数理解析研究所講究録
第 103 巻 1970 年 41-44

四次元複体の $\widetilde{KSO}$ 一群について

東京工大 理学部 笹尾靖也

四次元複体Xに対して，X上の stable orientable vector bundle 全体のつくるアーベル群を $\widetilde{KSO}(X)$ とかくとき，集合として，$\widetilde{KSO}(X)$ が $H^2(X, \mathbb{Z}_2) \times H^4(X, \mathbb{Z})$ と1対1に対応していることは，すでに Dold-Whiteney により知られていた。(Ann of Math., 69, (1959))。

そこで本稿では，その群構造を考察することが目標である。結論的にいえば，きちんとした特徴づけはできないながらも，一応の結果は得られるようである。詳細は近いうちに発表される予定の次の論文を御覧いただきたりと思います。

S. Sasao & I. Ando

$\widetilde{KSO}(X)$ for 4-dimensional complex X

以下に方法の大略と得られる結果のいくつかを紹介したいと思います。X_3 でXの3-skelton を表わすとき，次の精密系列が基本的です。(Puppe の系列)

$$\widetilde{KSO}(EX_3) \xrightarrow{j^*} \widetilde{KSO}(X/X_3) \xrightarrow{p^*} \widetilde{KSO}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{KSO}(X_3) \to 0$$

ここでi^*の onto なことは$\pi_3(BSO)=0$ によるものです。

W_2 : $\widetilde{KSO}(X_3) \longrightarrow H^2(X_3, \mathbb{Z}_2) \cong H^2(X, \mathbb{Z}_2)$を各バンドルに，その第2種 S-W class を対応させる対応としますと，W_2 が同型対応になっていることは Steenrod などにより知られています。従って我々は$\widetilde{KSO}(X_3)$ を$H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ でおきかえてよいわけです。又$X/X_3 = \bigvee_i S^4_i$ ですから，$\widetilde{KSO}(X/X_3)$ は自由アーベル群で，各バンドルは第1種ポントリヤーギン類で特徴づけできます。したがってj^*を決定すれば$\widetilde{KSO}(X)$ はその構造が，かなり，わかります。

他方EX_3上のバンドルの第1種ポントリヤーギン類は$2H^4(EX_3, \mathbb{Z})$と一致することがわかります。次の図式が可換（符号無視）であることを注意すれば，我々はj^*を定めることができます。

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{KSO}(EX_3) & \xrightarrow{P_1} & H^4(EX_3, \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cong]{E} & H^3(X_3, \mathbb{Z}) \\
\downarrow j^* & & & & \downarrow \delta \\
\widetilde{KSO}(X/X_3) & \xrightarrow[P_1]{} & H^4(X/X_3, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cong} & H^4(X, X_3; \mathbb{Z})
\end{array}$$

注意：P_1は各バンドルにその第1種ポントリヤーギン類を対応させる対応で，準同型対応である。

先の系列で，i^*をW_2でおきかえて考えます。今η_1とη_2を$\widetilde{KSO}(X)$ の元で$W_2(\eta_1)=W_2(\eta_2)$であるとします。

すると$\widetilde{KSO}(X/X_3)$の元ξが存在して$P^*(\xi)=\eta_1-\eta_2$となります。$P_1(\xi)$は2で割り切れますから$\frac{1}{2}P_1(\xi)$は$H^4(X/X_3,\mathbb{Z})$の元で，この元の$H^4(X,\mathbb{Z})$における像を$d(\eta_1,\eta_2)$と定めます。$d(\eta_1,\eta_2)$がξのとりかたに依存しないでuniqueにきまることは容易です。たとえば$d(\eta_1,\eta_2)$は次のような性質をもっています。

(イ)　$d(\eta_1,\eta_2)=0 \iff \eta_1=\eta_2$

(ロ)　η_1に対して，$H^4(X,\mathbb{Z})$の元αを与えるとき，
　　η_2が存在して，$d(\eta_1,\eta_2)=\alpha$

(ハ)　$2d(\eta_1,\eta_2)=P_1(\eta_1)-P_1(\eta_2)$

(ニ)　$d(\eta_1,\eta_2)+d(\eta_2,\eta_3)=d(\eta_1,\eta_3)$

(ホ)　$n\,d(\eta_1,\eta_2)=d(n\eta_1,n\eta_2)$

(ヘ)　$d(\eta_1,\eta_2)_2=\overline{W}_4(\eta_1)-\overline{W}_4(\eta_2)$

以上の準備を基本として，$H^4(X,\mathbb{Z})$, $H^4(X,\mathbb{Z}_2)$, $H^2(X,\mathbb{Z}_2)$及び$Sq^2: H^2(X,\mathbb{Z}_2)\longrightarrow H^4(X,\mathbb{Z}_2)$を調べて$\widetilde{KSO}(X)$の群構造を決定することができます。例えば次のような結果が得られます。

(1)　$Sq^2: H^2(X,\mathbb{Z}_2)\longrightarrow H^4(X,\mathbb{Z}_2)$がtrivialなら

$$\widetilde{KSO}(X)\cong H^2(X,\mathbb{Z}_2)\oplus H^4(X,\mathbb{Z})$$

(2)　$X=EY$なら

$$\widetilde{KSO}(EY)\cong H^1(X,\mathbb{Z}_2)\oplus H^3(Y,\mathbb{Z})$$

(2) X : triangulable, connected, closed 4-dim topological manifold.

$Sq^2 : H^2(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_2)$ が non-trivial

もしXが orientable なら

$$\widetilde{KSO}(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \sum_1^r \mathbb{Z}_2$$

もしXが non-orientable なら

$$\widetilde{KSO}(X) \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \sum_1^r \mathbb{Z}_2$$

ここで $r = \dim H^2(X, \mathbb{Z}_2) - 1$.

(3) よく知られた結果

$$\widetilde{KSO}(RP^4) \cong \mathbb{Z}_4, \quad \widetilde{KSO}(CP^2) \cong \mathbb{Z},$$

$$\widetilde{KSO}(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

以上で本稿の説明を終りますが，続く問題として考えられることを少し述べます。いわゆるK—理論でいえば，$\widetilde{KSO}(X) = \widetilde{KSO}^0(X)$ですから，更に$\widetilde{KSO}^*(X)$を決定する問題もあると思います。従って環構造や種々の作用素の決定なども興味あると思われます。他方たとえばXを単連結にすると$\widetilde{KSO}^*(X) \cong KO^*(X)$ですから，$X$が代数的に特徴づけられていることを考えて，$KO^*(X)$が，ある種の代数系から代数的にきまる様子がわかれば面白いと思います。猶本稿でXの次元を4次元としましたが7次元複体までなら$\widetilde{KSO}$を計算できると思います。

おわり