数理解析研究所講究録
第 106 巻 1971 年 1-17

中性子輸送方程式の固有値問題
(Monoenergetic Neutron Transport Equation の場合)

京大 工 鵜飼正二

§1. 序

物質(媒質)と相互作用している中性子の集団的振舞は neutron transport equation によって記述される。ここではすべての中性子の速度は一定(monoenergy)という簡単な model について考察する。

D を3次元空間の bounded convex domain とし媒質が占める領域を表わすとする。D の点を $\mathfrak{x}=(x,y,z)$ で表わす。

$\mho$ を3次元空間の単位球面とする。$\mho$ の点を $\Omega=(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$ で表わす: $|\Omega|=\sqrt{\Omega_x^2+\Omega_y^2+\Omega_z^2}=1$。$\Omega$ は中性子の運動方向を表すものとする。

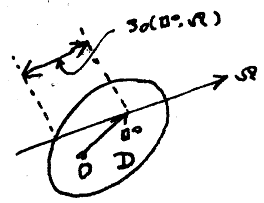
$\psi(\mathfrak{x},\Omega,t)$ を時刻 t に於ける点 $(\mathfrak{x},\Omega)$ での中性子密度とする。我々の考える transport eq. は次のものである。

$$(1\text{-}1)\quad \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathfrak{x},\Omega,t)=-\Omega\cdot\nabla\psi(\mathfrak{x},\Omega,t)-\sigma(\mathfrak{x})\psi(\mathfrak{x},\Omega,t)+\frac{c(\mathfrak{x})}{4\pi}\int_{\mho}\psi(\mathfrak{x},\Omega',t)\,d\Omega',$$

$$\mathfrak{x}\in D,\quad \Omega\in\mho.$$

ここに $\sigma(\mathbf{r}^0)$, $c(\mathbf{r}^0)$ は D上で可測, 有界, 非負なる関数, $\Omega\cdot\nabla = \Omega_x\frac{\partial}{\partial x} + \Omega_y\frac{\partial}{\partial y} + \Omega_z\frac{\partial}{\partial z}$ (Ω方向の微分), v は正定数である。

境界条件として通常物理的には次の条件が課せられる：媒質Dに外部から流入する中性子は存在しない。そこでまず



(1-2) $$s_0(\mathbf{r}^0,\Omega) = \inf\{s \mid \mathbf{r}^0 - s\Omega \notin D,\ s \geq 0\}.$$

と定義する。以下では $s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)$ は $G = D\times U$ で可測と仮定する。l を D の max. diameter とする。

(1-3) $$0 \leq s_0(\mathbf{r}^0,\Omega) \leq l.$$

そこで境界条件は次のようになる。

(1-4) $$\psi(\mathbf{r}^0 - s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)\Omega, \Omega, t) = 0 \quad \text{for } {}^\forall\mathbf{r}^0\in D,\ {}^\forall\Omega\in U.$$

$L^2(G)$ $(G = D\times U)$ で operator B を

(1-5) $$B\psi = -v\Omega\cdot\nabla\psi - v\sigma(\mathbf{r}^0)\psi + v\,c(\mathbf{r}^0)\int_U \psi(\mathbf{r}^0,\Omega')\,d\Omega'$$

で定義する。B の定義域 $\mathcal{D}(B)$ は $\psi\in L^2(G)$, $\Omega\cdot\nabla\psi\in L^2(G)$ かつ境界条件(1-4)を満す関数 $\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)$ から成るものとする。$\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)\in\mathcal{D}(B)$ は殆んどすべての Ω方向の直線上で $\mathbf{r}^0$ について絶対連続である。

Jörgens [1] は semi-group の理論を用い，初期値問題

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = B\psi,\quad \psi(\mathbf{r}^0,\Omega,t=0) = \psi_0(\mathbf{r}^0,\Omega)\ \text{(given)}$$

が $L^2(G)$ で well-posed であること，かつ solution operator $E(t)$ が $t \geq {}^\exists t_0 > 0$ で compact であることを示し，これより operator B の

$L^2(G)$ 上での spectrum について次の結果を得た。

定理 1 (Jörgens [1])

1) B の spectrum は discrete eigenvalue より成り, half plane $\{\lambda \mid \mathrm{Re}\,\lambda \leq {}^{\exists}K\}$ にあり, 任意の strip $\{\lambda \mid \alpha_1 \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq \alpha_2\}$ で有限個。

2) すべての固有値の generalized eigenspace は有限次元。

3) $c(x^0) \not\equiv 0$ in D ならば B の固有値は存在する。

4) すべての固有関数は有界関数である。

ここでは次の定理を証明する。

定理 2.

次のような定数 $\sigma \geq 0$, $c > 0$ かつ領域 $D_0 \subset D$ が存在するとする。

(1) $\mathrm{mes}\, D_0 \neq 0$,

(2) $\sigma(x^0) = \sigma$ for ${}^{\forall}x^0 \in D_0$,

(3) $c(x^0) \geq c$ for ${}^{\forall}x^0 \in D_0$,

この時 operator B は可算無限個の実固有値を持つ。

尚 B は complex eigenvalue をも持つのであるがその個数や分布に関しては未解決である。

§2. 準備

λ を B の固有値, $\psi(x^0, \Omega) \in \mathcal{D}(B)$ をその固有関数とする。

(2-1) $$\varphi(x^0) \equiv \int_U \psi(x^0, \Omega)\, d\Omega$$

とおく。$\psi \in L^2(G)$ だから $\psi \in L^2(D)$ は明らか。D は有界だから $\in L^1(D)$ でもある。$B\psi = \lambda\psi$ より

(2-2) $$\Omega\cdot\nabla\psi(r^0,\Omega) + \left(\frac{\lambda}{v} + \sigma(r^0)\right)\psi(r^0,\Omega) = \frac{c(r^0)}{4\pi}\varphi(r^0) ,$$

$\Omega\cdot\nabla$ は Ω の方向の微分であるから,

$$-\frac{\partial}{\partial s}\psi(r^0 - s\Omega, \Omega) + \left(\frac{\lambda}{v} + \sigma(r^0 - s\Omega)\right)\psi(r^0 - s\Omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi}c(r^0 - s\Omega)\varphi(r^0 - s\Omega).$$

そこで

(2-3) $$\tau_\lambda(r^0, \Omega, s) = \frac{\lambda}{v}s + \int_0^s \sigma(r^0 - s'\Omega)ds'$$

と置くと

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-\tau_\lambda(r^0,\Omega,s)}\psi(r^0 - s\Omega, \Omega)\right) = -\frac{1}{4\pi}e^{-\tau_\lambda(r^0,\Omega,s)}c(r^0 - s\Omega)\varphi(r^0 - s\Omega)$$

これを s について 0 から $s_0(r^0,\Omega)$ まで積分し, 境界条件(1-4)を考慮すれば,

(2-4) $$\psi(r^0,\Omega) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0(r^0,\Omega)} e^{-\tau_\lambda(r^0,\Omega,s)}c(r^0 - s\Omega)\varphi(r^0 - s\Omega)ds ,$$

これを U 上で積分し, (2-1)を用いれば

(2-5) $$\varphi(r^0) = \frac{1}{4\pi}\int_U d\Omega \int_0^{s_0(r^0,\Omega)} e^{-\tau_\lambda(r^0,\Omega,s)}c(r^0 - s\Omega)\varphi(r^0 - s\Omega)ds$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{-\tau_\lambda(r^0,r^{0\prime})}}{|r^0 - r^{0\prime}|^2}c(r^{0\prime})\varphi(r^{0\prime})dr^{0\prime}$$

ここで変数変換 $r^0 - s\Omega = r^{0\prime}$ を行った。又

(2-6) $$\tau_\lambda(r^0, r^{0\prime}) \equiv \tau_\lambda\left(r^0, \frac{r^0 - r^{0\prime}}{|r^0 - r^{0\prime}|}, |r^0 - r^{0\prime}|\right) = \frac{\lambda}{v}|r^0 - r^{0\prime}| + \int_0^{|r^0 - r^{0\prime}|}\sigma\left(r^0 - s'\frac{r^0 - r^{0\prime}}{|r^0 - r^{0\prime}|}\right)ds'.$$

逆に(2-5)の任意の解 $\varphi(\mathbf{r}^0)\in L^2(D)$ を用いて，(2-4)の右辺により $\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)$ を定義しよう。

$$(2\text{-}7)\qquad \psi(\mathbf{r}^0,\Omega)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)} e^{-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}c(\mathbf{r}^0-s\Omega)\varphi(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,ds$$

この $\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)$ は殆んどすべての点 $(\mathbf{r}^0,\Omega)\in G$ で意味を持ちかつ $\in L^2(G)$ である。以下その証明。まず変数変換 $\mathbf{r}^0-s\Omega=\mathbf{r}^{0\prime}$ によって

$$\int_D\frac{d\mathbf{r}^{0\prime}}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0\prime}|^2}=\int_U d\Omega\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)}ds\le 4\pi l\ <+\infty$$

が得られる。従って $\forall\varphi\in L^2(D)$ に対し，$\varphi\in L^1(D)$ でもあるから

$$\iint_{D\times D}\frac{|\varphi(\mathbf{r}^{0\prime})|}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0\prime}|^2}d\mathbf{r}^0d\mathbf{r}^{0\prime}\le 4\pi l\int_D|\varphi(\mathbf{r}^{0\prime})|\,d\mathbf{r}^{0\prime}\ <+\infty$$

よって Fubini の定理より

$$\iint_{D\times D}\frac{\varphi(\mathbf{r}^{0\prime})}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0\prime}|^2}d\mathbf{r}^0d\mathbf{r}^{0\prime}=\int_D d\mathbf{r}^0\int_U d\Omega\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)}\varphi(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,ds,$$

即ち積分

$$\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)}\varphi(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,ds$$

は殆んどすべての $(\mathbf{r}^0,\Omega)\in G$ で意味を持つ。これが $\in L^2(G)$ であることは容易に示せる。$\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)$ についても同様。(証明終り)。

さて $s_0(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega)=s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)-s$，$\tau_\lambda(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega,s'-s)=\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s')-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)$ を考慮すれば，(2-7)より，

$$\psi(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega)=\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega)}e^{-\tau(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega,s')}c(\mathbf{r}^0-s''\Omega)\varphi(\mathbf{r}^0-s''\Omega)\,ds',\quad s''=s+s'$$

$$=e^{\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}\int_s^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)}e^{-\tau_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s')}c(\mathbf{r}^0-s'\Omega)\varphi(\mathbf{r}^0-s'\Omega)\,ds'.$$

右辺の積分は s に関する可積分関数の積分だから s について絶対連続，$T_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)$ についても同様なことは定義 (2-3) を見れば明らか。従って $\psi(\mathbf{r}^0-s\Omega,\Omega)$ は s について絶対連続，微分すれば $\varphi(\mathbf{r}^0)$ が (2.5) を満すこと及び (2-7) を用いれば (2-2) 即ち $B\psi=\lambda\psi$ を得る。以上によって次の Lemma が証明出来た。

Lemma 2-1. λ を B の固有値，$\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)\in\mathcal{D}(B)$ をその固有関数，

$$\varphi(\mathbf{r}^0)\equiv\int_{\mho}\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)\,d\Omega$$

とすると，$\varphi(\mathbf{r}^0)\in L^2(D)$ かつ次の積分方程式を満す。

$$(2\text{-}8)\qquad \varphi(\mathbf{r}^0)=\frac{1}{4\pi}\int_D\frac{e^{-T_\lambda(\mathbf{r}^0,\mathbf{r}^{0'})}}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0'}|^2}\underset{C(\mathbf{r}^{0'})}{\wedge}\varphi(\mathbf{r}^{0'})\,d\mathbf{r}^{0'}$$

逆にこの積分方程式の任意の解 $\varphi\in L^2(D)$ に対し

$$\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0(\mathbf{r}^0,\Omega)}e^{-T_\lambda(\mathbf{r}^0,\Omega,s)}\,c(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,\varphi(\mathbf{r}^0-s\Omega)\,ds$$

で定義される $\psi(\mathbf{r}^0,\Omega)$ は $\in\mathcal{D}(B)$ かつ $B\psi=\lambda\psi$ を満す。

そこで operator G_λ を

$$(2\text{-}9)\qquad (G_\lambda\varphi)(\mathbf{r}^0)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_D c_1(\mathbf{r}^0)\frac{e^{-T_\lambda(\mathbf{r}^0,\mathbf{r}^{0'})}}{|\mathbf{r}^0-\mathbf{r}^{0'}|^2}c_1(\mathbf{r}^{0'})\varphi(\mathbf{r}^{0'})\,d\mathbf{r}^{0'},\quad \mathbf{r}^0\in D$$

$$c_1(\mathbf{r}^0)=\sqrt{c(\mathbf{r}^0)}$$

と定義する。

Lemma 2-2 λ を任意の complex number とする。G_λ は $L^2(D)$ 上の compact operator である。

証明）例えば Mikhlin [2] p.32 を見よ。

そこで λを parameter と見做し G_λの固有値問題を考える:

$$\rho\varphi = G_\lambda\varphi \quad , \quad \varphi\in L^2(D)$$

明らかに固有値 ρ は λの関数である。$\rho=\rho(\lambda)$。従って Lemma 2-1 より $B\psi=\lambda\psi$ を解くことは $\rho(\lambda)=1$ なる λを求めることになる。

以下我々は B の real eigenvalue のみを考察する。従って以下では λは real である。容易に次のことが証明出来る。

$$T_\lambda(x^0, x^{0\prime}) = T_\lambda(x^{0\prime}, x^0) \text{。}$$

従って次のことが成立つ。

Lemma 2-3. λが real ならば G_λは self-adjoint である。

従って G_λの固有値 $\rho(\lambda)$ は real, その集積点は(もしあるとすれば) $\rho=0$ のみである。我々の目的は $\rho(\lambda)=1$ を解くことにある。従って正の固有値 ρのみに興味がある。G_λの正の固有値を大きいものから順に番号を附す。

$$\rho_1(\lambda)\ge\rho_2(\lambda)\ge\cdots\ge\rho_n(\lambda)\ge\cdots\ge 0$$

Lemma 2-4. $\rho_n(\lambda)$ $(\neq 0)$ は λの連続関数である。

証明) 良く知られた定理(例えば Zaanen [3], p.426)により

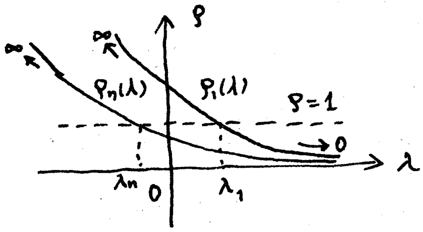
$$|\rho_n(\lambda)-\rho_n(\lambda')| \le \|G_\lambda - G_{\lambda'}\|$$

一方 $\lambda'\to\lambda$ ならば 右辺は $\to 0$ であることが容易に示せる(証略)。

そこで $\rho_n(\lambda)$ のグラフを描き, これと直線 $\rho=1$ との交点を求めれば それより Bの固有値 λが求まる。(Graph method)。

以下では任意の λ に対し 正の固有値 $\rho_n(\lambda)$ の個数は

無限個，かつ各 $\rho_n(\lambda)$ は概ね右図のような様子であることを証明する。



そのためには以下で多くの積分作用素の正の固有値を min-max 定理（Courant-Hilbert [4]）によって比較することになる。

Min-Max 定理 [4]. $\mathcal{H}$ を Hilbert space, Q を $\mathcal{H}$ 上の compact, self-adjoint operator とする。$v_1, v_2, \cdots, v_{n-1} \in \mathcal{H}$ を任意とにて

$$m(v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}; Q) = \max \frac{(Q\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2}, \quad \varphi \in \mathcal{H}, \ (\varphi, v_i) = 0, \ 0 < i \leq n-1,$$

と定義すると，Q の n 番目の正の固有値 $\mu_n(Q)$ は次式で与えられる。

$$\mu_n(Q) = \min_{\{v_1, v_2, \cdots v_{n-1}\}} m(v_1, v_2, \cdots v_{n-1}; Q) .$$

§3 $\lambda \geq -\nu_0$ での $\rho_n(\lambda)$ の性質

Lemma 3-1. $\rho_n(\lambda) \longrightarrow 0 \ (\lambda \to \infty)$, for each n が成立つ。

証明） $c(x^0)$ は仮定により有界：

$$0 \leq c(x^0) \leq {}^\exists c_0$$

更に $\lambda > 0$ とすれば

$$\int_D \frac{e^{-\tau_\lambda(x^0, x^{0\prime})}}{|x^0 - x^{0\prime}|^2} dx^{0\prime} \leq \int_D \frac{e^{-\lambda|x^0 - x^{0\prime}|}}{|x^0 - x^{0\prime}|^2} dx^{0\prime} \leq \int_{R^3} \frac{e^{-\lambda|x^0 - x^{0\prime}|}}{|x^0 - x^{0\prime}|^2} dx^{0\prime} = 4\pi \int_0^\infty e^{-\lambda r} dr = \frac{4\pi}{\lambda}$$

が成立つ。従って ${}^\forall \varphi \in L^2(D)$ に対し，Schwartz より

$$|G_\lambda \varphi|^2 \leq \left(\frac{c_0}{4\pi}\right)^2 \int_D \frac{e^{-\lambda|x^0 - x^{0\prime}|}}{|x^0 - x^{0\prime}|^2} dx^{0\prime} \int_D \frac{e^{-\lambda|x^0 - x^{0\prime}|}}{|x^0 - x^{0\prime}|^2} |\varphi(x^{0\prime})|^2 dx^{0\prime} \leq$$

$$\leq \left(\frac{c_0}{4\pi}\right)^2 \frac{4\pi}{\lambda} \int_D \frac{e^{-\lambda|x^0-x^{0\prime}|}}{|x^0-x^{0\prime}|^2} |\varphi(x^{0\prime})|^2 dx^{0\prime} .$$

これより

$$\|G_\lambda \varphi\| \leq \left(\frac{c_0}{\lambda}\right) \|\varphi\|$$

が成立つ。即ち $\|G_\lambda\| \leq (c_0/\lambda) \to 0 \ (\lambda \to \infty)$。（証明終り）。

さて定理2の条件の領域 D_0 を考える。D_0 の中に半径 a の球 K をとる（これは可能）。$K \subset D_0 \subset D$. operator G_λ の積分核を $G_\lambda(x^0, x^{0\prime})$ と書く。

$$G_\lambda(x^0, x^{0\prime}) = \frac{1}{4\pi} c_1(x^0) \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x^0 - x^{0\prime}|}}{|x^0-x^{0\prime}|^2} c_1(x^{0\prime}) \tag{3-1}$$

そこで operator E_λ を積分核

$$E_\lambda(x^0, x^{0\prime}) = \begin{cases} G_\lambda(x^0, x^{0\prime}) & ; x^0, x^{0\prime} \in K \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases} \tag{3-2}$$

で定義する。明らかに E_λ は $L^2(D)$（従って $L^2(K)$）で compact. self-adjoint である。$\mu_n(E_\lambda)$ を E_λ の n 番目の正の固有値とする。

Lemma 3-2 $\quad \rho_n(\lambda) \geq \mu_n(E_\lambda)$ for each n が $-\infty < \lambda < \infty$ で成り立つ。

証明）Min-Max 定理を使う。まず

$$m'(v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}; G_\lambda) = \max_{\substack{\varphi \in L^2(D) \\ (\varphi, v_i)=0,\ i=1,\cdots n-1 \\ \varphi = 0 \text{ for } x^0 \notin K}} \frac{(G_\lambda\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2}$$

と定義すると，max の定義より

$$m(v_1, v_2, \cdots v_{n-1}; G_\lambda) \geq m'(v_1, v_2, \cdots v_{n-1}; G_\lambda)$$

は明らか。よって Min-Max 定理より

(3-3) $p_n(\lambda)=\mu_n(G_\lambda)=\min\limits_{(v_1,\cdots v_{n-1})} m(v_1,\cdots v_{n-1};G_\lambda)\geq \min\limits_{(v_1,\cdots v_{n-1})} m'(v_1,\cdots v_{n-1};G_\lambda)$

ところで $\varphi(x^0)\equiv 0$ for $x^0\notin K$ とすれば, $(G_\lambda\varphi,\varphi)=(E_\lambda\varphi,\varphi)$ であるから (3-3) の最後の項は $\mu_n(E_\lambda)$ に等しい (証明終り)。

さて $x^0\in K$ とすると定理2の条件2によって $c_1(x^0)\geq\sqrt{c}$, 条件3によって $\tau_\lambda(x^0,x^{0\prime})=(\frac{\lambda}{v}+\sigma)|x^0-x^{0\prime}|$, $(x^{0\prime}\in K)$, が成立つことに着目して operator F_λ を積分核

(3-4) $$F_\lambda(x^0,x^{0\prime})=\frac{c}{4\pi}\frac{e^{-(\frac{\lambda}{v}+\sigma)|x^0-x^{0\prime}|}}{|x^0-x^{0\prime}|^2}\quad ;\ x^0,x^{0\prime}\in K$$

で定義する。明らかに F_λ は $L^2(K)$ で compact, self-adjoint である。

Lemma 3-3. $\mu_n(E_\lambda)\geq\mu_n(F_\lambda)$ for each n が $-\infty<\lambda<\infty$ で成立つ。

証明) $\forall\varphi\in L^2(K)$ に対し $\psi(x^0)=c_1(x^0)\varphi(x^0)$ と置く。明らかに $\|\varphi\|^2\leq\|\psi\|^2/c$ が成立つ。従って (3-2) と (3-4) を比較すれば

$$\frac{(E_\lambda\varphi,\varphi)}{\|\varphi\|^2}=\frac{1}{c}\frac{(F_\lambda\psi,\psi)}{\|\varphi\|^2}\geq\frac{(F_\lambda\psi,\psi)}{\|\psi\|^2}$$

を得る。最後の不等号は $(F_\lambda\psi,\psi)\geq 0$ の時成立つ。φ が $L^2(K)$ を動く時 ψ もやはり $L^2(K)$ 全体を動く ($0<\sqrt{c}\leq c_1(x^0)\leq\sqrt{c_0}<+\infty$, $x^0\in K$ だから)。従って Min-Max 定理より Lemma が得られる。

Lemma 3-4. $\lambda\geq -v\sigma$ とする。この時 F_λ の固有値はすべて正, かつ可算無限個である。

証明）$(F_\lambda\varphi,\varphi)\geq 0$ for $^\forall\varphi\in L^2(K)$ かつ $F_\lambda\varphi\equiv 0\Rightarrow\varphi\equiv 0$ を示す。それには Lehner-Wing [5] の方法を 3次元空間に拡張すればよい。$w=(w_1,w_2,w_3)\in R^3$ とし，Fourier 変換

$$\hat{\varphi}(w)\equiv\int_K e^{iw\cdot r^0}\varphi(r^0)dr^0$$

$$(\widetilde{F_\lambda\varphi})(w)\equiv\int_{R^3} e^{-iw\cdot r^0}(F_\lambda\varphi)(r^0)dr^0$$

を定義する。$e^{-\alpha|r^0|}/|r^0|^2\in L^1(R^3)$ $(\alpha>0)$ であるから，簡単な計算により

$$(\widetilde{F_\lambda\varphi})(w)=\frac{c}{|w|}\tan^{-1}\frac{|w|}{\frac{\lambda}{v}+\sigma}\,\hat{\varphi}(w)\quad,\quad\lambda>-v\sigma$$

を得る。但し $|w|=\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}$．Fourier 変換に対する parseval の等式から

(3-5) $$(F_\lambda\varphi,\varphi)=c\int_{R^3}\frac{1}{|w|}\tan^{-1}\frac{|w|}{\frac{\lambda}{v}+\sigma}\,|\hat{\varphi}(w)|^2dw.$$

$\lambda>-v\sigma$ であるからこの被積分関数 ≥ 0 だから，$(F_\lambda\varphi,\varphi)\geq 0$ を得る。更に $F_\lambda\varphi\equiv 0$ とすると (3-5) より $\hat{\varphi}(w)\equiv 0$ でなければならない。即ち $\varphi(r^0)\equiv 0$ を得る。（証明終り）

以上の Lemma 3-2〜4 より次の Lemma が従う。

Lemma 3-5. $\lambda>-v\sigma$ とする。G_λ は可算無限個の正の固有値を持つ。

§4　$\lambda \leq -\nu\sigma$ での $p_n(\lambda)$ の性質

$\lambda \leq -\nu\sigma$ の時，F_λ は正値でないのですこし複雑になる。まず $\beta = -\left(\frac{\lambda}{\nu}+\sigma\right)$ とおく。今の場合 $\beta \geq 0$。$R_\beta = \{u=(u_1,u_2,u_3)\,;\ |u| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \leq \beta\}$ なる球（$\subset R^3$）を考える。次式が成立つ

$$(4\text{-}1)\quad F_\lambda(n^0,n^{0\prime}) = \frac{c}{4\pi}\int_{R_\beta} \cosh(n^0-n^{0\prime})\cdot u \,\frac{du}{|u|} + \frac{1}{|n^0-n^{0\prime}|^2}\left(2-e^{-\beta|n^0-n^{0\prime}|}\right)$$

$$\equiv F_\lambda^{(1)}(n^0,n^{0\prime}) + F_\lambda^{(2)}(n^0,n^{0\prime}) \quad ;\quad n^0, n^{0\prime} \in K .$$

operator $F_\lambda^{(1)}$, $F_\lambda^{(2)}$ は $L^2(K)$ で共に compact, self-adjoint であること，及び $F_\lambda = F_\lambda^{(1)} + F_\lambda^{(2)}$ であることは明らかである。

Lemma 4-1. $\lambda \leq -\nu\sigma$ に対し，即ち $\beta \geq 0$ に対し

$$\mu_n(F_\lambda) \geq \mu_n(F_\lambda^{(1)}) \quad \text{for each } n .$$

証明）Lemma 3-4 と同様の方法で operator $F_\lambda^{(2)}$ は正値であることがわかる。（証明終り）。

ここで n^0 の原点を球 K の中心に選ぶ（一般性は失なわない）。

$$(4\text{-}2)\quad \cosh(n^0-n^{0\prime})\cdot u = \cosh n^0\cdot u \cosh n^{0\prime}\cdot u - \sinh n^0\cdot u \sinh n^{0\prime}\cdot u$$

に着目して次のように定義する。

$$(4\text{-}3)\quad H_{\beta c}(n^0,n^{0\prime}) = \frac{c}{4\pi}\int_{R_\beta} \cosh n^0\cdot u \cosh n^{0\prime}\cdot u \,\frac{du}{|u|}$$

$$(4\text{-}4)\quad H_{\beta s}(n^0,n^{0\prime}) = \frac{c}{4\pi}\int_{R_\beta} \sinh n^0\cdot u \sinh n^{0\prime}\cdot u \,\frac{du}{|u|}$$

但し $n^0, n^{0\prime} \in K$ とする。operator $H_{\beta c}$, $H_{\beta s}$ は $L^2(K)$ 上で compact

かつ self-adjoint である。又 $F_\lambda^{(1)} = H_{\beta c} - H_{\beta s}$.

Lemma 4-2. Operator $H_{\beta c}$ は可算無限個の正の固有値を持つ。

証明) $\varphi \in L^2(K)$, $\varphi(\theta^0) = \varphi(-\theta^0)$ なる関数の全体を $L^2_c(K)$ と書く。明らかにこれは $L^2(K)$ の部分空間かつ無限次元である。更に $\forall \varphi \in L^2_c(K)$, $\varphi \not\equiv 0$ に対し (4-3) より

$$(4\text{-}5) \qquad (H_{\beta c}\varphi, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_{R_\beta} \frac{1}{|u|}\left|\int_K \cosh \theta^0 \cdot u \, \varphi(\theta^0)\, d\theta^0\right|^2 du > 0$$

を得る(証明終り)。

Lemma 4-3. $\mu_n(F_\lambda^{(1)}) = \mu_n(H_{\beta c})$ for each n.

証明) $F_\lambda^{(1)} = H_{\beta c} - H_{\beta s}$ より $H_{\beta c} H_{\beta s} = H_{\beta s} H_{\beta c} = 0$ であれば よい。ところで

$$\int_K H_{\beta c}(\theta^0, \theta^{0\prime\prime}) H_{\beta s}(\theta^{0\prime\prime}, \theta^{0\prime})\, d\theta^{0\prime\prime} = \int_{R_\beta} \frac{1}{|u|} \cosh \theta^0 \cdot u \, du \int \frac{1}{|u|} \cosh \theta^{0\prime} \cdot u' du'$$
$$\times \left[\int_K \cosh \theta^{0\prime\prime} \cdot u \sinh \theta^{0\prime\prime} \cdot u' \, d\theta^{0\prime\prime}\right].$$

右辺の $[\cdots] \equiv 0$ for $\forall u, u' \in R_\beta$ である(証明終り)。

従って Lemma 3-2, 3-3, 4-1, 4-3 より $\lambda \leqq -\nu\sigma$ $(\beta > 0)$ の時

$$(4\text{-}6) \qquad \rho_n(\lambda) \geq \mu_n(E_\lambda^{(\cdot)}) \geq \mu_n(F_\lambda) \geq \mu_n(F_\lambda^{(1)}) = \mu_n(H_{\beta c}).$$

を得る。Lemma 4-2 によって $\mu_n(H_{\beta c}) \neq 0$ for each n, よって次の Lemma を得る。

Lemma 4-4 G_λ $(\lambda \leqq -\nu\sigma)$ は無限個の正の固有値 $\rho_n(\lambda)$

を持つ。

最後に $\rho_n(\lambda)\to\infty$ $(\lambda\to-\infty)$ for each n を証明する。

まず $\gamma=\beta a$ とおく。a は K の半径であった。(4-3) で $u\to\gamma u$ とおきなおせば

(4-7) $$H_{\beta c}(w^\circ,w^{\circ\prime})=\frac{c}{4\pi}\gamma^2\int_K \cosh\gamma w^\circ\cdot u\,\cosh\gamma w^{\circ\prime}\cdot u\,\frac{du}{|u|}\ .$$

そこで

(4-8) $$I_\gamma(w^\circ,w^{\circ\prime})=\frac{c}{4\pi a}\int_K \cosh\gamma w^\circ\cdot u\,\cosh\gamma w^{\circ\prime}\cdot u\,du\,;\ w^\circ,w^{\circ\prime}\in K.$$

によって operator I_γ を定義する。明らかに compact, self-adjoint on $L^2(K)$.

Lemma 4-5. $\mu_n(H_{\beta c})\ge\gamma^2\mu_n(I_\gamma)$ for each n.

証明) $|u|\le a$ for $u\in K$ だから, $\forall\varphi\in L^2(K)$ に対し

$$((H_{\beta c}-\gamma^2 I_\gamma)\varphi,\varphi)=\frac{c}{4\pi}\gamma^2\int_K\left(\frac{1}{|u|}-\frac{1}{a}\right)\left|\int_K\cosh\gamma w^\circ\cdot u\,\varphi(w^\circ)\,dw^\circ\right|^2du\ge 0$$

従って Min-Max 定理より明らか。(証明終り)

Lemma 4-6. I_γ $(\gamma>0)$ は無限個の正の固有値を持つ。

証明) Lemma 4-2 と同様に出来る(証明終り)。

さて operator T_γ を

(4-9) $$T_\gamma(w^\circ,w^{\circ\prime})=\cosh\gamma w^\circ\cdot w^{\circ\prime}\ ;\quad w^\circ,w^{\circ\prime}\in K$$

によって定義すれば，(4-8) より，

$$(4\text{-}10) \qquad I_\gamma = \frac{c}{4\pi a} T_\gamma^{\,2}$$

が従う。T_γ は compact, self-adjoint on $L^2(K)$.

Lemma 4-7. T_γ の固有値はすべて負でない。

証明) (4-9) を展開する。

$$(4\text{-}11) \qquad T_\gamma(\mathfrak{x}^0, \mathfrak{x}^{0\prime}) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{2n} \frac{(\mathfrak{x}^0 \cdot \mathfrak{x}^{0\prime})^{2n}}{(2n)!}$$

そこで operator S_n を

$$(4\text{-}12) \qquad S_n(\mathfrak{x}^0, \mathfrak{x}^{0\prime}) = (\mathfrak{x}^0 \cdot \mathfrak{x}^{0\prime})^{2n} \ ; \quad \mathfrak{x}^0, \mathfrak{x}^{0\prime} \in K$$

によって定義するとこれは compact, self-adj. on $L^2(K)$. かつ

$$(4\text{-}13) \qquad T_\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2n}}{(2n)!} S_n$$

が成立つ（一様収束）。ところで $\mathfrak{x}^0 = (x, y, z)$, $\mathfrak{x}^{0\prime} = (x', y', z')$ とおけば $^\forall \varphi \in L^2(K)$ に対して，$C_{i,j,k}$ を正定数として

$$(S_n \varphi, \varphi) = \sum_{i+j+k=2n} C_{i,j,k} \left| \int_K x^i y^j z^k \varphi(\mathfrak{x}^0) d\mathfrak{x}^0 \right|^2 \geq 0$$

が成立つ。よって S_n は正値。(4-13) より T_γ も正値である（証明終り）。

Lemma 4-8. $\mu_n(I_\gamma) = \frac{c}{4\pi a}\{\mu_n(T_\gamma)\}^2$ for each n.

証明) (4-10)及び Lemma 4-7 より明らか(証明終り).

Lemma 4-9. $\gamma \geq \gamma' > 0$ ならば

$$\mu_n(T_\gamma) \geq \mu_n(T_{\gamma'}) \quad \text{for each } n.$$

証明) (4-13) 及び Lemma 4-7 より

$$T_\gamma - T_{\gamma'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2n} - \gamma'^{2n}}{(2n)!} S_n \geq 0$$

が従う(証明終り)。

従って (4-6), Lemma 4-5, 8, 9 より次式を得る。

(4-14)
$$\rho_n(\lambda) \geq \mu_n(H_{\beta c}) \geq \gamma^2 \mu_n(I_\gamma) \geq \frac{c}{4\pi a}\gamma^2\{\mu_n(T_\gamma)\}^2 \geq$$
$$\geq \frac{c}{4\pi a}\gamma^2\{\mu_n(T_{\gamma'})\}^2.$$
$$\left(\beta = \gamma a,\ \gamma \geq \gamma' > 0,\ -\beta = \frac{\lambda}{v} + \sigma\right)$$

ところで Lemma 4-6 と 4-8 より $\mu_n(T_{\gamma'}) \neq 0$ for $\forall n > 0, \forall \gamma' > 0$。

よって (4-14) で $\gamma' > 0$ を fix し, $\gamma \to \infty$ $(\lambda \to -\infty)$ とすれば結局

Lemma 4-10. $\rho_n(\lambda) \to \infty \ (\lambda \to -\infty)$ for each n.

以上より次のことがわかった。

(1) G_λ は $-\infty < \lambda < \infty$ なる各 λ に対し無限個の正の固有値 $\rho_n(\lambda)$ を持つ。各 $\rho_n(\lambda)$ は $-\infty < \lambda < \infty$ で連続.

(2) $\rho_n(\lambda) \to 0 \ (\lambda \to \infty)$, $\rho_n(\lambda) \to \infty \ (\lambda \to -\infty)$ for each n.

従って方程式 $\rho_n(\lambda) = 1$ は $-\infty < \lambda < \infty$ に少くとも1つの根 λ_n を持つ。(1)より λ_n の個数は無限個, λ_n は B の固有値。従って

§1の定理2が証明出来た。

Operator B は real eigenvalue の外に complex eigenvalue を持つのであるがその個数や分布は未解決である。

尚 $\sigma(\mathbf{x}^0)$, $c(\mathbf{x}^0)$ が共に D で定数の場合については既に[6]で同じ結果を得ている。発表の際はこの場合について述べた。

References

[1] Jörgens. K. ; CPAM, 11, 209(1958)

[2] Mikhlin. S. G. ; "Multi-dimensional Singular Integrals and Integral Equations". Pergamon (1965)

[3] Zaanen. A. C. ; "Linear Analysis" North Holland (1953)

[4] Courant. R., Hilbert. D. ; "Method of Math. Phys". vol. 1. Interscience, (1953)

[5] Wing. G. M. ; "An Introduction to Transport Theory" p.93 John-Wiley (1962)

[6] Ukai. S. ; J. Nucl. Sci. Tech. 3, 263(1966)