数理解析研究所講究録
第103巻 1970年 1-18

射影空間の高次接バンドル

山形大 理　大池 宏清

〔2〕,〔3〕,〔6〕,〔7〕等において W.F.Pohl や E.A.Feldman は1次よりも高次の微分をも使った微分幾何を位相幾何の道具（特にベクトルバンドル）を駆使して展開した．それらはまず高次接バンドルを定式化し，空間曲線の接触平面の概念を多様体から多様体への写像に対して higher order osculating map として定式化した．このときその写像の値域にあたる多様体にあらかじめ symmetric linear connection が導入されていることが必要である．続いて Whitney の immersion, embedding, regular homotoy に関する定理の higher order への拡張がなされ，さらに higher order immersion に対しては，空間曲線の binormal にあたる higher order normal bundle，第二基本型式の codimension が1より大きい場合への一般化にあたる higher order normal form，そして higher order inflection point 等が

定式化され高次の微分をも含めた immersions の幾何学が論ぜられている。　なお〔2〕の最後で前述の Whitney の immersions embeddings に関する定理の higher order の場合への拡張が一般に最良であることを低次元の射影空間の高次接バンドルの特性類を計算することにより示されている。〔9〕,〔10〕,〔11〕において H. Suzuki はこれを一般次元の射影空間に拡張し特性類，γ-operations, spin operations 等を用いて，射影空間の実アファイン空間，射影空間への higher order non-immersion を考察した。〔12〕において C. Yoshioka は複素射影空間および Dold 多様体の高次接バンドルの Stiefel-Whitney 類を完全に計算しそれをこれらの多様体の実アファイン空間への higher order non-immersion に応用した。　こゝでは複素射影空間と四元数射影空間の高次接バンドルがそれぞれの KO 環のどの様な元になるかを計算し，それを用いて特性類を求め，さらにその結果を四元数射影空間の実アファイン空間への higher order non-immersion に応用する。

§1. 準備

G はコンパクト連結リー群，F は R または C i.e. 実数体または複素数体，V は F 上の有限次元 G-ベクトル空間，さらに $[V]$ は V の G-同型類とし，V の F 上の次元は $[V]$ の

degreeという．$\bigcirc^k V$はVのF上のk回対称積とする，そのときGは$\bigcirc^k V$に次の様に作用する：

$$\forall g \in G,\ \forall v_1 \circ v_2 \circ \cdots \circ v_k \in \bigcirc^k V.$$

$$g(v_1 \circ v_2 \circ \cdots \circ v_k) = gv_1 \circ gv_2 \circ \cdots \circ gv_k,$$

ここに$v_1 \circ v_2 \circ \cdots \circ v_k$は$\otimes^k V$から$\bigcirc^k V$への対称化作用素による$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$の像とする．それ故$\bigcirc^k V$はF上の$\binom{n+k-1}{k}$次元G－ベクトル空間$(\dim_F V = n)$である．

補題1.1．VがF上の1次元G－ベクトル空間ならば$\bigcirc^k V$は$\otimes^k V$にG同型である．

$M_F(G)$をF上の有限次元Gベクトル空間のG－同型類全体がなすsimiringとする.積と和はG－ベクトル空間のテンソル積と直和により定義される。$M_F(G)$におけるk回対称冪作用素$\bigcirc^k$は次の様にして定義する，　$\forall [V] \in M_F(G)$に対し

$$\bigcirc^k [V] = [\bigcirc^k V]$$

$\bigcirc^k$は次の様な性質をもつ：

i)　$\bigcirc^0(x) = 1,\ \bigcirc^1(x) = x$　for $x \in M_F(G)$

ii)　$\bigcirc^k(x+y) = \sum_{i+j=k} \bigcirc^i(x)\bigcirc^j(x)$　for $x, y \in M_F(G)$

iii)　$\bigcirc^k(x) = x^k$　for $x \in M_F(G)$; degree $x = 1$.

$R_F(G)$を$M_F(G)$のring completion, $\theta : M_F(G) \to R_F(G)$を自然な包含写像とする．そのとき上の$\bigcirc^k$は$R_F(G)$に拡大され性質i),ii)はみたされるがiii)は$\mathrm{Im}\,\theta$においてみた

される． 次に r, c, ψ_c^{-1} を次の様な作用素とする：

$$r : R_C(G) \longrightarrow R_R(G) \quad \text{realification}$$

$$c : R_R(G) \longrightarrow R_C(G) \quad \text{complexification}$$

$$\psi_c^{-1} : R_C(G) \longrightarrow R_C(G) \quad \text{complex conjugation.}$$

次の補題はよく知られている（[4] 参照）．

補題 1.2. i) r は加群準同型，c および ψ_c^{-1} は環準同型．
ii) $rc = 2$, $cr = 1 + \psi_c^{-1}$． iii) c は単射． iv) $c\theta^k = \theta^k c$．

次に t を不定元とし，$R_F(G)$ に係数をもつ変数 t の無限級数全体がなす環 $R_F(G)[[t]]$ における units の全体がなす乗法群を $1 + R_F(G)[[t]]^+$ であらわす．

$$\theta_t : R_F(G) \longrightarrow 1 + R_F(G)[[t]]^+$$

を次の様に定義する：

$$\theta_t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k(x) t^k \quad \text{for } x \in R_F(G).$$

なお $x \in \mathrm{Im}\,\theta$ が degree 1 であるとき補題 1.1 により

$$\theta_t(x) = 1 + xt + x^2t^2 + \cdots = \frac{1}{1 - xt} \text{ である.}$$

次の定理は [4] にのべられている．

定理 1.3. $R_C(U(1))$ は $\mathbb{Z}[z, z^{-1}]$ i.e. z を変数とする整数係数の有限 Laurent 級数全体がなす環である，ここに z は $U(1)$ が C に次の様に作用している C 上の 1 次元ベクトル空間の $U(1)$-同型類を表わす，for $e^{i\theta} \in U(1)$ and $w \in C$

$$(e^{i\theta}, w) \longmapsto e^{i\theta} w,$$

なお $\bar{z} = \psi_C^{-1}(z)$.

$\eta = r z - 2 \in R_R(U(1))$ とする，そのとき次の補題を得る．

補題 1.4. i) $\psi_R^k(\eta) = r z^k - 2$, $\psi_R^0(\eta) = 0$, $\psi_R^1(\eta) = \eta$, $\psi_R^{-k}(\eta) = \psi_R^k(\eta)$, ii) $\psi_R^i(\eta)\psi_R^j(\eta) = \psi_R^{i+j}(\eta) + \psi_R^{j-i}(\eta) - 2(\psi_R^i(\eta) + \psi_R^j(\eta))$, iii) $\psi_R^k(\eta) = \sum_{j=1}^{k} A_j^k \eta^j$,
iv) $\eta^j = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{2j}{j-i} \psi_R^i(\eta)$, こゝに ψ_R^k は k-th real Adams 作用素([1]参照), A_j^k は次の様な自然数とする,

$$A_j^k = \frac{2}{(2j)!} \prod_{i=1}^{j-1} (k^2 - i^2) = \frac{k}{j} \binom{k+j-1}{2j-1}.$$

証明は単なる計算にすぎないのでくわしいことは略するが iii) については ii) から $\psi_R^k(\eta) = (\eta+2)\psi_R^{k-1}(\eta) - \psi_R^{k-2}(\eta) + 2\eta$ がえられる，これを用いて数学的帰納法により容易に証明できる。

次に高次接バンドル, *higher order osculating map*, *higher order normal bundle* 等について述べる。

X を n-次元パラコンパクト C^∞-多様体とする。U を X の一つの座標近傍, その座標函数を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とする．U の上の微分可能函数の全体からなる環を $C^\infty(U)$ とかく。$x \in U$ とするとき，$\partial^j/\partial x_{\mu_1}\partial x_{\mu_2}\cdots\partial x_{\mu_j}|_x$ は, $f \in C^\infty(U)$ に $\partial^j f/\partial x_{\mu_1}\partial x_{\mu_2}\cdots\partial x_{\mu_j}|_x$ を対応させる *linear functional* とする。$T_k(X)_x$ を一次独立な *linear functionals*,

$\{\partial^j/\partial x_{\mu_1}\partial x_{\mu_2}\cdots\partial x_{\mu_j}|_x\ ;\ 1\le j\le k,\ 1\le\mu_1\le\mu_2\le\cdots\le\mu_j\le n\}$ によって張られる $\binom{n+k}{k}-1=\nu(n,k)$ 次元の実ベクトル空間とし，$\tau_k(X)=\bigcup_{x\in X}\tau_k(X)_x$ とおくと $\tau_k(X)$ は，X の上の C^∞-ベクトルバンドルとなる。これを *k-th order tangent bundle* という．

X から R への，x を 0 に写す函数の k-*jet* 全体を $J^k(X)_x$ とかく．$J^k(X)=\bigcup_{x\in X}J^k(X)_x$ は，k-*jet* のバンドルであるが，$\tau_k(X)$ は，$J^k(X)$ の双対ベクトルバンドルとなる．
即ち，$\tau_k(X)\cong J^k(X)^*$。

X,Y を各々 n,N 次元パラコンパクト C^∞ 級多様体，$f:X\to Y$ を C^∞ 級写像とするとき f の右側から函数結合を用いて，ベクトルバンドルの C^∞-*homomorphism*，$\tau_k(f)\,;\,\tau_k(X)\longrightarrow\tau_k(Y)$ が得られる。これは f の *k-th differential* といわれる。

$k>1$ とする，$I_{k-1}\,;\,\tau_{k-1}(X)\longrightarrow\tau_k(X)$ を自然な包含写像，$\pi_{k-1}:\tau_k(X)\longrightarrow\tau_k(X)/\tau_{k-1}(X)$ を *projection homomorphism* とする．

$m_{k-1}(\partial/\partial x_{i_1}|_x\circ\partial/\partial x_{i_2}|_x\circ\cdots\circ\partial/\partial x_{i_k}|_x)=\pi_{k-1}(\partial^k/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}|_x)$ とおくと，m_{k-1} はベクトルバンドルの微分可能な同型，$\bigcirc^k\tau(X)\cong\tau_k(X)/\tau_{k-1}(X)$ を定める。なお今後 $\tau_1(\ )$ を $\tau(\ )$ と記すことにする。

$$m_{k-1}^{-1}\,\pi_{k-1}=P_{k-1}\ ;\ \tau_k(X)\longrightarrow\bigcirc^k\tau(X)$$

とおくことによって，ベクトルバンドルの short exact 列

$$(*)_k \qquad 0 \longrightarrow \tau_{k-1}(X) \xrightarrow{I_{k-1}} \tau_k(X) \xrightarrow{P_{k-1}} \odot^k \tau(X) \longrightarrow 0$$ が

得られる． C^∞－写像 $f: X \longrightarrow Y$ に対して，short exact 列の homomorphism，

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \tau_{k-1}(X) & \xrightarrow{I_{k-1}} & \tau_k(X) & \xrightarrow{P_{k-1}} & \odot^k\tau(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{k-1}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_k(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \odot^k\tau(f)} & & \\
0 & \longrightarrow & \tau_{k-1}(Y) & \xrightarrow{I_{k-1}} & \tau_k(Y) & \xrightarrow{P_{k-1}} & \odot^k\tau(Y) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

がなりたつ．

$D_Y^{(j)}$; $\tau_{j+1}(Y) \longrightarrow \tau_j(Y)$ を Y に対する $(*)_{j+1}$ の，C^∞－splitting とする． Y がパラコンパクト C^∞－多様体ならば，C^∞ splitting は常に存在し，Y の上の j-th order dissection（symmetric linear connections の j 次接バンドルへの一般化）と 1 対 1 に対応し，さらに Y に symmetric linear connection を定めると，各 $j \geq 1$ に対し一意的に j-th order dissection，即ち j-th splitting $D_Y^{(j)}$ が定まることが知られている〔2〕参照．

そこで Y に symmetric linear connection i.e. first order dissection を定めると次の様な homomorphism が定まる．

$$D_k = D_Y^{(1)} \cdots D_Y^{(k-1)} : \tau_k(Y) \longrightarrow \tau(Y).$$

これと $\tau_k(f)$ とを結合して得られる $f: X \longrightarrow Y$ の covering homomorphism

$$D_k \tau_k(f) : \tau_k(X) \longrightarrow \tau(Y)$$

を $\{D_Y^{(j)} ; j=1,2,\cdots\}$, あるいはYに与えられた symmetric linear connection に関する f の k-th order osculating map という。各点 $x \in X$ に対し, $D_k \tau_k(f)_x : \tau_k(X)_x \longrightarrow \tau(Y)_{f(x)}$ が maximal rank ならば f を k-th order nondegenerate map という。

$f : X \longrightarrow Y$ を k-th order nondegenerate map とする $f^{-1}\tau(Y)$ を f による $\tau(Y)$ の induced bundle, $D_k\tau_k(f)!$ を $D_k \tau_k(f)$ による $\tau_k(X)$ から $f^{-1}\tau(Y)$ への homomorphism とする。$N \geqq \nu(n,k)$ のとき, $\mathrm{Cokernel}(D_k\tau_k(f)!) = \nu_{fY}^k(X)$ とし, これを f に関する X の Y においての k-th order normal bundle という。これは空間曲線の binormal にあたる概念である。$N \leqq \nu(n,k)$ のとき, $\mathrm{Kernel}(D_k\tau_k(f)!) = \mathcal{K}_{fY}^k(X)$ とし, f に関する X の Y における k-th order co-normal bundle という。以上より次のことがわかる

if $N \geqq \nu(n,k)$, then $\tau_k(X) \oplus \nu_{fY}^k(X) \approx f^{-1}\tau(Y)$,

if $N \leqq \nu(n,k)$, then $\tau_k(X) \approx f^{-1}\tau(Y) \oplus \mathcal{K}_{fY}^k(X)$.

Yには symmetric linear connection が定められており $N \geqq \nu(n,k)$ とし, $f : X \longrightarrow Y$ を k-th order nondegenerate map とする。このとき, $D_{k+1}\tau_{k+1}(Y) : \tau_{k+1}(X) \longrightarrow$

$\tau(Y)$ の rank が maximal でない X の点を k-th order inflection point という。

$C^k(X,Y)$ は X から Y への C^k-maps の全体からなる集合とし，これに次の様に位相を入れる。

ξ, η を各々 X, Y の上の C^∞-vector bundle とする。このとき積空間 $X \times Y$ 上の C^∞-vector bundle $Hom(\xi, \eta)$ は点 $(x, y) \in X \times Y$ 上の fiber が $Hom(\xi, \eta)_{(x,y)} = Hom_R(\xi_x, \eta_y)$ となる様なものとする。

$C^0(X, Hom(T_k(X), T_k(Y)))$ は X から位相空間 $Hom(T_k(X), T_k(Y))$ への連続写像全体からなる集合に compact open topology を入れた位相空間とする。写像 $e_k ; C^k(X,Y) \longrightarrow C^0(X, Hom(T_k(X), T_k(Y)))$ を $e_k(f)_x = T_k(f)_x$ と定義するとき e_k は容易に単射となることがわかる。$C^k(X,Y)$ の位相は e_k による $C^0(X, Hom(T_k(X), T_k(Y)))$ からの induced topology とする，この位相を τ^k と書き C^k topology of compact convergence という。このとき $p \leq q$ なら，natural inclusion map $i^q_p : C^q(X,Y) \longrightarrow C^p(X,Y)$ は連続写像となる。以上のことから $\{(C^k(X,Y), \tau^k) : k=0,1,2,\cdots\}$ は inverse maping system となる。この inverse limit $C^\infty(X,Y) = \mathrm{invlim}\, C^k(X,Y)$ は X から Y への C^∞-map の全体からなる集合と考えてよい。これに inverse limit topology $\tau^\infty = \text{inv. lim.}\ \tau^k$ を入れる.

Whitney の immersion, embedding theorem の higher order の場合にあたるものとして次の定理がある簡単のためにXをコンパクトする.

定理 1.5. Xをコンパクトn次元C^∞-多様体YをパラコンパクトN次元C^∞-多様体, $k \geqq 2$, $N \geqq V(n,k)+n$ ならば, XからYへのk-th order nondegenerate C^∞-embeddings の全体の集合は$C^\infty(X,Y)$の open and dense subset である.

注意. $k=1$のとき, $N \geqq 2n$ ならば immersions の全体は $C^\infty(X,Y)$ の openand dense subset である.

$I(X,Y)$, $E(X,Y)$ は各々 C^∞-immersions, C^∞-embeddings 全体からなる$C^\infty(X,Y)$の部分空間とする.

定理 1.6. Xはコンパクトn次元C^∞-多様体, YはパラコンパクトN次元C^∞-多様体, $N \leqq V(n,k)-n$ ならば k-th order nondegenerate C^∞-immersions (embeddings) 全体からなる集合は $I(X,Y)(E(X,Y))$ の open and dense subset である. この上さらに $2n \leqq N \leqq V(n,k)-n$ ならば k-th order nondegenerate C^∞-immersions 全体からなる集合は $C^\infty(X,Y)$ の open and dense subset である.

次に$Y=R^N$の場合を考えてみる. R^N は自然なリーマン計量により与えられる symmetric linear connection がある.

これにより定まる k-th order dissection $D^{(k)}$ は次の様になる; $(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ を R^N の通常の global coordinate functions とする. そのとき $k+1$-th order vector field を L とする, こゝに $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_N)$ は multi-index である.

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k+1} \phi_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha, \qquad \phi_\alpha \in C^\infty(R^N)$$

とあらわすとき,

$$D^{(k)} L = \sum_{|\alpha| \leq k} \phi_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha$$

となる. つまり $D^{(k)}$ は $k+1$-th order terms を消す.

$f : X \longrightarrow Y = R^N$ k-th order nondegenerate C^∞-maps とする。 $N \geq \nu(n\ k)$ ならば

$$\tau_k(X) \oplus \nu_f^k(X) \cong N,$$

こゝに $\nu_f^k(X) = \nu_{fR^N}^k(X)$ さらに N は N 次 trivial bundle である. またもし $N \leq \nu(n, k)$ ならば

$$\tau_k(X) \cong N \oplus \mathcal{K}_f^k(X),$$

こゝに $\mathcal{K}_f^k(X) = \nu_{f\,R^N}^k(X)$.

このことから次の定理をうる.

定理 1.7. X から R^N へ k-th order nondegenerate map があるなら, $N \geqq \nu(n, k)$ のときは $i > N - \nu(n, k)$ なる整数 i に対し $\overline{W}_i(\tau_k(X)) = 0$, また $N \leqq \nu(n, k)$ のときは $i > \nu(n, k) - N$ なら整数 i に対し $W_i(\tau_k(X)) = 0$, こゝに

$W_i(\tau_k(X))$, $\overline{W}_i(\tau_k(X))$ はそれぞれ$\tau_k(X)$の i-th Stiefel-Whitney class, i-th dual Stiefel-Whitney class.

高次接バンドルについてさらに計算を進めてみる。 X:をパラコンパクトC^∞多様体とするとき，次のshort exact 列

$$0\longrightarrow\tau_{k-1}(X)\longrightarrow\tau_k(X)\longrightarrow\sigma^k\tau(X)\longrightarrow 0$$

これにより帰納的に次の事実がわかる。

$$\tau_k(X)=\sigma^k\tau(X)+\sigma^{k-1}\tau(X)+\cdots+\sigma^1\tau(X).$$

対称冪作用素σ^kの性質 ii) から

$$\tau_k(X)+1=\sigma^k(\tau(X)+1).$$

§2. 本論

最初に，鍵となる次の補題を証明する。

補題 2.1.

$$\sigma^k((n+1)rz)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{n+j}{j}\binom{n+k-j}{k-j}\psi_R^{k-2j}(\eta)+\binom{2n+1+k}{k}.$$

証明） $\sigma_t((n+1)crz)=(\sigma_t(z+z^{-1}))^{-(n+1)}$

$$=(1-zt)^{-(n+1)}(1-z^{-1}t)^{-(n+1)}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{i+j=k}\binom{n+i}{i}\binom{n+j}{j}z^{j-i}\right\}t^k.$$

よって

$$c\sigma^k((n+1)rz)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{n+j}{j}\binom{n+k-j}{k-j}\left(z^{k-2j}+z^{-(k-2j)}-2\right)+\binom{2n+1+k}{k}.$$

$c\psi_R^i(\eta) = z^i + z^{-i} - 2$, cが単射であることにより証明が完成する．

CP^nをn次元複素射影空間，h_CをCP^n上のcanonical line bundleとする．

$\tau(CP^n) + 2 = (n+1)rh_C$ であることはよく知られている．

$$\tau_k(CP^n) + 1 = \theta^k((n+1)rh_C - 1)$$
$$= \theta^k((n+1)rh_C) - \theta^{k-1}((n+1)rh_C).$$

実際，
$$\theta_t((n+1)rh_C - 1) = \theta_t((n+1)rh_C)\,\theta_t(1)^{-1}$$
$$= \theta_t((n+1)rh_C)\left(\frac{1}{1-t}\right)^{-1} = \theta_t((n+1)rh_C)(1-t)$$
$$= \theta_t((n+1)rh_C) - t\theta_t((n+1)rh_C).$$

このことより明らかである。 よって上の補題から次の定理をうる．

定理2.2. $y = rh_C - 2$ とする，そのとき
$$\tau_k(CP^n) + 1 = \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \binom{n+j}{j}\left\{\binom{n+k-j}{k-j}\psi_R^{k-2j}(y) - \binom{n+k-j-1}{k-j-1}\psi_R^{k-1-2j}(y)\right\} + \binom{2n+k}{k}.$$

C. Yoshioka の定理はこの定理の系としても得られる。[12]

系2.3. (C. Yoshioka) $W(\tau_k(CP^n))$を$\tau_k(CP^n)$のtotal Stiefel-Whitney classとすると

$$W(\tau_k(CP^n)) = \begin{cases} (1+\bar{x})^{-\frac{1}{2}\binom{2n+k}{k-1}} & \text{for even } k \\ (1+\bar{x})^{\frac{1}{2}\binom{2n+k+1}{k}} & \text{for odd } k \end{cases}.$$

こゝに x は h_C の first Chern class とし，$\bar{x} = x \bmod 2$ とする．

証明）　$W(\psi_R^j(y)) = W(rh_C^j) = C(h_C^j) \bmod 2 = 1 + j\bar{x}$,

こゝに $C(h_C^j)$ は h_C^j の total Chern class である．

よって，

$$W(\psi_R^j(y)) = \begin{cases} 1 & \text{for even } j, \\ 1+\bar{x} & \text{for odd } j. \end{cases}$$

一般に奇正整数 l と正整数 m に対し

$$\sum_{j=0}^{\frac{l-1}{2}} \binom{m+j}{j}\binom{m+l-j}{l-j} = \frac{1}{2}\binom{2m+l+1}{l}$$

であることは証明を完成する．

補題 1.4 の iii) から $KO(CP^n)$ における ψ_R^k の様子は

$$\psi_R^k(y) = \sum_{j=1}^{k} \frac{k}{j}\binom{k+j-1}{2j-1} y^j$$

により完全にわかる．　これより例えば次の様になる．

$$\tau_2(CP^n) + 1 = \binom{n+2}{2} y^2 + \binom{2n+3}{2} y + \binom{2n+2}{2}$$

$$\tau_3(CP^n)+1=\binom{n+3}{3}y^3+(2n+5)\binom{n+2}{2}y^2$$
$$+6\binom{2n+4}{3}y+\binom{2n+3}{3}.$$

次に四元数射影空間 HP^n については結果だけをのべる．CP^n の場合より多少複雑になるが本質的な差異はない．詳しくは[5]参照．　h_H を HP^n の上の canonical complex plane bundle とし，$\pi: CP^{2n+1} \longrightarrow HP^n$ を canonical S^2-bundle とする．　$\pi^!: KO(HP^n) \longrightarrow KO(CP^{2n+1})$ を π による induced ring homomorphism とする．　これは単射である([8]参照)．

定理 2.4.
$$\pi^!\tau_k(HP^n)+1=\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{2n+1+j}{j}\binom{2n+1+k-j}{k-j}\psi_R^{k-2j}(y)$$
$$-\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\binom{2n+1+j}{j}\binom{2n+1+k-1-j}{k-1-j}\left(\psi_R^{k+1-2j}(y)+\psi_R^{k-2j}(y)+\psi_R^{k-1-2j}(y)\right)$$
$$+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{2n+1+j}{j}\binom{2n+1+k-2-j}{k-2-j}\left(\psi_R^{k-2j}(y)+\psi_R^{k-2-2j}(y)+\psi_R^{k-4-2j}(y)\right)$$
$$-\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\binom{2n+1+j}{j}\binom{2n+1+k-3-j}{k-3-j}\psi_R^{k-3-2j}(y)$$
$$+(-1)^k\binom{2n+1+\left[\frac{k-1}{2}\right]}{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\psi_R^2(y)+\binom{4n+k}{k}.$$

g を h_H の second Chern class とする．g は $H^*(HP^n;Z)$

generator となる. $\bar{q} = q \bmod 2$ とする。 さらに $N_o(n,k)$, $N_e(n,k)$ を次の様な自然数とする。

$$N_o(n,k) = \frac{1}{4}\binom{4n+k+3}{k} + \frac{3}{4}\binom{4n+k+1}{k-2} \quad \text{for odd } k,$$

$$N_e(n,k) = \frac{1}{4}\binom{4n+k+2}{k-1} + \frac{3}{4}\binom{4n+k}{k-3} \quad \text{for even } k.$$

次の系を得る.

系 2.5.
$$W(\tau_k(HP^n)) = \begin{cases} (1+\bar{q})^{N_o(n,k)} & \text{for odd } k, \\ (1+\bar{q})^{-N_e(n,k)} & \text{for even } k. \end{cases}$$

$\delta_o(n,k)$, $\sigma_o(n,k)$, $\delta_e(n,k)$, $\sigma_e(n,k)$ を次の様な自然数とする。

$$\delta_o(n,k) = \max\left\{1 \leqq i \leqq n ; \binom{N_o(n,k)}{i} \not\equiv 0 \pmod 2\right\},$$

$$\sigma_o(n,k) = \max\left\{1 \leqq i \leqq n ; \binom{N_o(n,k)+i-1}{i} \not\equiv 0 \pmod 2\right\},$$

$$\delta_e(n,k) = \max\left\{1 \leqq i \leqq n ; \binom{N_e(n,k)}{i} \not\equiv 0 \pmod 2\right\},$$

$$\sigma_e(n,k) = \max\left\{1 \leqq i \leqq n ; \binom{N_e(n,k)+i-1}{i} \not\equiv 0 \pmod 2\right\}.$$

定理 1.7 から次の系を得る.

系 2.6. 整数 m は, もし k が奇なら $-4\delta_o(n,k) < m < 4\sigma_o(n,k)$

の様に，もしkが偶なら$-4\sigma_e(n,k)<m<4\delta(n,k)$の様に定める，そのとき

$$HP^n \not\subset_k R^{\nu(4n,k)+m}$$

文　献

(1) J.F. Adams; Vector fields on spheres, Ann. of Math., 75 (1962), 603−632.

(2) E.A. Feldman; The geometry of immersions I, Trans. Amer. Math. Soc., 120 (1965), 185−224.

(3) ——————; —————————————— II, Trans. Amer. Math. Soc., 125 (1966), 181−215.

(4) D. Husemoller; Fiber Bundles, McGraw-Hill.

(5) H. Ôike; Higher order tangent bundles of projective space and lens spaces, Tohoku Math. J., 22 (1970), 200−209.

(6) W.F. Pohl; Differential geometry of higher order, Topology 1 (1962), 169−211.

(7) ————; Connexion in differential geometry of higher order, Trans. Amer. Math. Soc., 125 (1966), 310−325.

(8) B.J. Sanderson; Immersions and embeddings of projective spaces, Proc. London Math. Soc., (3) 14 (1964), 137−153.

[9] H. Suzuki; Bounds for dimensions of odd order non-singular immersions of RP^n, Trans. Amer. Math. Soc., 121(1966), 269–275.

[10] ________; Characteristic classes of some higher order tangent bundles of complex projective spaces, J. Math. Soc. Japan, 18(1966), 386–393.

[11] ________; Higher order non-singular immersions in projective spaces, Quart. J. Math. Oxford (2), 20(1969), 33–44.

[12] C. Yoshioka; On the higher order non-singular immersions, Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A, 5(1967), 23–30.