

特殊 G 多標体上の不変ベクトル場

阪市大 理 松 永 弘 道

§1. 序

n 次元のコンパクトリー群は n 個の G 不変なベクトル場をもつ。この事実から一般に G 多標体上に不変なベクトル場があって特異点のないもの、うち一次独立なものがあるか、という問題が生じてくる。筆者は現在迄にこの問題を解決するための一般的方法、特に位相幾何学的方法を導き出すに至っていないが、いくつかの例、特に Brieskorn-Hirzebruch の $O(n)$ 多標体についてこの問題を考えてみた。§2 において後で用いる4つの基本事項と簡単な例をとりあつかい、§3 では $W^{2n-1}(d)$ 上には $O(n)$ 不変な1-ベクトル場はなくなり、不変な2-ベクトル場は存在しないことを示す。

§2. 基本性質と例

G をコンパクトリー群、 M をコンパクトな G 多標体とする

定義 M 上のベクトル場 X が G 不変であるとは M のすべての点 p と G のすべての元 g に対して

$$(dg)_p X_p = X_{gp}$$

がなりたつことをいう。

基本性質1. G 多様体 M が特異点のない G 不変なベクトル場をもつための必要十分条件は M 上に G 不変なリーマン計量をもつとき、 M の接ベクトルバンドルが G 不変積ベクトルバンドルを直和成分としてもつことである。

証明は G 作用のない通常の場合と同様にできる。

基本性質2. X をリーマン多様体 M 上の完備ベクトル場とする。このとき X がキリングベクトル場であるための必要十分条件はすべての実数 t に対して $\text{Exp } tX$ が M の等距離変換であることである。 「多様体入門」(松島)

基本性質3. $\{ \varphi_t ; t \in \mathbb{R} \}$ を G 多様体 M の1-パラメーター変換群とする。このとき $g \cdot \varphi_t = \varphi_t \cdot g$ がすべての $g \in G$, $t \in \mathbb{R}$ に対してなりたつならば $\{ \varphi_t, t \in \mathbb{R} \}$ から得られるベクトル場は G 不変である。(証明はほとんど自明)

基本性質4. 1-パラメーター変換群 $\{ \varphi_t ; t \in \mathbb{R} \}$ に対して

適当な正数 γ があって t の絶対値 $|t| < \gamma$ のとき φ_t が自由に作用するならば $\{\varphi_t; t \in \mathbb{R}\}$ から得られるベクトル場 X は特異点をもたない。(証明はほとんど自明)

次にいくつかの簡単な例についてみる。

G の次元を n とする。 M を可微分多様体とすると、 M 上の可微分 G 主バンドルの全空間 P は n 次元の一次独立な不変ベクトル場をもつことは見易い。

例 1. $(n+2)$ 次元複素空間 \mathbb{C}^{n+2} の点 (z_1, \dots, z_{n+2}) であって方程式 $z_1^p + z_2^q + z_3^2 + \dots + z_{n+2}^2 = 0$; $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_{n+2}|^2 = 1$ をみたす点の全体は $(2n+1)$ 次元可微分多様体となる。これを $K_{p,q}^{2n+1}$ で表わすことにする。

n 次元直交群 $O(n)$ は包含関係 $O(n) \simeq I_2 \times O(n) \subset I_2 \times U(n) \subset U(n+2)$ を通じて $K_{p,q}^{2n+1}$ に作用する。

$S^1 \simeq U(1)$ の元 λ に対して

$$\lambda(z_1, \dots, z_{n+2}) = (\lambda^{2q} z_1, \lambda^{2p} z_2, \lambda^{pq} z_3, \dots, \lambda^{pq} z_{n+2})$$

と定めると S^1 は $K_{p,q}^{2n+1}$ の 1-パラメータ変換群となり性質 3, 4 により特異点のない $O(n)$ 不変ベクトル場を定める。 $\mathfrak{g}_n \simeq O(n)$ の恒等表現とすると $K_{p,q}^{2n+1}$ の接ベクトルバンドルの固定点全体のなす多様体 S^1 上への制限は次の様になる。

$$T(K_{P, \mathbb{R}}^{2n+1})|_{S^1} = \theta^1 \oplus 2(P_n),$$

よって $K_{P, \mathbb{R}}^{2n+1}$ は S^1 上の積 G ベクトルバンドル, (P_n) は $S^1 \times P_n$ である。従って $K_{P, \mathbb{R}}^{2n+1}$ は $O(n)$ 不変な 2-ベクトル場をもたない。

例 2. $(n+1)$ 次元複素空間 \mathbb{C}^{n+1} の実 (z_0, z_1, \dots, z_n) であって方程式 $z_0^d + z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0$, $|z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 2$ をみたす実の全体は $(2n-1)$ 次元可微分多様体となる。これは Brieskorn - Hirzebruch によって研究された多様体であるが $O(n)$ は包含関係 $O(n) \simeq I_1 \times O(n) \subset I_1 \times U(n) \subset U(n+1)$ によってこの多様体 $W^{2n-1}(d)$ に作用する。

S^1 の元 $\text{Exp } 2\pi i t$ に対して

$$\begin{aligned} & (\text{Exp } 2\pi i t)(z_0, z_1, \dots, z_n) \\ &= \left((\text{Exp } 2\pi i t)z_0, (\text{Exp } d\pi i t)z_1, \dots, (\text{Exp } d\pi i t)z_n \right) \end{aligned}$$

と定めると S^1 は $W^{2n-1}(d)$ の 1-パラメータ変換群となり例 1 と同様にして, $W^{2n-1}(d)$ 上に $O(n) \times S^1$ 不変なリーマン計量をえらぶとき特異点のない $O(n)$ 不変なキリングベクトル場が存在することが示される。

§ 3. $W^{2n-1}(d)$ 上に不変 2-ベクトル場が存在しないこと
くわしくは論文に出る予定であるので概要をのべることにする。

M を特殊 G 多様体 [1], [2] であって次の条件をみたすものとする。

(条件) M は (H) を主軌道型, (K) を特異軌道型とする 2 つの軌道型 $(H), (K)$ をもち, H, K の正規化群が次のように分解される: $N(H) = \Gamma(H) \times H$, $N(K) = \Gamma(K) \times K$, $\Gamma(K) < \Gamma(H)$ 。

M からその軌道空間への標準写像を $\pi: M \rightarrow \pi(M)$ で表わす。このとき次の 2 つのファイバーバンドルが得られる。

$$(1) \mathcal{F}(H): G/H \rightarrow M(H) \rightarrow \pi(M(H)),$$

$$(2) \mathcal{F}(K): G/K \rightarrow M(K) \rightarrow \pi(M(K)),$$

ここで $M(K) = \{x \in M; G_x \text{ が } K \text{ と共役}\}$, $M(H)$ も同様のものである。

M の接ベクトルバンドルをそれぞれ $M(H), M(K)$ に制限するとその構造は見易くなることに注意する。

ゆえに $M(K) \subset M$ による $M(K)$ の同変管状近傍を N とする。

$M \xrightarrow{q} N = M_1$, $\pi(M_1) = M_1'$, $\pi(M(K)) = M(K)'$ とおき $\text{Vect}_K(M(K))$ を $M(K)$ 上の K -ベクトルバンドルとし、 $\text{Vect}_H(M_1')$ も同様のものとする。このとき次の様なオプジェクトを考える。

$$\mathcal{D} = \{ (F', E') \in \text{Vect}_K(M(K)) \times \text{Vect}_H(M_1') ;$$

$$\alpha_H: p'^* r^* F' \rightarrow \partial E' \},$$

$\rightarrow K \gamma^*$ は包含 $H \subset K$ から得られるベクトルバンドルの準同型すなわち制限準同型である。 $p' : \pi(\partial N) \xrightarrow{\cong} \pi(M(K))$ は射影 $p : \partial N \rightarrow M(K)$ から得られるもので微分同相である。このとき D の 2 つの元 (F', E', α_H) と $(\bar{F}', \bar{E}', \bar{\alpha}_H)$ とが同値であることは次の相互可換図式が存在することであると定める。

$$\begin{array}{ccccc}
 F' & \longrightarrow & p'^* \gamma^* F' & \longrightarrow & \partial E' \subset E' \\
 \downarrow p_K & & \downarrow p_{H,K} & & \downarrow \varphi_H \quad \downarrow \psi_H \\
 \bar{F}' & \longrightarrow & p'^* \gamma^* \bar{F}' & \longrightarrow & \partial \bar{E}' \subset \bar{E}'
 \end{array}$$

$\rightarrow K p_K$ は K ベクトルバンドルの同型写像, $p_{H,K}$ はその H ベクトルバンドルとみる制限, φ_H は H ベクトルバンドルの同型である。 $\text{Vect}_Q(M)$ を M 上の Q ベクトルバンドルの同値類のなす半群とあると次の半群としての同型が得られる。

$$\text{定理 [2]} \quad \text{Vect}_Q(M) \xrightarrow{\cong} D / (\sim)$$

D の各元をデータと呼ぶことにすると, M 上の接ベクトルバンドルのデータは

$$\{ T(\pi(M(K))) \oplus (L_K) \oplus \pi_* \nu, T(\pi(M(H)), 1) \oplus (L_H), \alpha_H \}$$

の形になる。ここで (L_K) は K の等変性表現による $\pi(M(K))$ 上の積バンドルで, (L_H) も同様, ν はうめ: $\pi(M(K)) \subset M$

の法ベクトルバンドルである。

M が $W^{2n-1}(d)$ の場合はこのデータは次の標となる。

$$\{ \theta^1 \oplus 2(p_{n-1}), 3\theta^1 \oplus 2(p_{n-2}); \alpha_{0(n-2)} \},$$

従って M の接ベクトルバンドルは $O(n)$ 不変なリーマン計量
 に関して積バンドル $M(k) \times R^1$ の 2 倍を直和成分としても
 得ない。この標にして次の定理が得られる。

定理 [2] $O(n)$ 多標体 $W^{2n-1}(d)$ 上には $O(n)$ -不変な
 1-ベクトル場が存在するが、2-ベクトル場は存在しない。

引用文献

- [1] Hirzebruch - Mayer : $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten,
 exotische Sphären und Singularitäten, 57, Springer
 Verlag 1968.
- [2] H. Matsunaga : KG -groups and invariant vector
 fields on special G -manifolds, to appear

追記

上の定理 [2] において $n \geq 3$ とする。 $n = d = 2$ の場合には
 阪大の内田氏が反例を示して下さった。 $n = 2$ の場合は $O(0)$

は意味が無く、本文中の証明は適用できない。