数理解析研究所講究録
第104巻 1970年 64-70

64

On the C_p-classes in a von Neumann algebra

東北大 理 武元英夫

§1. 序

Hilbert space H における completely continuous operators 全体からなる ideal C(H) において, C_p-classes なるものが定義され、議論がなされていることは Dunford-Schwartz [3] によって知られている。C(H) の元 a に対して a の絶対値 $|a|=(a^*a)^{1/2}$ の eigenvectors $\mu_1(a), \mu_2(a), \cdots$ を 0 に収束する様に単調減少に並べ換え列とした時, C_p-classes は $C_p=\{a\in C(H);\ |a|_p=\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(a)^p\}^{1/p}<\infty\}$ によって定められている。

ここでは、type I von Neumann algebra M において、上の C_p-classes を拡張して行くことを目的とする。まず, H. Halpern [6] が type I von Neumann algebra のある maximal CCR-ideal を上の C(H) に対応させることによって、一種の spectral decomposition を行っている。(定理 1.) 私は、その H. Halpern の結果から, Dunford-Schwartz の著書にも書かれている characteristic numbers の議論を type I von Neumann algebra において進めて行き、更に classes-C_p を定義する。最後に、定義された C_p-classes ($p \geq 1$) に対して、M の center Z を module とする Z-linear functional の意味で C_p-classes dual space がどうなるか調べて行く。

§2。Completely continuous elements の spectral decomposition と characteristic operators 。

M は type I von Neumann algebra とし、その center Z の spectrum を X とする。今、M における all abelian projections によって generate される uniformly closed ideal を $C_\infty(M)$ とする。その時、$C_\infty(M)$ が maximal CCR-ideal になることは今までに知られている。X ∋ ζ に対して、ideal [ζ] を Z における maximal ideal ζ を含む M における最小の closed ideal とする。その時、Hilbert space $H(\zeta)$ が存在して $M/[\zeta]$ が $H(\zeta)$ 上に既約に表現されることが Glimm[4] で分っている。以上の事柄から H. Halperm [6] は次の事を示している。

定理 1. M, Z, $C_\infty(M)$ を前に述べたものとする。その時, $C_\infty(M)$ の任意の positive element a に対して、次の性質を満す Z の positive elements の列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ と abelian projections の列 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在する。(1) $\{e_i\}$ は互いに直交し, $e_i \gtrsim e_{i+1}$ for $\forall i$; (2) $a_i \geq a_{i+1}$ for $\forall i$, $\lim a_i = \infty$ 但 $\{a_i\}$ が無限個; (3) $\mathrm{supp}(a_i) = Z(e_i)$;

(4) $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ in uniform topology.

定理1において定まった $C_\infty(M)$ の positive element の表現を spectral decomposition と呼ぶ。

定義1。$C_\infty(M)$ の任意の元 a に対して，$|a|$ のスペクトル分解 $|a| = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ の時，a の n-th characteristic operator を $\mu_n(a)$ と表わし，それを a_n とする。

上の定義から，Hilbert space 上の completely continuous operators に対する characteristic number の議論が拡張されることは、次の補題1から分る。そこで，補題1とそれによって分る二・三の性質を列記する。

補題1。$C_\infty(M) \ni a$, $X \ni \zeta$ に対して，$\mu_n(a(\zeta))$ を $H(\zeta)$ 上の $a(\zeta)$ の n-th characteristic number とすると，$\mu_n(a)^\wedge(\zeta) = \mu_n(a(\zeta))$ が成立する。

補題2。$C_\infty(M)$ の元 a, b に対して，次が成立する。

$$\mu_{n+m+1}(a+b) \leqq \mu_{n+1}(a) + \mu_{m+1}(b),$$

$$\mu_{n+m+1}(ab) \leqq \mu_{n+1}(a)\,\mu_{m+1}(b).$$

補題3。$C_\infty(M)$ の元 a, b と M の元 t に対して次が成立つ．

(1) $\|\mu_n(a) - \mu_n(b)\| \leq \|a-b\|$; (2) $\mu_n(at) \leq \mu_n(a)\|t\|$, $\mu_n(ta) \leqq \|t\|\mu_n(a)$; (3) $\mu_n(au) = \mu_n(a)$ if $\|u\| = \|u^{-1}\| = 1$, $u \in M$ 。

§3。Completely continuous elements の classes $C_p(M)$。

この§では，$C_\infty(M)$ において classes $C_p(M)$ を定義し，更に classes $C_p(M)$ が Banach algebra になることを示す。

定義2。$1 \leqq p < \infty$ に対して，$C_p(M) = \{a \in C_\infty(M) ; \|a\|_p = \|\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(a)^p\}^{1/p}\| < \infty\}$ 特に，$C_\infty(M)$ において uniform topology を考える。

すると，次の事が分る。

補題4。

(a) $C_p(M) \subset C_{p'}(M)$ if $p \leq p'$, $\|a\|_p \downarrow$ for $p \uparrow$;

(b) $a, b \in C_p(M) \Rightarrow a+b \in C_p(M)$ and $\|a+b\|_p \leqq \|a\|_p + \|b\|_p$;

(c) $a \in C_p(M)$, $b \in C_q(M)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1) \Rightarrow ab \in C_1(M)$ and $\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q$;

(d) $a \in C_p(M)$, $t \in M \Rightarrow ta, at \in C_p(M)$ and $\|at\|_p \leq \|a\|_p \|t\|$, $\|ta\|_p \leqq \|t\| \cdot \|a\|_p$ 。

補題4によって classes $C_p(M)$ は normed algebra である。更に次の事から，$C_p(M)$ が Banach algebra となる。

定理2。$C_p(M)$ における列 $\{a_n\}$ が $\|a_n-a_m\|_p\to 0$ as $n,m\to\infty$ を満す時，$C_p(M)$ の元 a が存在して，$\|a_n-a\|_p\to 0$ as $n\to\infty$ が成立する。

Hilbert space における finite rank な operator に代って $F=\{a\in C_\infty(M)\ ;\ |a|=\sum_{i=1}^{N}a_ie_i,\ N<\infty\}$ によって F を定義する。その時，次の様に F が ideal となる。更に，classes $C_p(M)$ において dense であることが分る。

補題5。$F\ni a,\ M\ni b\ \Rightarrow\ ab,\ ba\in F$ が成立する。

補題6。$C_\infty(M)\ni a$ に対して，F において次の性質を満す列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する。

(1) $\|b_n-a\|\to 0$ as $n\to\infty$;

(2) $\|b_n-a\|_p\to 0$ as $n\to\infty$ if $a\in C_p(M)$;

(3) $\|b_n\|_p\to\|a\|_p$ as $n\to\infty$ if $a\in C_p(M)$。

§4。type I von Neumann algebra M における classes $C_p(M)$ の duality。

$C_1(M)$ の positive element a の spectral decomposition $a=\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i$ に対して，$Tr(a)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ とおく。その時，$X\ni\xi$ に対して，

$Tr(a)^\wedge(\zeta) = Tr(a(\zeta))$ が成立する。ここで、$Tr(a(\zeta))$ は $B(H(\zeta))$ の trace を表わす。今、$C_1(M) \ni a$ に対して、$a = a_1 - a_2 + i(a_3 - a_4)$ $(a_i \geqq 0)$ と表わした時、$Tr(a) = Tr(a_1) - Tr(a_2) + i(Tr(a_3) - Tr(a_4))$ によって、Tr を定義した時、Tr は次の性質をもつ。(1) $a, b \in C_1(M)$, $c, d \in Z \Rightarrow Tr(ca + db) = cTr(a) + dTr(b)$; (2) $a \in C_1(M)$, $u \in M_u$ $\Rightarrow Tr(u^* a u) = Tr(a)$ (3) $a \in C_1(M) \Rightarrow \varphi(b) = Tr(ba)$ for $b \in M$ は M 上の continuous Z-linear functional である。

そこで $C_p(M)$ の duality を考えるにあたって、$C_p(M)$ 上の continuous functional として、$\| \|_p$-continuous Z-linear functional を表わす。その意味で $C_p(M)^* = C_q(M)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ が成立する。最初に次の事を示す。

定理3。$1 < p < \infty$, $a \in C_p(M)$ に対して、次が成立する。

$$\|a\|_p = \sup_{b \in F} \frac{\| Tr(ab) \|}{\| b \|_q} , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

H. Halperm は $C_1(M)^* = M$, $C_\infty(M)^* = C_1(M)$ であることを示している。しかし、彼の議論は Kaplansky の結果、即ち $C_2(M)$ が Modular Hilbert space であることを使っている。しかし、$p \neq 1, \infty$ に対しては、定理3が必要になって来る。最後に、定理3を用いることによって、$1 < p < \infty$ に対して $C_p(M)^* = C_q(M)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ になることを示す。

定理4。$a_0 \in C_q(M)$ に対して，$\varphi(a) = Tr(aa_0)$ for $a \in C_p(M)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ によって定義される $C_p(M)$ 上の Z-linear functional φ は continuous となる。更に，$C_p(M)$ 上の任意の Continuous Z-linear functional φ に対して，$C_q(M) \ni a_\varphi$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ が一意に定まって，$\varphi(a) = Tr(aa_\varphi)$ for $\forall a \in C_p(M)$ and $\|\varphi\| = \|a_\varphi\|_q$ が成立する。

References

[1] J. Dixmier; Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[2] J. Dixmier; Les C*-algebres et leus representation, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[3] N. Dunford and J.T. Schwartz; Linear operators II.

[4] J. Glimm; A Stone-Weierstrass theorem for C*-algebras, Ann. of Math., 72(1960), 216-244.

[5] J. Glimm; Type I C*-algebras, Ann. of Math., 73(1961), 572-612.

[6] H. Halpern; A spectral decomposition for self-adjoint element in the maximal GCR-ideal of a von Neumann algebra with applications to non-commutative integration theory, Trans. Amer. Math. Soc., 133(1968), 281-306.

[7] S. Sakai; The theory of W*-algebras, Lecture Note, 1962.