数理解析研究所講究録
第104巻 1970年 71-81

Pure State の Extension について

東北大 理　菊池武雄

§. Introduction.

X を partially ordered vector space とし、N をその positive cone とする。$0 \leq z \leq x$ $z \in X$, $x \in N$ ならば $z \in N$ のとき N を order ideal という。C^*-algebra の ideal とその dual における invariant subspace の関係や、dual における invariant subspace と bidual (これは W^*-algebra になるが) の ideal との関係については、1960年前後に M. Tomita [7] や E. Effros [6] によって詳しく論じられている。$\mathfrak{U}$ を C^*-algebra とし、$\mathcal{L}$ を left ideal とする。$\mathcal{L}$ の $\mathfrak{U}^*$ における polar を $\mathcal{L}^\circ$ とかき、$\mathcal{L}^\circ$ の $\mathfrak{U}^{**}$ における polar を $\mathcal{L}^{\circ\circ}$ とかけば、$\mathcal{L}^{\circ\circ}$ は W^*-closed left ideal になる。だから $\mathfrak{U}^{**}$ の中に projection p が存在して、$\mathcal{L}^{\circ\circ} = \mathfrak{U}^{**}p$ とかける。$\mathfrak{U}^{**}$ におけるこのような projection を open projection といい、open projection の orthocomplement となっている projection を closed projection という。このように定義すれば、general topology における open set と closed set のアナロジーをある程度辿ることができる [2] [3] [4]。そのような議論一般をここでは仮に、left ideal structure の議論ということにする。

論文 [1] で pure state の extension が問題とされた。そこに次の結果が述べられている。

Theorem A. (J. Aarnes and R. Kadison)

$\mathfrak{U}$ を separable C^*-algebra で unit をもつとし、ρ を $\mathfrak{U}$ の pure state とする。このとき $\mathfrak{U}$ の maximal abelian C^*-subalgebra A が存在して、$\rho|A$ は multiplicative になる。

C. Akemann は left ideal structure の議論を応用して、上の定理を次のように拡張した [3]。

Theorem B. (C. Akemann)

$\mathfrak{U}$ を separable な C^*-algebra (必ずしも unit をもたない) とし、$\{f_1, \cdots, f_n\}$ を $\mathfrak{U}$ の有限個の互いに orthogonal な pure state とする。このとき、$\mathfrak{U}$ の maximal abelian C^*-subalgebra A が存在して、$f_k|A$ $(k=1,2,\cdots,n)$ は A の pure state であり、f_k は $f_k|A$ の

unique state extension になる。

講演の前半では left ideal structure について述べ、後半で Akemann の定理に対して Remark をつけ加える。この Remark がこの講演の目的になる。

§. Theorem と Remark.

以下 Theorem 7 までは、特に断らない限り C^*-algebra $\mathfrak{A}$ は unit をもつものとする。

Definition 1. $\mathfrak{A}^{**}$ の projection p が open であるとは、p に w^*-topology で収束するような $\mathfrak{A}$ の positive element より成る monotone increasing な directed set $\{a_\alpha\}$ が存在することである。open projection の orthocomplement を closed projection という。

Propsition 2. projection $p \in \mathfrak{A}^{**}$ が closed であるための必要十分条件は、p が $\mathfrak{A}^*$ における w^*-closed order ideal の support になっていることである。

Proposition 3. projection $p \in \mathfrak{A}^{**}$ が $\mathfrak{A}^{**}$ で minimal ならば、p は closed projection である。

Proposition 4. projection $p \in \mathfrak{A}^{**}$ が minimal closed なら p は $\mathfrak{A}^{**}$ で minimal である。

Proposition 5. $\{p_\alpha\}$ を closed projection の set とすれば $p = \bigwedge_\alpha p_\alpha$ も closed projection である。

Proposition 6. $\{p_\alpha\}$ を closed projection の set で、その任意の有限個 $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \cdots\cdots, p_{\alpha_n}$ に対して常に $\bigwedge_i p_{\alpha_i} \neq 0$ ならば $\bigwedge_\alpha p_\alpha \neq 0$ である。

2個の closed projection の suprimum は必ずしも closed にはならない。suprimum が closed になるための条件については、次のことが知られている [2]。

Theorem 7. closed projection p, q が $\| p(q - p \wedge q) \| < 1$ であれば、$p \vee q$ は closed である。

以上の準備で pure state の extension について考える。pure state の extension を考えるときは unit がなくてもよいので、以下の C^*-algebra $\mathfrak{U}$ には unit の存在を仮定しない。

$\mathfrak{U}$ に unit を添加した C^*-algebra を $\tilde{\mathfrak{U}}$ とかけば、$\tilde{\mathfrak{U}}^* = \mathfrak{U}^* \oplus_{\ell^1} \{\alpha\omega_0\}$, $\tilde{\mathfrak{U}}^{**} = \mathfrak{U}^{**} \oplus_{\ell^\infty} \{\alpha e_0\}$ とかけることは明らかである。ここに ω_0 は $\mathfrak{U}$ で vanish する $\tilde{\mathfrak{U}}$ の state であり、e_0 は $\tilde{\mathfrak{U}}^{**}$ の minimal projection である。e_0 は locally compact set の

無限遠点に相当するものである。

Urysohn の lemma に対応する定理が成り立っている [4]。

Theorem 8. $\mathfrak{U}$ を unit をもつ C*-algebra とし、$p, q \in \mathfrak{U}^{**}$ を $p \cdot q = 0$ なる closed projection とする。このとき $0 \leq a \leq 1$, $ap = 0$, $aq = q$ なるような a を $\mathfrak{U}$ の中にとることができる。

Definition 9. C*-algebra $\mathfrak{U}$ の positive element a が strictly positive であるとは、0 でない $\mathfrak{U}$ の positive linear functional f に対して常に $f(a) > 0$ なることである。

strictly positive element については、次の結果がある [1]。

Theorem C. (J. Aarnes and R. Kadison)

separable C*-algebra は strictly positive element をもつ。

これを使えば Theorem 8 はもう少し精密になる。

Remark 10. $\mathfrak{U}$ が separable のとき、Theorem 8 における a として特に $N(a) = p$, $N(1-a) = q$ なるようにとることができる。ここで $N(a)$ 及び $N(1-a)$ は、それぞれ a 及び $1-a$ の nullprojection

である。

Introduction で述べた Theorem B に対して次の事実を Remark する。

Theorem 11. $\mathfrak{U}$ を separable C^*-algebra とし（unit の存在は仮定しない）、$\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ を $\mathfrak{U}$ の互いに orthogonal な pure state とする。f_α の $\mathfrak{U}^{**}$ における support を e_α とおく。このとき $\mathfrak{U}$ の abelian C^*-subalgebra A が全ての $\alpha\in I$ に対して $f_\alpha|_A$ が A の pure state であり、f_α が $f_\alpha|_A$ の unique state extension であるための必要十分条件は、任意の e_α に対して、e_α は a の spectral projection であり、$ae_\alpha \neq 0$ なるような a が A の中に存在することである。

上の同値な条件を条件（A）と呼ぶことにする。次の Corollary は明らかである。

Corollary 12. $\mathfrak{U}$ の abelian C^*-subalgebra A が条件（A）をみたせば、A を含む maximal abelian C^*-subalgebra も同じ条件をみたす。

Theorem B は次の形に述べられる。

Corollary 13. 有限個の $\{f_\alpha\}$ については常に条件（A）をみたす maximal abelian C^*-subalgebra が存在する。

§. Proofs.

(1). Remark. 10 の証明

Thm. 8 における a の spectral projection を $E(\delta)$ とする。$r_1 = E((\frac{2}{3}, 1]) - q$ とおくと、r_1 は open projection になる。$\mathfrak{U}$ は separable だから $r_1 \mathfrak{U} r_1$ も separable である。だから Thm C より $r_1 \mathfrak{U} r_1$ には strictly positive element a_1 が存在する。$\|a_1\| < \frac{1}{3}$ としてよい。同様にして $r_2 = E([0, \frac{1}{3})) - p$ とおいて、$r_2 \mathfrak{U} r_2$ の strictly positive element を a_2, $\|a_2\| < \frac{1}{3}$ とする。$b = a - a_1 + a_2$ とおけば、これが求めるものであることは明らかである。

(2). Thm. 11 の証明

(十分性) e_α を任意にとる。e_α の range にある unit vector を一つとりそれを x_α とおく。e_α は a の spectral projection になっているから、e_α は A の任意の元と可換である。故に A の元 b_1, b_2 に対して、$b_1 x_\alpha = \lambda_1 x_\alpha$, $b_2 x_\alpha = \lambda_2 x_\alpha$ (λ_1, λ_2 は scalar) と表わされる。$f_\alpha(b_1 \cdot b_2) = \langle b_1 b_2 x_\alpha, x_\alpha \rangle = \lambda_2 \langle b_1 x_\alpha, x_\alpha \rangle = \lambda_2 \cdot \lambda_1 = f_\alpha(b_1) \cdot f_\alpha(b_2)$ 他方 $a e_\alpha \neq 0$ であったから $f_\alpha | A$ は pure state である。

次に $\mathfrak{A}$ の state g が $f_\alpha|A$ の extension であるとする。 $\mathfrak{A}$ の universal enveloping von Neumann algebra で考えれば unit vector y が存在して $g(b)=\langle by, y\rangle$ $b\in\mathfrak{A}$ とかける。 e_α は closed projection だから $\exists\{a_n\}\subset A$, $0\leq a_n\leq 1$, $a_n\downarrow e_\alpha$ である。 $\langle a_n y, y\rangle = g(a_n)=f_\alpha(a_n)=1$ 故に $\langle e_\alpha y, y\rangle=1$ $\therefore$ $y\in$ range e_α e_α は minimal projection だから $g=f_\alpha$ よって示された。

（必要性） $\mathfrak{A}$ が unit をもたない場合について示しておけば十分である。 $\mathfrak{A}$ に unit を添加した C^*-algebra を $\tilde{\mathfrak{A}}$ とし、同様に A についても $\tilde{A}$ とする。 明らかに $\tilde{A}^{**}\subset\tilde{\mathfrak{A}}^{**}$ である。 $f_\alpha|\tilde{A}^{**}$ の $\tilde{A}^{**}$ における support を $e'_\alpha\in\tilde{A}^{**}$ とおく。 e'_α は $\tilde{A}$ に関して closed かつ $e_\alpha\leq e'_\alpha$ である。 $f_\alpha|\tilde{A}$ は pure state であるから e'_α は mimal projection である。 $\tilde{A}^{**}$ の無限遠点を N とおくと明らかに $N\cdot e'_\alpha=0$。 故に Thm. 8 及びその Remark を使えば $\exists\, a\in\tilde{A}$, $0\leq a\leq 1$, $a\cdot N=0$, $a\cdot e'_\alpha=e'_\alpha$ かつ e'_α は $1-a$ の null projection になっているように a をとることができる。 $aN=0$ だから $a\in A$, また e'_α が null projection となっていることから、e_α' は a の spectral projection になっている。だから $e_\alpha' = e_\alpha$ が示されれば証明が終る。$e_\alpha' \neq e_\alpha$ とすれば range$(e_\alpha' - e_\alpha)$ の中から unit vector x_α' をとることができる。$f_\alpha'(a) = \langle a x_\alpha', x_\alpha' \rangle$ $a \in \mathfrak{U}$ とおくと f_α' は $\mathfrak{U}$ の state である。しかもこれは $f_\alpha|A$ の extension になっている。ところが

$f_\alpha(e_\alpha) = 1$, $f_\alpha'(e_\alpha) = 0$ これは extension が unique という仮定に反する。 ∴ $e_\alpha' = e_\alpha$

(3)、Cor. 13 の証明

$\{f_1, \dots, f_n\}$ の support を $\{e_1, \dots, e_n\}$ とする。二つの orthogonal closed projection e_1 と $\bigvee_{i=2}^{n} e_i$ に対して Remark 10 を使う。e_1 で 1, $\bigvee_{i=2}^{n} e_i$ で 0 なるように a_1 をとる。a_1 の spectral projection を $E_1(\delta)$ とおく。二つの orthogonal closed proj. e_1, $E_1([0, \frac{1}{2}])$ に対して Remark 10 を使う。e_1 で 1, $E_1([0, \frac{1}{2}])$ で 0 なるように a_1' をとる。次に e_2, $E_1([\frac{1}{2}, 1]) \vee (\bigvee_{i=3}^{n} e_i)$ に対して Remark 10 を使い、e_2 で 1, $E_1([\frac{1}{2}, 1]) \vee (\bigvee_{i=3}^{n} e_i)$ で 0 なるように a_2 をとる。そうして前と同じことをくり返して a_2' をとる。これを n 回くり返して $a_1', a_2', \dots, a_n'$ を

得る。 $a_1', \ldots, a_n'$ は互いに orthogonal である。これによって generate される abelian C^*-subalgebra を A とおくと、これが Thm. 11 の条件 (A) をみたしていることは明らかである。A を含む maximal abelian C^*-subalgebra をとればこれが求むるものである。

参考文献

1. J. Aarnes and R. Kadison, Pure state and approximate identities, Proc. Amer. Math. Soc. 21('69)
2. C. Akemann, The general Stone-Weierstrass problem, to appear.
3. 〃, Approximate units and maximal abelian C^*-subalgebras, to appear
4. 〃, Left ideal structure of C^*-algebras, to appear
5. J. Dixmier, Les C^*-algèbres et leurs représentation, Gauthier-Villars, Paris, '64.
6. E. Effros, Order ideals in a C^*-algebra and its dual, Duke Math. J., 30('63)
7. M. Tomita, Spectral theory of operator algebras, I, Math. J. Okayama Univ. 9('59)