数理解析研究所講究録
第106巻 1971年 88-92

縮退した半線型方程式系の iteration による非負解の構成について

九大・工・(応用理学)　大内 忠

§1.

非線型放物型方程式に対しては，sup norm による評価が得られ，それによって Cauchy 問題の大域解の存在が示せる場合がある。

Mimura [2] において，ある種の化学反応方程式系に対して，差分法を用いることにより非負解の大域的存在が示された。以下において，この方程式系の非負大域解を iteration とアプリオリ評価を用いることにより構成する。放物型方程式の基本解，その性質等が重要な役割を演ずる。ここで用いた方法は，境界条件をつけた場合にも ~~[illegible]~~ 使える。

簡単のため境界条件なしの Cauchy 問題について，その概略を示す。

§2

考察する初期値問題は {(I.V.P.) と略記する}

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 - d_1 u_1 u_4 - d_2 u_1 u_3$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 - d_3 u_2 u_4 + d_2 u_1 u_3$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \qquad d_3 u_2 u_4 - d_2 u_1 u_3$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} = \qquad - d_1 u_1 u_4 - d_3 u_2 u_4$$

d_i は非負の定数

$u_i\ (x, +0) = \varphi_i(x) \qquad (x, t) \in R^n \times [0, \infty)$

まず，初期条件に対する仮定は $\varphi_i(x) \geq 0$ かつ有界，$\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ 局所 Hölder 連続。(*)

非負解を構成する iteration

第0近似

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial t} = \Delta u_1^0$$

$$\frac{\partial u_2^0}{\partial t} = \Delta u_2^0 \qquad\qquad u_i^0(x, +0) = \varphi_i(x)$$

$$\frac{\partial u_3^0}{\partial t} = \frac{\partial u_4^0}{\partial t} = 0$$

$\varphi_i(x)$ $(i=3,4)$ の Hölder 連続性は，積分方程式の解が微分方程式の解となるための条件。また有界な解を考える。

第 n 近似 $(n \geq 1)$

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial t} = \Delta u_1^n - d_1 u_1^n u_4^{n-1} - d_2 u_1^n u_3^{n-1} \qquad (I_n - 1)$$

$$\frac{\partial u_2^n}{\partial t} = \Delta u_2^n - d_3 u_2^n u_4^{n-1} + d_2 u_1^n u_3^{n-1} \qquad (I_n - 2)$$

$$\frac{\partial u_3^n}{\partial t} = d_3 u_2^{n-1} u_4^n - d_2 u_1^{n-1} u_3^n \qquad (I_n - 3)$$

$$\frac{\partial u_4^n}{\partial t} = -d_1 u_1^{n-1} u_4^n - d_3 u_2^{n-1} u_4^n \qquad (I_n - 4)$$

$$u_i^n(x, +0) = \varphi_i(x)$$

近似列 $\{u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n\}$ について次のことが成り立つ

lemma 2-1

$u_i^n(x,t)$ はすべて非負有界である。すなわち

$$\sum_{i=1}^{4} \sup_x |u_i^n(x,t)| \leq 2 \sum_{i=1}^{4} \sup_x |\varphi_i(x)|$$

$(I_n-1) \sim (I_n-4)$ を基本解 $U(t, x, y) = \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi t})^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ を

用いて、積分方程式に直すと、

$$u_1^n = e^{t\Delta}\varphi_1 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(d_1 u_1^n u_4^{n-1} + d_2 u_1^n u_3^{n-1})\,ds$$

$$u_2^n = e^{t\Delta}\varphi_2 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(d_3 u_2^n u_4^{n-1} - d_2 u_1^n u_3^{n-1})\,ds$$

$$u_3^n = \varphi_3 + \int_0^t (d_3 u_2^{n-1} u_4^n - d_2 u_3^{n-1} u_3^n)\, ds$$

$$u_4^n = \varphi_4 - \int_0^t (d_1 u_1^{n-1} u_4^n + d_3 u_2^{n-1} u_4^n)\, ds$$

ここで $e^{t\Delta} g = \int_{R^n} U(t, x, y)\, g(y)\, dy$

difference $u_i^{n+1} - u_i^n$ を評価することにより（lemma 2.1を用いる）と

lemma 2-2

$u_i^n(x, t)$ は $R^n \times [0, T_0]$　$T_0 = \dfrac{1}{18kM}$ で一様収束する。　$k = \max(d_1, d_2, d_3)$　$M = \sum_{i=1}^{4} \sup_x |\varphi_i(x)|$

また次のことも成りたつ

lemma 2-3

(I.V.p) の有界な解は一意である

lemma 2-4

(I.V.p) の nonnegative solution に対して次のアプリオリ評価が成りたつ。　もし解が $t \in [0, T]$ で存在するならば

$$\sum_{i=1}^{4} \sup_{(x,t) \in R^n \times [0,T]} |u_i(x, t)| \leq C \sum_{i=1}^{4} \sup_x |u_i(x, +0)|$$

よって 次の存在定理を得る

Theorem

(I.V.P) の nonnegative bounded solution は大域的に存在する. 但し $\varphi_i(x) \geq 0$ かつ有界 $\varphi_3(x)$ $\varphi_4(x)$ は locally Hölder 連続

§3

放物型方程式の正則性や, 基本解の性質を使うと, 解のなめらかさについてもわかる.

Reference

[1] Friedman. A
Partial differential equations of parabolic type
(prentice Hall 1964)

[2] Mimura. M
On the Cauchy problem for simple degenerate diffusion system
(Publ. R.I.M.S vol5. No1)
1969. p11~p20