数理解析研究所講究録
第 103 巻 1970 年 33-40

U-cobordism theory における Künneth spectral sequence について

大阪市大 理　吉村善一

§0. 序

Conner-Smith: On the complex bordism of finite complexes

Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. No.37 (1970)

の中の Künneth spectral sequence に関するところを中心として紹介する。だが，我々の今後の目的（U-cobordism theory にある種の Hopf structure を考える）のために bordism theory の代わりに cobordism theory について述べたい。これは Spanier-Whitehead の duality によって何の問題も起こさない。

§1. Cohomology theory における Künneth spectral sequence について

紹介に入る前に（generalized）cohomology theory における Künneth spectral sequence（Künneth formula）

について今までに知られているものを思い出そう。

(1) ordinary cohomology theory H^* においては Künneth formula が成り立つことはよく知られている。又、この結果 $H^*(\ ;\mathbb{Z}_p)$ に differential Hopf structure が与えられる。

(2) K^*-theory において Künneth formula が成り立つことは "Atiyah" によって次の様に示された。すなわち

任意の space X に対して、$K^*(W)$ が free abelian (これより $K^*(W)\otimes K^*(Y)\cong K^*(W\times Y)$) であって $f^*: K^*(W)\to K^*(X)$ が epimorphism であるような basic space W と basic map $f: X\to W$ が存在することは $K^0(X)=[X\ BU]$ $K^1(X)=[X\ U]$ であることから知るので、$K^*(X)$ の $\mathbb{Z}$-module としての free resolution $0\to K^*(M_f)\to K^*(W)\to K^*(X)\to 0$ を得る。これより Künneth spectral sequence

$$E_2=\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(K^*(X)\ K^*(Y)) \Rightarrow E_\infty=\mathcal{G}K^*(X\times Y)$$

は collapse して Künneth formula

$$0\to K^*(X)\otimes K^*(Y)\to K^*(X\times Y)\to K^*(X)*K^*(Y)\to 0$$

が成り立つ。

又、"Araki-Toda" は $K^*(\ ;\mathbb{Z}_p)$ において admissible な積 μ_p は p 個あって $p\neq 2$ の時 commutative な積 μ_p

は唯一つあるが．$p=2$ の時は commutative な積 μ_2 は存在しないことを示した。この結果 "Araki" によって $K^*(\quad;\mathbb{Z}_p)$ に (d,λ)-Hopf structure が与えられた。

(3) "Hodgkin" は Atiyah の方法を用いて K_G^*-theory における Künneth spectral sequence を考えたが、これは $K_G^*(W)$ が $R(G)$-free であっても必らずしも $K_G^*(W)\otimes K_G^*(Y)\cong K_G^*(W\times Y)$ とはならないところに難しさがあって，ある条件のもとでしか存在することはわかっていない。しかも $R(G)$ の global dimension は 1 とは限らないので spectral sequence が collapse して Künneth formula が成り立つかどうかもわからない。

(4) "Minami" は $\mathbb{Z}$ の global dimension は 1 であるので $R(G)$-module $K_G^*(X)$ を $\mathbb{Z}$-module とみなすことによって trivial spectral sequence

$$E_2=\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(K_G^*(X)\ K_H^*(Y))\Rightarrow E_\infty=\mathcal{G}K_{G\times H}^*(X\times Y)$$

を construct して K-theory における Künneth formula を拡張した Künneth formula

$$0\to K_G^*(X)\otimes K_H^*(Y)\to K_{G\times H}^*(X\times Y)\to K_G^*(X)*K_H^*(Y)\to 0$$

を得た。

(5) KO^*-theory は space X を trivial involution をもった space とみなした時 $KO^*(X)\cong KR^*(X)$ である

ので, $KO^* = KR^* = \mathbb{Z}[\eta_1, \eta_4]/2\eta_1=0,\ \eta_1^3=0,\ \eta_1\eta_4=0,\ \eta_4^2=4$ の global dimension が finite ならば Atiyah の方法が適用できる。だが残念なことに, それは infinite らしく KO^*-theory に関してはまだ知られていない。

(6) 重要な cohomology theory の中で残されたものとして U-cobordism theory U^* がある。これにおける Künneth spectral sequence の考察が先に挙げた Conner-Smith の paper の中で上に挙げた cohomology theories におけると同様に Atiyah の方法によってなされている。
又、$U^*(\ \ ;\mathbb{Z}_p)$ においても $K^*(\ \ ;\mathbb{Z}_p)$ と同様に admissible な積 μ_p が p 個あって, $p \neq 2$ の時は commutative な積 μ_p が唯一つあり, $p=2$ の時は "Kamata" により commutative な積 μ_{p2} は存在しないことが知られている。

§2. Finiteness theorems

Def Ω を ring with 1 とする。
Ω-module M が coherent である
$\Leftrightarrow$ M と finitely generated submodule of M が finitely presentable である。

$\boxed{\text{Rem}}$ (1) coherent Ω-module は finitely generated Ω-module である。

(2) Noetherian ring は coherent ring である。

$\boxed{\text{Prop}}$ $U^* = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \cdots]$ $\deg x_i = -2i$

は coherent ring である。

$\boxed{\text{Prop}}$
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & M' \arrow[dl] \\ M'' \arrow[u] & \end{tikzcd}$$
を exact triangle of Ω-modules とする。

two of Ω-modules M, M', M'' が coherent

$\Rightarrow$ the third も coherent である。

$\boxed{\text{Th 1}}$ X を finite CW-complex とする。

$U^*(X)$ は coherent U^*-module である。

(証明) $U^*(S^n)$ は coherent module であるので X の cells の数についての帰納法によって示される。

$\boxed{\text{Th 2}}$ X を finite CW-complex とする。

$\text{hom dim}_{U^*} U^*(X) < +\infty$ である。

(証明) $U^*(X)$ が coherent U^*-module であることと $\text{gl dim}\ \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n] = n+1 < +\infty$ であることより示される。

$\boxed{\text{Th 3}}$ X を finite CW-complex とする。

次の条件 (1) ～ (4) は同値である。

(1) $\text{hom dim}_{U^*} U^*(X) = 0$

(2) $U^*(X)$ は projective U^*-module である。

(3) $U^*(X)$ は free U^*-module である。

(4) $H^*(X)$ は free abelian である。

(証明) (2) ⇒ (3) と (3) ⇒ (4) を示せば十分である。

(2) ⇒ (3) は U^* が $\mathbb{Z}$ の上の connected algebra であり projective $\mathbb{Z}$-module は free $\mathbb{Z}$-module であることから導かれる。又 (3) ⇒ (4) は Atiyah-Hirzebruch type の spectral sequence の differential が torsion valued であることから従う。

§3. U^*-theory における Künneth spectral sequence について

§2 の結果を用いて Atiyah の方法により U^*-theory における Künneth spectral sequence を construct する。

Def X を finite CW-complex とする。

U-cobordism resolution of X of length k and degree l とは

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
S^l X^+ = X_0 \arrow[dr] & & X_1 & \cdots & X_{k-1} \arrow[dr] & & X_k \arrow[dr] & \\
& W_0 \arrow[ur] & & & & W_{k-1} \arrow[ur] & & W_k
\end{tikzcd}
$$

such that (0) X_i, W_i は finite CW-complexes で X_{i+1} は $X_i \to W_i$ の mapping cone である.

(1) $U^*(W_i)$ は free U^*-module である.

(2) $U^*(W_i) \longrightarrow U^*(X_i)$ は epimorphism である。

すなわち

$$0 \leftarrow \tilde{U}^*(X_0) \leftarrow \tilde{U}^*(W_0) \leftarrow \cdots \qquad \leftarrow \tilde{U}^*(W_{k-1}) \leftarrow \tilde{U}^*(W_k) \leftarrow 0$$

は free resolution of $U^*(X)$ as U^*-module である.

$\boxed{\text{Prop}}$ X は finite CW-complex とする.

finite CW-complex W と map $f : S^l X^+ \longrightarrow W$

such that (1) $H^*(W)$ が free abelian である

(2) $f^* : U^*(W) \longrightarrow U^*(S^l X^+)$ が epimorphism

である, が存在する。

(証明) $U^*(X) = \varinjlim [S^{2n-*} X^+ \; MU(n)]$ が

finitely generated U^*-module であって

$H^*(MU(n)_N) = H^*(G_{n,N})$ は free abelian である。

$\boxed{\text{Cor}}$ X を finite CW-complex とする。

U-cobordism resolution of X が存在する。

$\boxed{\text{Lem}}$ W, Y を finite CW-complexes とする.

$U^*(W)$ が free U^*-module であるならば

$$U^*(W) \otimes_{U^*} U^*(Y) \xrightarrow{\cong} U^*(W \times Y)$$

(証明) $U^*(W) \otimes_{U^*} U^*(\ ) \longrightarrow U^*(W \times \ )$ は morphism of generalized cohomology theories であるので Y の cells の数について の帰納法で isomorphism となる。

$\boxed{\text{Th 4}}$ X, Y を finite CW-complexes とする。

natural spectral sequence $\{E_r(X\,Y)\ d_r(X\,Y)\}$

with $E_r(X\ Y) \Rightarrow U^*(X \times Y)$

$$E_2^{-p,q}(X\ Y) \cong \mathrm{Tor}_{U^*}^{-p,q}(U^*(X)\ \ U^*(Y))$$

$$0 = F^1(X\ Y) \subset F^0(X\ Y) \subset F^{-1}(X\ Y) \subset \cdots \subset U^*(X\times Y)$$

$$F^0(X\ Y) = \mathrm{Im}\{U^*(X)\otimes_{U^*}U^*(Y) \longrightarrow U^*(X\times Y)\}$$

edge homomorphism;

$$\begin{tikzcd} E_2^{0,*} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_\infty^{0,*} = F^0(X,Y) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ U^*(X)\otimes_{U^*}U^*(Y) \arrow[r] & U^*(X\times Y) \end{tikzcd}$$

が存在する。

(証明) U-cobordism resolution of X

$$\begin{tikzcd} S^l X^+ = X_0 \arrow[dr] & & X_1 \cdots\cdots X_{k-1} \arrow[dr] & & X_k \arrow[dr, equal] & \\ & W_0 \arrow[ur] & & W_{k-1} \arrow[ur] & & W_k \end{tikzcd}$$

が存在するので $S^n X_0$ の filtration を

$X_n \subset S X_{n-1} \subset \cdots \subset S^n X_0$ で与える。

その時 $D^{-p,q} = U^{q+l+1}(S^{p+1}X_0\wedge Y_0,\ X_{p+1}\wedge Y_0)$

$$\begin{aligned} E^{-p,q} &= U^{q+l+1}(SX_p\wedge Y_0\ \ X_{p+1}\wedge Y_0) \\ &\cong \tilde{U}^{q+l}(W_p\wedge Y_0) \\ &\cong (\tilde{U}^*(W_p)\otimes_{U^*}\tilde{U}^*(Y_0))^{q+l} \end{aligned}$$

となるので $E_2^{-p,q} = \mathrm{Tor}_{U^*}^{-p,q+l}(\tilde{U}^*(X_0)\ \ \tilde{U}^*(Y_0))$

$= \mathrm{Tor}_{U^*}^{-p,q}(U^*(X)\ \ U^*(Y))$ となる。

$\boxed{\text{Th 5}}$ 上の Künneth spectral sequence は non-trivial である。

(証明) Künneth formula が成り立たない space が存在する。