数理解析研究所講究録
第 104 巻 1970 年 109-117

Infinite tensor products of operators

京大 数研 · 東工大 理 中神祥臣

§1. 序

ここでは現在準備中である KITAGAWA and NAKAGAMI [2] の結果を紹介する.

§2. 定義と記号の説明

I : 無限添字集合 ; $\iota, \kappa \in I$

$J \subset\subset I \iff J$ は I の有限部分集合

$\mathcal{H}_\iota$: $\{0\}$ でない Hilbert 空間 ; $\xi_\iota, \eta_\iota \in \mathcal{H}_\iota$

M_ι : $\mathcal{H}_\iota$ 上の von Neumann algebra ; $x_\iota, y_\iota \in M_\iota$

Γ_0 : C_0-sequences 全体の集合 ; $(\xi_\iota), (\eta_\iota) \in \Gamma_0$

ただし $0 < \prod \|\xi_\iota\| < +\infty$.

$(\xi_\iota) \sim (\eta_\iota) \iff \sum |(\xi_\iota|\eta_\iota) - 1| < +\infty$

$(\xi_\iota) \approx (\eta_\iota) \iff$ あるユニタリ作用素 $u_\iota \in M_\iota'$ が存在

$\sum |(u_\iota\xi_\iota|\eta_\iota) - 1| < +\infty$

$\Gamma = \Gamma_0 / \sim$; $c, c' \in \Gamma$

$(\Gamma) = \Gamma_0 / \simeq$; $(c), (c') \in (\Gamma)$

$\otimes \mathcal{H}_\iota$ ：完全無限テンソル積

$\otimes^c \mathcal{H}_\iota$ ：$c \in \Gamma$ に対応した不完全無限テンソル積

$\otimes M_\iota = (\bigcup_{J \subset I} (\underset{J}{\otimes} M_\iota) \otimes C(\otimes_{J^c} \mathcal{H}_\iota))''$

ここで，$C(\otimes_{J^c} \mathcal{H}_\iota)$ は $\otimes_{J^c} \mathcal{H}_\iota$ 上の scalar 作用素全部

$\otimes^c M_\iota$ ：$\otimes M_\iota$ の $\otimes^c \mathcal{H}_\iota$ 上への制限.

§3. 作用素の無限テンソル積.

x_ι を $\mathcal{H}_\iota$ 上の有界な作用素としたとき，$\prod \|x_\iota\| < +\infty$ が成り立っていれば，$\otimes \mathcal{H}_\iota$ 上にその無限テンソル積 $\otimes x_\iota$ を定義でき，各 x_ι の極分解 $x_\iota = u_\iota |x_\iota|$ により，その $\otimes x_\iota$ は $(\otimes u_\iota)(\otimes |x_\iota|)$ と表わせることを [3] の中で示したが，幾つかの応用を考える場合には，$\prod \|x_\iota\| < +\infty$ という条件は必ずしも適切ではない．そこで定義域を不完全テンソル積 $\otimes^c \mathcal{H}_\iota$ だけで済ませることにより，これより弱い条件の下で作用素の無限テンソル積を与えることにする.

この節では各 $\iota \in I$ に対して

x_ι ：稠密な定義域 $\mathcal{D}(x_\iota)$ を持つ 0 でない $\mathcal{H}_\iota$ 上の閉作用素

$\mathcal{D}(x_\iota^*)$ ：x_ι^* の定義域

$x_\iota = u_\iota |x_\iota|$ ：極分解.

$(\xi_{0\iota}) \in C$, $\xi_{0\iota} \in \mathcal{D}(x_\iota)$ に対して

$\mathcal{D}(\odot x_\iota)^{\xi_0}$: $\xi_\iota \in \mathcal{D}(x_\iota)$, $\{\iota \in I : \xi_\iota \neq \xi_{0\iota}\}$ が有限であるような $\otimes \xi_\iota$ により張られる線形空間

$\mathcal{D}(\odot x_\iota)^C$: $\xi_\iota \in \mathcal{D}(x_\iota)$, $(\xi_\iota) \in C$, $\prod\{\|x_\iota \xi_\iota\| : x_\iota \xi_\iota \neq 0\} < +\infty$ なる $\otimes \xi_\iota$ により張られる線形空間

以後 $\otimes \xi_\iota \in \mathcal{D}(\odot x_\iota)^{\xi_0}$ 又は $\mathcal{D}(\odot x_\iota)^C$ とは ξ_ι が上のような条件を満たしているものとする. 同様の記号 $\mathcal{D}(\odot x_\iota^*)^{\eta_0}$, $\mathcal{D}(\odot x_\iota^*)^{C'}$ を使う. 次の事が容易に示される.

$$\exists \otimes \xi_\iota \in \mathcal{D}(\odot x_\iota)^{\xi_0} : \otimes x_\iota \xi_\iota \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \{\iota \in I : x_\iota \xi_{0\iota} = 0\} \text{ は有限},\ 0 < \prod\{\|x_\iota \xi_{0\iota}\| : x_\iota \xi_{0\iota} \neq 0\} < +\infty$$
$$\Leftrightarrow \sum \big|\, \|x_\iota \xi_{0\iota}\| - 1 \big| < +\infty$$

定義. $(\xi_{0\iota}) \in \Gamma_0$, $(\eta_{0\iota}) \in \Gamma_0$ とする. $(\xi_{0\iota})$ が (a) (かつ (d) 又は non (d)) を満たす場合に (x_ι) の (zero 又は non zero) reference vector という. $\{(\xi_{0\iota}), (\eta_{0\iota})\}$ が (a), (b), (c) (かつ (d)) を満たす場合にも (x_ι) の (non zero) reference vector という.

(a) $\xi_{0\iota} \in \mathcal{D}(x_\iota)$, $\prod\{\|x_\iota \xi_{0\iota}\| : x_\iota \xi_{0\iota} \neq 0\} < +\infty$;

(b) $\eta_{0\iota} \in \mathcal{D}(x_\iota^*)$, $\prod\{\|x_\iota^* \eta_{0\iota}\| : x_\iota^* \eta_{0\iota} \neq 0\} < +\infty$;

(c) $\otimes \xi_\iota \in \mathcal{D}(\odot x_\iota)^{\xi_0} : \otimes x_\iota \xi_\iota \neq 0 \Rightarrow (x_\iota \xi_\iota) \sim (\eta_{0\iota})$;

(d) $\quad {}^{\exists}\otimes\xi_\iota \in \mathcal{D}(\odot x_\iota)^{\xi_0} \ : \ \otimes x_\iota \xi_\iota \neq 0$.

補助定理. $(\xi_{0\iota})\in C$ を zero reference vector とすると，すべての $\otimes\xi_\iota\in\mathcal{D}(\odot x_\iota)^{\xi_0}$ に対し $(\otimes^{\xi_0}x_\iota)(\otimes\xi_\iota)=\otimes x_\iota\xi_\iota$ となるような定義域 $\mathcal{D}(\odot x_\iota)^{\xi_0}$ を持つ作用素 $\otimes^{\xi_0}x_\iota$ が存在し，その最小の閉拡大は $\otimes^{C}\mathcal{H}_\iota$ 上の 0 である.

$\{(\xi_{0\iota}),(\eta_{0\iota})\}$ を (x_ι) の non zero reference vector とし，$\mathcal{D}(\odot x_\iota)^C$ 上に内積と norm を

$$(\xi|\xi')_{\otimes x_\iota} = (\xi|\xi') + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(\otimes x_\iota\xi_{j\iota}|\otimes x_\iota\xi'_{k\iota})$$

$$\|\xi\|_{\otimes x_\iota} = \{(\xi|\xi)_{\otimes x_\iota}\}^{1/2}$$

で定義する．ただし $\xi=\sum_{j=1}^{m}\otimes\xi_{j\iota}$, $\xi'=\sum_{k=1}^{n}\otimes\xi'_{k\iota}\in\mathcal{D}(\odot x_\iota)^C$

$\mathcal{D}(\otimes x_\iota)^C$: $\mathcal{D}(\odot x_\iota)^C$ の $\|\ \|_{\otimes x_\iota}$ 閉包

$\mathcal{D}(\otimes x_\iota^*)^{C'}$: $\mathcal{D}(\odot x_\iota^*)^{C'}$ の $\|\ \|_{\otimes x_\iota^*}$ 閉包

定理 3.1. $\{(\xi_{0\iota}),(\eta_{0\iota})\}$ を $(\xi_{0\iota})\in C$, $(\eta_{0\iota})\in C'$ なる (x_ι) の non zero reference vector とすると下のような条件を満たす 0 でない閉作用素 $\otimes^{C'C}x_\iota : \otimes^{C}\mathcal{H}_\iota \longrightarrow \otimes^{C'}\mathcal{H}_\iota$ と $\otimes^{CC'}x_\iota^* : \otimes^{C'}\mathcal{H}_\iota \longrightarrow \otimes^{C}\mathcal{H}_\iota$ とが存在する:

(i) $\otimes^{C'C}x_\iota$ の定義域は $\mathcal{D}(\otimes x_\iota)^C$

$\otimes^{CC'}x_\iota^*$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{D}(\otimes x_\iota^*)^{C'}$

(ii) $\otimes \xi_\iota \in \mathcal{D}(\odot x_\iota)^{\xi_0}$ ならば $(\otimes^{\varepsilon'\varepsilon} x_\iota)(\otimes \xi_\iota) = \otimes x_\iota \xi_\iota$

$\otimes \eta_\iota \in \mathcal{D}(\odot x_\iota^*)^{\eta_0}$ $\qquad (\otimes^{\varepsilon\varepsilon'} x_\iota^*)(\otimes \eta_\iota) = \otimes x_\iota^* \eta_\iota$

(iii) $\otimes^{\varepsilon'\varepsilon} x_\iota \subset (\otimes^{\varepsilon\varepsilon'} x_\iota^*)^*$, $\otimes^{\varepsilon\varepsilon'} x_\iota^* \subset (\otimes^{\varepsilon'\varepsilon} x_\iota)^*$.

系 3.1. $\{(\xi_{0\iota}), (\eta_{0\iota})\}$ を (x_ι) の non zero reference vector で $0 < \prod \|\eta_\iota\| < +\infty$ とする. もし $\otimes \xi_\iota \in \mathcal{D}(\odot x_\iota)^{\xi_0}$ と $\otimes \eta_\iota \in \mathcal{D}(\odot x_\iota^*)^{\eta_0}$ が存在して $(y_\iota \eta_\iota) \in \varepsilon''$, $(y_\iota^* \xi_\iota) \in \varepsilon'''$ ならば

(i) $(\otimes^{\varepsilon''\varepsilon'} y_\iota)(\otimes^{\varepsilon'\varepsilon} x_\iota) = \otimes^{\varepsilon''\varepsilon} y_\iota x_\iota$

(ii) $\mathcal{R}(y_\iota) \subset \mathcal{D}(x_\iota)$ ならば $(\otimes^{\varepsilon'\varepsilon} x_\iota)(\otimes^{\varepsilon\varepsilon''} y_\iota) = \otimes^{\varepsilon'\varepsilon'''} x_\iota y_\iota$.

系 3.2. $\{(\xi_{0\iota}), (\eta_{0\iota})\}$ を (x_ι) の non zero reference vector とする. もし $\otimes \eta_\iota \in \mathcal{D}(\odot x_\iota^*)^{\eta_0}$ が存在して $(u_\iota^* \eta_\iota) \in \varepsilon'''$ ならば $\otimes^{\varepsilon'\varepsilon} x_\iota = (\otimes^{\varepsilon'\varepsilon''} u_\iota)(\otimes^{\varepsilon''\varepsilon} |x_\iota|)$.

定理 3.2. $\prod\{\lambda_\iota : \lambda_\iota \neq 0\} < +\infty$ なる $\lambda_\iota \in \sigma(|x_\iota|)$ で 集合 $\{\iota \in I : \lambda_\iota \notin \sigma_p(|x_\iota|)\}$ が可算ならば,

(i) $\xi_{0\iota} \in \mathcal{D}(u_\iota)$, $\sum \| |x_\iota| \xi_{0\iota} - \lambda_\iota \xi_{0\iota} \| < +\infty$ なる (x_ι) の reference vector $\{(\xi_{0\iota}), (\eta_{0\iota})\}$ が存在する;

(ii) $\xi \in \mathcal{D}(\otimes x_\iota)^{\varepsilon}$ に対し

$$(\otimes^{\varepsilon'\varepsilon} x_\iota)\xi = \lim_{J \subset\subset I} y_J \xi ,$$

ただし $w_\iota = u_\iota \xi_{0\iota} \otimes \overline{\xi_{0\iota}}$; $y_\iota = x_\iota$, $\iota \in J$ かつ $y_{\iota'} = \lambda_{\iota'} w_{\iota'}$, $\iota' \in J^c$;

1.ii

$y_j = \otimes^{c'c} y_\iota$; $(\eta_{0\iota}) \sim (u_\iota \xi_{0\iota}) \in C'$.

系 3.3. $\{(\xi_{0\iota}), (\eta_{0\iota})\}$ を (x_ι) の non zero reference vector とし $x_\iota \eta M_\iota$ とすれば, $\otimes^{cc}|x_\iota| \eta \otimes^c M_\iota$.

系 3.4. $\sum \| |x_\iota| \xi_\iota - \xi_\iota \| < +\infty$ なる (ξ_ι) が存在すれば, $\{\iota \in I : \lambda_\iota = 0\}$ が有限, $\{\iota \in I : \lambda_\iota \notin \sigma_p(|x_\iota|)\}$ が可算で $0 < \prod \{\lambda_\iota : \lambda_\iota \neq 0\} < +\infty$ となるような $\lambda_\iota \in \sigma(|x_\iota|)$ が存在する.

§4. 応用例 1.

$\mathfrak{A}_\iota$ を normalized identity 1_ι を持つ generalized Hilbert algebra $\mathfrak{A}_\iota$ の完備化で $(1_\iota) \in C$ とする.

定義. Generalized Hilbert algebra $\mathfrak{A}_\iota$, $\iota \in I$ の無限テンソル積を $\xi_\iota \in \mathfrak{A}_\iota$, $\{\iota \in I : \xi_\iota \neq 1_\iota\}$ は有限であるような $\otimes \xi_\iota \in \otimes^c \mathfrak{A}_\iota$ に involution と積

$$(\otimes \xi_\iota)^\# = \otimes \xi_\iota^\#, \quad (\otimes \xi_\iota)(\otimes \eta_\iota) = \otimes \xi_\iota \eta_\iota$$

を導入して得られる involutive algebra のこととし, $\otimes \mathfrak{A}_\iota$ で表わす.

$\mathcal{B}_\iota$ を modular automorphism $\Delta_\iota(\alpha)$ を持つ modular Hilbert algebra とし $\otimes \mathcal{B}_\iota$ 上の modular automorphism を

$$\Delta(\alpha)(\otimes \xi_\iota) = \otimes_\iota \Delta_\iota(\alpha) \xi_\iota$$

とすると $\Delta(\alpha)$ は $\otimes \mathcal{B}_\iota$ 上の modular automorphism である.

$\mathcal{H}$: Hilbert 空間

$B(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の有界作用素全体

$C(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の scalar 作用素全体

$\xi \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$: $\|\xi\| = 1$, $B(\mathcal{H}) \otimes C(\mathcal{H})$ に対し separating, cyclic とすると, ω_ξ により $B(\mathcal{H}) \otimes C(\mathcal{H})$ は generalized Hilbert algebra に成るのでそれを $\mathcal{O}\!\mathcal{C}$ とし, $B(\mathcal{H}) \otimes C(\mathcal{H})$ に対しても $\mathcal{O}\!\mathcal{C}$ の言葉を使う. ここで

$M_\iota = B(\mathcal{H}_\iota) \otimes C(\mathcal{H}_\iota)$, $\xi_\iota = \xi$

$M(\mathcal{H}, \xi) = \otimes^c M_\iota$, $(\xi_\iota) \in c$

とすると

命題. $j = 1, 2$ に対して Δ_j を $M(\mathcal{H}_j, \xi_j)$ の modular operator とする. もし Δ_1 と Δ_2 がユニタリー同値ならば, $M(\mathcal{H}_1, \xi_1)$ と $M(\mathcal{H}_2, \xi_2)$ は spacially に同型である.

§5. 応用例 2.

この節は単なるお話しである.

σ_ι と τ_ι を M_ι 上の faithful normal states としたとき稠密な定義域を持つ閉作用素 $h_\iota \eta M_\iota$ を

$$\sigma_\iota(x_\iota) = \tau_\iota(h_\iota^* x_\iota h_\iota), \quad x_\iota \in M_\iota$$

となるように選ぶ。(h_ι) の reference vector を $\{(\xi_{0\iota}),(\eta_{0\iota})\}$ とし $(\xi_{0\iota}) \in C$, $(\eta_{0\iota}) \in C'$ に対し $(C)=(C')$ と仮定する。もし $(\xi_{0\iota})$ が τ_ι の quasi characteristic vector ならば、$\otimes\sigma_\iota$ が存在して

$$(\otimes^{C'}\sigma_\iota)(\otimes^{C'C'}x_\iota) = (\otimes^{C}\tau_\iota)((\otimes^{C'C}h_\iota)^*(\otimes^{C'C'}x_\iota)(\otimes^{C'C}h_\iota))$$

がすべての $\otimes x_\iota \in \otimes M_\iota$ に対して成立する。

昨年の講演の中で補助定理3が間違っていることを荒木先生に指摘していただきました。それを使わないでも定理1の証明はできます [4]。

数理解析研究所での荒木先生の御指導と御好意に対して心から感謝致します。

補遺. $(\xi_{0\iota})$ は reference vector であるが、どんな $(\eta_{0\iota}) \in \Gamma_0$ を選んでも $\{(\xi_{0\iota}),(\eta_{0\iota})\}$ が reference vector に成らない場合には、自然な意味での閉作用素 $\otimes x_\iota$ の定義は困難である。

参考文献

[1] ARAKI, H., AND E. J. WOODS, A classification of factors. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 4 (1968), 51–130.

[2] KITAGAWA, S., AND Y. NAKAGAMI, Infinite tensor products of operators. To be prepared.

[3] NAKAGAMI, Y., Infinite tensor products of von Neumann algebras, I. Kōdai Math. Sem. Rep., 22 (1970), 341–354.

[4] NAKAGAMI, Y., A characterization of an infinite tensor products of von Neumann algebras. Unpublished.

[5] TAKESAKI, M., Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications. Springer-Verlag, (1970).

[6] TOMITA, M., Standard form's of von Neumann algebras. 第5回関数解析シンポジウム講究録. (1967).