-1})$  になるかということである。  $k$  が nonreal の場合 ( $\text{Im } k > 0$ ) には  $g(x)$  は指数函数的に減少するのであるから大して問題にならない。問題は  $k$  が real ( $\neq 0$ ) のときである。またこの場合でも  $v(y)$  による部分は  $O(|x|^{-1})$  になることか [1] と全く同様にしてわかるから、(2.1) における  $v$  は  $v_2$  と思ってよい。そこで  $x$  方向を基準軸とする極座標を導入し

$$(2.2) \quad \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{2}{\partial\theta} \left( e^{ik\sqrt{|x|^2+|y|^2+2|x||y|\cos\theta}} \right) \times \frac{1}{ik|x||y|} \times \frac{1}{\sin\theta}$$

に注意して、先ず球面積分について部分積分を行なう。そうすれば、 $v, f$  に関する仮定と併せて積分の収束し  $\|f\|_B$  で押えられることがわかるであろう。しかも  $|x|^{-1}$  なる factor が現れているから  $g(x) = O(|x|^{-1})$  が得られる。  $g(x)$  に  $\nabla_{\Omega}$  を作用させても、その形は (2.1) より "悪く" はならない。従って同様に議論できる。

以上に指摘した以外のことは [1] とほぼ同様に論ずること

ができて定理は証明される。

さて  $T_K$  の compact 性がわかれば, Riesz-Schauder 理論の処方に従って, 方程式

$$(2.3) \quad f = g + T_K f$$

が任意の  $f \in B$  に対して <sup>(一意的に)</sup> 解けるのは, 同次方程式

$$(2.4) \quad f = T_K f$$

が trivial solution  $f=0$  のみを持つ時かつその時に限るといふことが云えるわけである。

しかしここでえ々の LS 方程式に立ち戻って見ると, inhomogeneous term  $e^{i\lambda x}$  は, 明かに,  $B$  に属してゐない。従つて (1.1) のまゝでは, 上の結果をそのままに適用することはできない。その取扱いについて次で述べる。

5.3. 非齊次項の処理。

簡単のため (1.1) の非齊次項  $e^{i\lambda x}$  を  $p_0(x, \lambda)$  と書くことにしよう。これに "formal" に  $T_K$  を作用させて

$$(3.1) \quad p_k(x, k, \xi) = (T_x^k \varphi_0)(x, \xi)$$

としよう。若し  $p_k(\cdot, k, \xi) \in B$  であれば

$$(3.2) \quad u = p_k(\cdot, k, \xi) + T_k u$$

という方程式は

$$(3.3) \quad v = T_k v \implies v = 0$$

なる条件下に一意的にとけて、(1.1)の解  $\varphi$  は

$$(3.4) \quad \varphi(x) = \sum_{j=0}^{k-1} p_j(x, k, \xi) + u(x)$$

の形に求まることになる。このとき、勿論、各  $p_j(x, k, \xi)$  は (たとえ  $B$  に属するとしても) 明確に意味づけられた函数でなければならぬ。

先ず  $p_1(x, k, \xi)$  を見よう。

$$(3.5) \quad p_1(x, k, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{i k |x-y|}}{|x-y|} V(y) e^{i \xi y} dy$$

これは絶対可積分ではない。そこで積分は

$$(3.6) \quad \int = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R}$$

の意味に解かる。即ち improper integral であるが、ここでも

問題となるのは前と同様、 $V_2$  からの寄与である。  $V$  は  $V_2$  のことと思うことにする。  $p_1(x, k, \xi)$  を単に  $p_1(x)$  と書くことにして

$$(3.7) \quad p_1(x) = -\frac{e^{i\xi x}}{4\pi} \int \frac{e^{ik|y-x|}}{|y-x|} V(y) e^{i\xi(y-x)} dy \\ = -\frac{e^{i\xi x}}{4\pi} \int \frac{e^{ik|z|}}{|z|} V(x+z) e^{i\xi z} dz$$

と変形しておいて、最初に球面積分を実行することにしよう。  
結果は

$$(3.8) \quad \int_{\Omega} V(x+z) e^{i\xi z} d\omega_z = \int_{\Omega} V(x+\rho\omega) e^{i|\xi|\rho\omega_{\xi} \cdot \omega} d\omega \\ = \frac{2\pi i}{|\xi|\rho} e^{-i|\xi|\rho} V(x+\rho\omega_{\xi}) - \frac{2\pi i}{|\xi|\rho} e^{i|\xi|\rho} V(x+\rho\omega_{\xi}) \\ - \frac{i}{|\xi|\rho} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{i|\xi|\rho\omega\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} V(x+\rho\omega) d\theta.$$

ただし  $\omega_{\xi}$  は  $\xi$  向き の単位 vector ( $\in \Omega$ ) である。この計算のもっと精密なやり方は例えば [4] の appendix にある。更に  $\rho$  に関する積分を実行すれば

$$(3.9) \quad p_1(x) = e^{i\xi x} O(|x|^{-k})$$

が得られる。ここで  $e^{i\xi x}$  なる factor があることは重要である。これがあつたために  $p_2(x)$  を計算する際に上と同様な方法が可能になる。従つて  $k$  を適当にとれば

$$(3.10) \quad p_k(x, \kappa, \xi) = O(|x|^{-1})$$

となり,  $\forall \Omega$   $p_k$  の評価も同時に行なうことによつて  $p_k \in B$  が得られることになる. ここで  $O(|x|^{-1})$  以上に速く減少することは一般に期待できない ( $\forall$  が compact support の場合においてさえ). 更に色々細かい計算をすることによつて次の結果が得られる.

定理 3.1.  $D_\kappa$  を  $\Im m \kappa \geq 0, \kappa \neq 0$  を満たす  $\kappa$  の領域に含まれる compact domain,  $D_\xi$  を  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  の compact domain とする. このとき  $p_k(\cdot, \kappa, \xi)$  は適当な整数  $l$  に対して,  $\kappa \in D_\kappa, \xi \in D_\xi$  に関して,  $B$  の元として, 一樣連続である.

以上で Riesz-Schander 理論を応用して LS 方程式を解く準備ができてわけである. これ以上進むためには条件 (3.3) に対する解析が必要となる. 結果としては,  $\kappa$  が real non-zero の場合には (3.3) が満たされることを期待される. これは Schrödinger 作用素の正固有値の非存在の問題と係つて来るのであるが, ここではすべて割愛する.



## References

- [1] Ikebe, T.: Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory. *Arch. Rational Mech. Anal.* 5 (1960), pp. 1-34.
- [2] Kato, T.: Some results on potential scattering. *Proceedings Int. Conf. Functional Anal. Related Topics*, Tokyo, 1969, pp. 206-215
- [3] Kato, T. and S. T. Kuroda: Theory of simple scattering and eigenfunction expansions. *Functional Analysis and Related Fields* (F. E. Browder ed.), Springer (to appear)
- [4] Matsumura, M.: Comportement des solutions de quelques problèmes mixte pour certains systèmes hyperboliques à coefficients constants. *Publ. RIMS Kyoto Univ. Ser. A* 4 (1968), pp. 309-359.