数理解析研究所講究録
第 106 巻 1971 年 93-108

非定常Navier-Stokes問題：大域的解の存在及び$t\to\infty$における解の挙動について

大阪府大　工　　藤江　徳雄

§0.　序

この論文では、3次元ユークリッド空間の中の区分的に滑らかな曲面Sで囲まれた内部領域Ωにおける、次のNavier-Stokes問題を考える．（νは粘性率＞0）

$$(\mathrm{P1})\begin{cases}\vec{v}_t-\nu\Delta\vec{v}+v_k\vec{v}_{x_k}=-\mathrm{grad}\,p+\vec{f}(x,t) & (0.1)\\ \mathrm{div}\,\vec{v}=0,\quad \vec{v}|_S=0,\quad \vec{v}|_{t=0}=\vec{a}(x) & (0.2)\end{cases}$$

ここで　$\vec{v}(x,t)=(v_1(x,t),\ v_2(x,t),\ v_3(x,t))$，$x\in\Omega$，$t\geq 0$

$$v_k\vec{v}_{x_k}=\sum_{k=1}^{3}v_k\vec{v}_{x_k},\quad \mathrm{div}\,\vec{v}=\sum_{k=1}^{3}v_{kx_k}$$

以下においてもΣを省略することが多いことを注意しておく．例えば$(\vec{u}_{x_k},\vec{v}_{x_k})=\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega\vec{u}_{x_k}\cdot\vec{v}_{x_k}dx=\sum_{j,k=1}^{3}\int_\Omega u_{jx_k}v_{jx_k}dx$等．

さて，2次元流の場合と異り3次元流の場合には、種々の一般化された解の範囲で考えても、一意的な解の大域的存在定理は一般には分っていない．この論文ではLadyzhenskayaにならって一般化された解を定義するが、この解について

は$\int_0^\infty \|\vec{f}(x,t)\|_{L^2(\Omega)}dt$, $\int_0^\infty \|\vec{f}_t(x,t)\|_{L^2(\Omega)}dt<\infty$ の仮定のもとでの大域的解の存在が示されている(cf: [1], [2]). しかし$\vec{f}(x,t)\equiv\vec{f}(x)\neq 0$の場合には明らかにこの仮定は充されていない. そこで我々はこの論文で次のことを示そう: 一意的な定常解をもつような外力$\vec{f}(x)$に対しては、初期値$\vec{a}(x)$に適当な条件をつけることにより(P1)の大域的解が存在する. ここで定常解というのは、次の定常Navier-Stokes問題(P1)′の解をいう.

$$
(\mathrm{P1})' \begin{cases} -\nu\Delta\vec{v}+v_k\vec{v}_{x_k}=-\operatorname{grad}p+\vec{f}(x) & (0.1)' \\ \operatorname{div}\vec{v}=0, \quad \vec{v}|_S=0 & (0.2)' \end{cases} \quad (x\in\Omega)
$$

更に、このときの(P1)及び(P1)′の夫々の解$\vec{v}(x,t)$, $\vec{v}'(x)$の間の関係(特に$t\to\infty$における)を系としてあげておこう.

なお、紙数の関係で証明ぬきで結果だけを述べてある場合があるが、この点は特に文献[2]を参照して頂きたい.

§1. 準備

この節では、種々の関数空間及び「一般化された解(generalized solution)」を定義し、ついでこの「一般化された解」について既に分っている事実を証明ぬきで述べることにする. また以下でしばしば用いられる積分の評価もしておく.

関数空間はすべて実ベクトル空間とし、Hilbert空間$L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ 等については既知とする. また以下すべてにお

いて $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, $(\cdot,\cdot)=(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ を意味する.

$C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)=\{\vec{\varphi}(x)\in C^\infty_0(\Omega);\ div\,\vec{\varphi}(x)=0\}$

$L^2_\sigma(\Omega)$: $L^2(\Omega)$における$C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$の閉包

$G(\Omega)=L^2(\Omega)\ominus L^2_\sigma(\Omega)=\{grad\,\varphi;\ \varphi\in L^2_{loc}(\Omega),\ \varphi_{x_k}\in L^2(\Omega)\ (k=1,2,3)\}$ (この事実については例えば[2] Chap1 参照).

$H^1_{0,\sigma}(\Omega)$: $H^1(\Omega)$ における$C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$の閉包

$\mathcal{H}(\Omega)$: $C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$をノルム$\|\vec{u}\|_{\mathcal{H}(\Omega)}\equiv[\vec{u},\vec{u}]^{1/2}$ で完備化した空間. ここで $[\vec{u},\vec{v}]\equiv(\nabla\vec{u},\nabla\vec{v})\equiv(\vec{u}_{x_k},\vec{v}_{x_k})$

今Ωは有界であるからPoincaréの不等式によって$\|\vec{u}\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$ と$\|\vec{u}\|_1$ は同等なノルムを定義し $\mathcal{H}(\Omega)=H^1_{0,\sigma}(\Omega)$.

次に(P1), (P1)$'$の「一般化された解」を定義するが、上に述べたように$L^2(\Omega)=L^2_\sigma(\Omega)\oplus G(\Omega)$ であるから(0.1), (0.1)$'$において$\vec{f}\in L^2_\sigma(\Omega)$ としても一般性を失わない. そこで以下すべてにおいて、外力についてはこれを仮定する.

定義1 (非定常問題) $\vec{v}(x,t)$ が$Q_T=\Omega\times[0,T]$ における(P1)の「一般化された解」であるとは次の条件i)~iv) を充すときをいう.

i) $\vec{v}_t,\ \vec{v}_{x_k}\in L^2(Q_T)$ $(k=1,2,3)$

ii) 各$t\in[0,T]$ に対して $\int_\Omega\sum_{k=1}^{3}v_k^4\,dx\le C_T<\infty$

iii) $div\,\vec{v}=0$, $\vec{v}|_S=0$, $\vec{v}|_{t=0}=\vec{a}(x)$

iv) $\vec{\Phi}$, $\vec{\Phi}_{x_k} \in L^2(Q_T)$ $(k=1,2,3)$, $\mathrm{div}\,\vec{\Phi}=0$, $\vec{\Phi}|_S=0$ を充すような任意の $\vec{\Phi}(x,t)$ に対して

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega [\vec{v}_t\cdot\vec{\Phi}+\nu\vec{v}_{x_k}\cdot\vec{\Phi}_{x_k}-v_k\vec{v}\cdot\vec{\Phi}_{x_k}]\,dx\,dt=\int_0^T\!\!\int_\Omega \vec{f}\cdot\vec{\Phi}\,dx\,dt \quad (1.1)$$

定義 2（定常問題）　$\vec{v}(x)$ が $(P1)'$ の「一般化された解」であるとは、次の条件 i)$'$, ii)$'$ を充すときをいう.

i)$'$　$\vec{v}(x)\in\mathcal{H}(\Omega)$

ii)$'$　任意の $\vec{\varphi}(x)\in\mathcal{H}(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega[\nu\vec{v}_{x_k}\cdot\vec{\varphi}_{x_k}-v_k\vec{v}\cdot\vec{\varphi}_{x_k}]\,dx=\int_\Omega\vec{f}\cdot\vec{\varphi}\,dx \quad (1.2)$$

以後定義 1, 2 による「一般化された解」を夫々単に "解" 及び "定常解" とよぶことにする.

それらの存在または一意性については、次の定理 1.1, 1.2 が分っている.（cf: [2]）.

定理 1.1　(P1) の解は一意的である.

定理 1.2　$(P1)'$ において、$\vec{f}(x)$ が条件:

$$2\sqrt{3}\,C_\Omega^{*\,1/2}\nu^{-2}\|\vec{f}\|'_{\mathcal{H}(\Omega)}<1 \quad (\|\cdot\|'_{\mathcal{H}(\Omega)}\text{ は }\mathcal{H}(\Omega)\text{ 上の dual norm}) \quad (1.3)$$

を充すとき定常解は一意的に存在する.

ここで $$C_\Omega^*\equiv\sup_{u(x)\in H_0^1(\Omega)}\left(\frac{\int_\Omega u^2\,dx}{\int_\Omega|\mathrm{grad}\,u|^2dx}\right)^{1/2}\ (<\infty) \quad (1.4)$$

また一般に $(P1)'$ の定常解 $\vec{v}(x)$ について次の評価がなりたつ.

$$\|\nabla\vec{v}\| \leq \frac{1}{\nu}\|\vec{f}\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \tag{1.5}$$

最後に二・三の積分の評価をあげておく．

まず、$u(x) \in H_0^1(\Omega)$ （Ω；有界）に対して

$$\int_\Omega u^4 dx \leq 4\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\mathrm{grad}\, u|^2 dx\right)^{3/2} \tag{1.6}$$

（証明は省略する．cf：[2] Chap 1 ）

次に、$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ に対して

$$\mathcal{A}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \equiv \int_\Omega \vec{u}\cdot v_k \vec{w}_{x_k}\, dx = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} u_j v_k w_{j x_k}\, dx$$

を定義する（これが意味をもつことは(1.6)によって分る）と $\mathcal{A}$ の性質として次の(1.7)～(1.9)をえる．（$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in H_{0,\sigma}^1(\Omega)$ ）

$$\mathcal{A}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = -\mathcal{A}(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) \tag{1.7}$$

$$\mathcal{A}(\vec{u},\vec{v},\vec{u}) = 0 \tag{1.8}$$

$$|\mathcal{A}(\vec{u},\vec{u},\vec{v})| \leq \beta\|\nabla\vec{u}\|^2\|\nabla\vec{v}\| \tag{1.9}$$

ただし $$\beta \equiv \sqrt{3}\sup_{u\in H_0^1(\Omega)} \frac{\left(\int_\Omega u^4 dx\right)^{1/2}}{\int_\Omega |\mathrm{grad}\, u|^2 dx} \left(\leq 2\sqrt{3}\, C_\Omega^{*\,1/2}\right) \tag{1.10}$$

（ $\beta \leq 2\sqrt{3}\, C_\Omega^{*1/2}$ なることは(1.6)及び(1.4)から従う．）

(1.7)は $\mathrm{div}\,\vec{v}=0$ 及び S 上の積分$=0$ に注意すれば、Green の公式より直ちにえられる．(1.8)は(1.7)より明らか．

(1.9)は $|\mathcal{A}(\vec{u},\vec{u},\vec{v})| \leq \left(\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} v_{j x_k}^2\, dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} u_j^2 u_k^2\, dx\right)^{1/2}$
$\leq \sqrt{3}\|\nabla\vec{v}\|\left\{\sum_{j=1}^{3}\left(\int_\Omega u_j^4\, dx\right)^{1/2}\right\}$．ここで $u_j \in H_0^1(\Omega)$ に対して β の定義式(1.10)を用いればよい．

§2. 大域的解の存在及び$t\to\infty$における解の挙動

次にあげる定理は、§0で予告した事実であるが、外力$\vec{f}(x,t)$についてはやや一般化されている．即ち$\vec{f}(x,t)$は定理1.2の条件を充す$\vec{f}(x)$に十分"近い"限りtに依存してもよい．しかし、我々が以下で行う証明法では、$\vec{f}(x)$に対する定常解$\vec{v}(x)$について、残念ながら$\sup_{x\in\Omega}|\vec{v}(x)|<\infty$の仮定を要する．（この仮定は、例えば境界Sが$C^3$, $\vec{f}(x)$が$\bar{\Omega}$でHölder連続ならば確かに保証される．cf: [2] Chap 5, [4]）

定理 $\vec{f}(x)$は条件(1.3)を充し、$\vec{f}(x)$に対する（一意的）定常解$\vec{v}(x)$は$\sup_{x\in\Omega}|\vec{v}(x)|<\infty$を充すとする．また、$\vec{a}(x)=\vec{v}(x,0)$, $\vec{f}(x,t)$については

$$\vec{a}(x)\in H^2(\Omega)\cap H^1_{0,\sigma}(\Omega);\qquad \|\vec{f}(x,t)\|^2,\ \|\vec{f}_t(x,t)\|^2\in L^1_{loc}$$

であって、次の条件を充すとする：

$$\left(\|\vec{a}(x)-\vec{v}(x)\|+\int_0^\infty\|\vec{f}(x,t)-\vec{f}(x)\|\,dt\right)$$
$$\times\left(\sup_{0\le t<\infty}\|\vec{f}(x,t)-\vec{f}(x)\|+\|v_t(x,0)\|+\int_0^\infty\|\vec{f}_t(x,t)\|\,dt\right)<\frac{\hat{\nu}^3}{\beta^2}\qquad(2.1)$$

ここで　$\hat{\nu}\equiv\nu-\frac{\beta}{\nu}\|\vec{f}\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}\ (>0)$

このとき(P1)の大域的解$\vec{v}(x,t)$が存在する．

（注意1） $\hat{\nu}>0$なることは(1.3)及び(1.10)から直ちに従う．また$\vec{v}_t(x,0)$については　式(0.1)で$t=0$とおくと

$$\vec{v}_t(x,0)+\mathrm{grad}\,p(x,0)=\nu\Delta\vec{a}-a_k\vec{a}_{x_k}+\vec{f}(x,0)\quad(\vec{a}(x)\in H^2(\Omega))$$

この式の右辺は$\in L^2(\Omega)$であり、この関数の$L^2_\sigma(\Omega)$への正射影として$\vec{v}_t(x,0)$は$\vec{a}(x)$, $\vec{f}(x,0)$から一意的に定まる.

(**注意2**) $\vec{f}'(x)=0$ (従って$\vec{v}'(x)=0$) のときは$\tilde{\nu}=\nu$であり、丁度[1],[2]における大域的解の存在定理と一致する.

(**証明**) まず、解に対して一意性がなりたつことを注意しておく. (cf: 定理1.1)

$\vec{g}(x,t)=\vec{f}(x,t)-\vec{f}'(x)$, $\vec{b}(x)=\vec{a}(x)-\vec{v}'(x)$, $\vec{u}(x,t)=\vec{v}(x,t)-\vec{v}'(x)$ とおこう. すると$\vec{v}(x,t)$が(1.1)を充すことと$\vec{u}(x,t)$が次の等式(2.2)を充すこととは同等である. $\vec{v}'(x)$に対する等式(1.2)に注意すればよい.

$$\int_0^T\int_\Omega[\vec{u}_t\cdot\vec{\Phi}+\nu\vec{u}_{x_k}\cdot\vec{\Phi}_{x_k}-(u_k\vec{u}+u_k\vec{v}'+v_k'\vec{u})\cdot\vec{\Phi}_{x_k}]dxdt$$
$$=\int_0^T\int_\Omega\vec{g}\cdot\vec{\Phi}\,dxdt \tag{2.2}$$

従って、再び$\vec{v}'(x)$が$\vec{f}'(x)$に対する定常解であることに注意すれば、$\vec{v}(x,t)$の代りに、定義1の条件 i), ii), iii) (ただし$\vec{u}(x,0)=\vec{b}(x)$) 及び iv)$'$ (これは(1.1)を上の(2.2)でおきかえたもの) を充す$\vec{u}(x,t)$がQ_T (T: 任意) において存在することを示せば十分である. それを以下で示すことにしよう.

まず次の性質をもつような$H^1_{0,\sigma}(\Omega)$における完全系$\{\vec{\Phi}^p(x)\}_{p=0}^\infty$をとる. ($\delta_p^q$はクロネッカーのデルタ)

$$(\vec{\Phi}^p,\vec{\Phi}^q)=\delta_p^q,\quad \vec{\Phi}^0(x)=\frac{\vec{b}(x)}{\|\vec{b}(x)\|}\quad (\vec{b}(x)=0 \text{ のときには } \vec{\Phi}^0(x)=0)$$

次に

$$\vec{u}^n(x,t)=\sum_{p=0}^{n} c_{pn}(t)\,\vec{\varphi}^p(x) \quad (n=0,1,2,\cdots\cdots,\ t\geq 0) \tag{2.3}$$

とおき、ここで $c_{pn}(t)$ を次の(2.4),(2.5)を充すように定める．

$$\begin{cases} c_{0,n}(0)=\|\vec{b}\|,\quad c_{pn}(0)=0 \quad (p=1,2,\cdots,n) & (2.4) \\ (\vec{u}^n_t,\vec{\varphi}^p)+\nu(\nabla\vec{u}^n,\nabla\vec{\varphi}^p)-(u^n_k\vec{u}^n,\vec{\varphi}^p_{x_k})-(u^n_k\vec{v}',\vec{\varphi}^p_{x_k}) & \\ \quad -(v'_k\vec{u}^n,\vec{\varphi}^p_{x_k})=(\vec{g},\vec{\varphi}^p) \quad (p=0,1,\cdots,n) & (2.5) \end{cases}$$

すなわち $c_{pn}(t)$ は次の常微分方程式系の解として定義される．

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}c_{pn}(t)+\sum_{q=0}^{n}a_{pq}c_{qn}(t)+\sum_{q,r=0}^{n}a_{pqr}c_{qn}(t)c_{rn}(t)=(\vec{g},\vec{\varphi}^p) \\ &\hspace{22em}(t\geq 0) \\ &c_{0,n}(0)=\|\vec{b}\|,\quad c_{pn}(0)=0 \quad (p=1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

ここで a_{pq}, a_{pqr} は $\vec{v}'$, $\vec{\varphi}^0$, $\vec{\varphi}^1$, $\cdots$, $\vec{\varphi}^n$ によって定まる定数である．また右辺 $(\vec{g},\vec{\varphi}^p)$ は t に関して絶対連続である．

このようにして確定した $\{\vec{u}^n(x,t)\}_{n=0}^{\infty}$ に対しては、次の各式がなりたつ．

$$\vec{u}^n(x,0)=\vec{b}(x) \tag{2.7}$$

$$\|\vec{u}^n_t(x,0)\|\leq\|\vec{v}_t(x,0)\| \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}^n\|^2+\nu\|\nabla\vec{u}^n\|^2-A(\vec{v}',\vec{u}^n,\vec{u}^n)=(\vec{g},\vec{u}^n) \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}^n_t\|^2+\nu\|\nabla\vec{u}^n_t\|^2-A(\vec{v}',\vec{u}^n_t,\vec{u}^n_t)+A(\vec{u}^n_t,\vec{u}^n_t,\vec{u}^n)=(\vec{g}_t,\vec{u}^n_t) \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}^n\|^2+\tilde{\nu}\|\nabla\vec{u}^n\|^2\leq(\vec{g},\vec{u}^n) \tag{2.9'}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}^n_t\|^2+\tilde{\nu}\|\nabla\vec{u}^n_t\|^2+\mathcal{A}(\vec{u}^n_t,\vec{u}^n_t,\vec{u}^n)\leq(\vec{g}_t,\vec{u}^n_t) \qquad (2.10)'$$

まず(2.7)は明らかだが、これを用いると(2.8)は：$\vec{u}^n(x,0)=\vec{b}(x)=\vec{a}(x)-\vec{v}(x)$ 及び $\vec{v}(x)$ に対して(1.2)がなりたつことに注意すると、(2.5)で $t=0$ とおくことにより $c'_{pn}(0)=(\vec{f}(x,0)+\nu\Delta\vec{a}-a_k\vec{a}_{x_k},\vec{\varphi}^p)=(\vec{v}_t(x,0),\vec{\varphi}^p(x))$ をえる．従って $\vec{u}^n_t(x,0)=\sum_{p=0}^{n}(\vec{v}_t(x,0),\vec{\varphi}^p(x))\vec{\varphi}^p(x)$．ここでBesselの不等式を用いればよい．

(2.9)は(2.5)の両辺に $c_{pn}(t)$ をかけて $p=0$ から n まで加え合せたものに $\mathcal{A}$ の性質(1.8)を用いればよい． (2.10)は(2.5)の両辺を t で微分したものに $c'_{pn}(t)$ をかけて加え合せ $\mathcal{A}$ の性質(1.8), (1.7)を用いる． また(2.9)', (2.10)'は(2.9), (2.10)において $\mathcal{A}$ に対する評価(1.9)及び $\vec{v}$ に対する評価(1.5)を用いればよい．

ただし $\tilde{\nu}=\nu-\frac{\beta}{\nu}\|\vec{f}'\|_{\mathcal{H}(\Omega)}\ (>0)$

以上の性質を用いて $\{\vec{u}^n(x,t)\}_{n=0}^{\infty}$ の収束を調べるのだが、そのためにまず次の補題を示すことにする．

補題 $\vec{u}(x,t)$ が $Q_T=\Omega\times[0,T]$ において次の条件を充すとしよう：

$\|\nabla\vec{u}(x,t)\|$, $\|\vec{u}_t(x,t)\|$：絶対連続， $\vec{u}(x,0)\in L^2(\Omega)$

$\vec{u}_t(x,t)\in H^1_{0,\sigma}(\Omega)$， $\int_0^T\|\nabla\vec{u}_t\|^2dt<\infty$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}\|^2+\tilde{\nu}\|\nabla\vec{u}\|^2\leq(\vec{g},\vec{u}) \tag{2.9'}$$

$(\tilde{\nu}>0)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}_t\|^2+\tilde{\nu}\|\nabla\vec{u}_t\|^2+A(\vec{u}_t,\vec{u}_t,\vec{u})\leq(\vec{g}_t,\vec{u}_t) \tag{2.10'}$$

このとき

a)　$t\in[0,T]$ に対して次の評価がなりたつ：

$$\|\vec{u}(x,t)\|\leq\|\vec{u}(x,0)\|+\int_0^t\|\vec{g}(x,t)\|dt \tag{2.11}$$

$$\|\vec{u}(x,t)\|^2+2\tilde{\nu}\int_0^t\|\nabla\vec{u}\|^2dt\leq\|\vec{u}(x,0)\|^2+2\|\vec{u}(x,0)\|\int_0^t\|\vec{g}(x,t)\|dt +2\left(\int_0^t\|\vec{g}(x,t)\|dt\right)^2 \tag{2.12}$$

b)　上にあげた条件に加えて更に次の条件：

$$A_T^2\equiv\left(\|\vec{u}(x,0)\|+\int_0^T\|\vec{g}(x,t)\|dt\right)\cdot\left(\max_{0\leq t\leq T}\|\vec{g}(x,t)\|+\|\vec{u}_t(x,0)\| +\int_0^T\|\vec{g}_t(x,t)\|dt\right)<\frac{\tilde{\nu}^3}{\beta^2} \tag{2.13}$$

が充されるならば、次の評価がなりたつ．($t\in[0,T]$)

$$\|\vec{u}_t(x,t)\|^2+2\gamma\int_0^t\|\nabla\vec{u}_t\|^2dt \leq\|\vec{u}_t(x,0)\|^2+2\int_0^t\|\vec{g}_t\|\left(\|\vec{u}_t(x,0)\|+\int_0^t\|\vec{g}_t\|dt\right)dt \tag{2.14}$$

ただし　$\gamma=\tilde{\nu}-\beta\tilde{\nu}^{-1/2}A_T\ (>0)$

（補題の証明）　大略を示すことにする．

a)　(2.9)′より $\|\vec{u}\|\frac{d}{dt}\|\vec{u}\|\leq(\vec{g},\vec{u})\leq\|\vec{g}\|\|\vec{u}\|$．この不等式より容易に(2.11)がえられる．(2.12)は(2.9)′の両辺を 0 から t まで積分して、今えられた(2.11)を用いればよい．

b)　まず(2.9)′より(2.11)を用いて

$$\tilde{\nu}\|\nabla\vec{u}\|^2\leq(\vec{g}-\vec{u}_t,\vec{u})\leq(\|\vec{g}\|+\|\vec{u}_t\|)\|\vec{u}\|$$

$$\leq (\|\vec{g}(x,t)\| + \|\vec{u}_t(x,t)\|)(\|\vec{u}(x,0)\| + \int_0^t \|\vec{g}(x,t)\| dt) \qquad (2.15)$$

一方(2.10)からは(1.9)：$|A(\vec{u}_t, \vec{u}_t, \vec{u})| \leq \beta \|\nabla \vec{u}\| \|\nabla \vec{u}_t\|^2$ を用いて

$(\hat{\nu} - \beta\|\nabla\vec{u}\|)\|\nabla\vec{u}_t\|^2 \leq \|\vec{u}_t\|(\|\vec{g}_t\| - \frac{d}{dt}\|\vec{u}_t\|)$ をえるがここで

$$B(t) \equiv \hat{\nu} - \beta\hat{\nu}^{-1/2}\left\{\max_{0\leq\tau\leq t}(\|\vec{g}(x,\tau)\| + \|\vec{u}_t(x,\tau)\|)\right\}^{1/2}$$
$$\times\left(\|\vec{u}(x,0)\| + \int_0^t \|\vec{g}\| dt\right)^{1/2} \qquad (2.16)$$

とおくと、(2.15)によって $\hat{\nu} - \beta\|\nabla\vec{u}\| \geq B(t)$ であるから結局

$$B(t)\|\nabla\vec{u}_t\|^2 \leq \|\vec{u}_t\|\left(\|\vec{g}_t\| - \frac{d}{dt}\|\vec{u}_t\|\right) \qquad (2.17)$$

さて、$B(t)$ はその定義(2.16)より単調減少連続関数で、また仮定(2.13)より $B(0)>0$ であるが、更に $B(T)\geq\gamma>0$ である。これを示すために $B(T_1)=0$, $B(t)>0$ $(0\leq t<T_1)$ としよう(*)．すると(2.17)から $t\in[0,T_1]$ で $0\leq\|\vec{u}_t\|(\|\vec{g}_t\| - \frac{d}{dt}\|\vec{u}_t\|)$．従って(2.11)と類似の次の式をえる．

$$\|\vec{u}_t(x,t)\| \leq \|\vec{u}_t(x,0)\| + \int_0^t \|\vec{g}_t\| dt \qquad t\in[0,T_1] \qquad (2.18)$$

これを(2.16)に用いて

$$B(t) \geq \hat{\nu} - \beta\hat{\nu}^{-1/2}\left(\max_{0\leq\tau\leq t}\|\vec{g}(x,\tau)\| + \|\vec{u}_t(x,0)\| + \int_0^t \|\vec{g}_t(x,t)\| dt\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\|\vec{u}(x,0)\| + \int_0^t \|\vec{g}\| dt\right)^{1/2} \qquad t\in[0,T_1]$$

ここでもし $T>T_1$ とすると、上式で $t=T_1$ とおくことによって $B(T_1)\geq\hat{\nu}-\beta\hat{\nu}^{-1/2}A_{T_1}\geq\hat{\nu}-\beta\hat{\nu}^{-1/2}A_T=\gamma>0$．これは T_1 のとり方 $B(T_1)=0$ に反する．従って $T\leq T_1$ であり、$t=T$ に対して上の不等式がなりたつことから $B(T)\geq\hat{\nu}-\beta\hat{\nu}^{-1/2}A_T=\gamma>0$．

(*) そのような T_1 が存在しないときにも、以下の推論はそのままなりたつ．

以上によって $B(t) \geq B(T) \geq \gamma (>0)$ が分った．（$t \in [0,T]$）

これを用いて(2.17)の両辺の積分を考えることにより

$$\|\vec{u}_t(x,t)\|^2 + 2\gamma\int_0^t \|\nabla \vec{u}_t\|^2 dt \leq \|\vec{u}_t(x,0)\|^2 + 2\int_0^t \|\vec{g}_t\|\|\vec{u}_t\| dt$$

この右辺に(2.18)を用いると求める評価(2.14)がえられる．ただし $t \in [0,T]$．　（補題の証明終り）

（定理の証明つづき）　既に述べたことから明らかなように、各 $\vec{u}^n(x,t)$ は補題の仮定を充している．更に(2.7)，(2.8)及び定理の仮定(2.1)に注意すれば $\vec{u}^n(x,t)$ に対して次の一様評価(2.19)，(2.20)をえる．（$n=0,1,2,\cdots\cdots$）

$$\|\vec{u}^n_t(x,t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla \vec{u}^n_t\|^2 dt \leq c(t) \quad t \in [0,\infty) \tag{2.19}$$

ここで $c(t)$ は(2.14)を見れば分るように、単調増大連続関数でかつ有界．

従ってまた

$$\|\vec{u}^n(x,t)\|^2 + \|\nabla \vec{u}^n\|^2 \leq \tilde{c}(t) \quad t \in [0,\infty) \tag{2.20}$$

ここで $\tilde{c}(t)$ は単調増大連続関数．

(1.6)に注意すると(2.20)から $\|u^n_i u^n_j\|^2$ $(1 \leq i,j \leq 3)$ がまた連続関数によって n に関して一様におさえられることが分る($t \in [0,\infty)$)．従って $\{\vec{u}^n\}_{n=0}^{\infty}$ から適当な部分列 $\{\vec{u}^{n'}\}$ をとって、$\vec{u}^{n'}$, $\vec{u}^{n'}_{x_k}$, $\vec{u}^{n'}_t$, $\vec{u}^{n'}_{tx_k}$, $u^{n'}_i u^{n'}_j$ $(1 \leq i,j,k \leq 3)$ が $L^2(Q_T)$ (T：任意) で弱収束するようにできる．ところが更に(2.19)，(2.20)によって（必要ならばもう一度部分列をとって）t を固定したとき、各 $t \in [0,T]$

に対して $\{\vec{u}^{n'}(x,t)\}$ は $H^1_{0,\sigma}(\Omega)$ での弱収束列となる（これはAscoli-Arzelaの定理を用いて示されるが、証明は割愛する）．そこで上の極限関数を $\vec{u}(x,t)$ とすると、これが定義1の条件 i), ii), iii) を充すことは容易に確められる．そこで、あとはこの $\vec{u}(x,t)$ が(2.2)を充すことをいえばよい．これを示そう．

まず、$\vec{\Phi}^m(x,t)=\sum_{l=0}^{m} d_l(t)\vec{\varphi}^l(x)$ （$d_l(t)\in L^2(0,T)$）の形の試料関数に対しては、$n'\geq m$ に対する式(2.5)の両辺に $d_l(t)$ をかけて l についての和をとり、t について積分すると

$$\int_0^T\int_\Omega[\vec{u}^{n'}_t\cdot\vec{\Phi}^m+\nu\vec{u}^{n'}_{x_k}\cdot\vec{\Phi}^m_{x_k}-(u^{n'}_k\vec{u}^{n'}+u^{n'}_k\vec{v}'+v'_k\vec{u}^{n'})\cdot\vec{\Phi}^m_{x_k}]dxdt$$
$$=\int_0^T\int_\Omega\vec{f}\cdot\vec{\Phi}^m dxdt\ .$$

ここで $\sup_{x\in\Omega}|\vec{v}'(x)|<\infty$ に注意して $n'\to\infty$ とすれば $\vec{\Phi}^m$ に対する式(2.2)をえる．また、定義1 iv) にいう任意の試料関数は、空間変数に関する1階微分までこめて上でいった $\vec{\Phi}^m(x,t)$ の形の関数で、$L^2(Q_T)$ においていくらでも近似できることが容易に確められる．このことから、任意の試料関数に対して(2.2)がなりたつことが分る．（証明終り）

次に、上の定理でえられた大域的解 $\vec{v}(x,t)$ の $t\to\infty$ における挙動に関して系をあげておく．

系　上の定理で存在が示された大域的解 $\vec{v}(x,t)$ について

a) $\|\vec{v}(x,t)-\vec{v}'(x)\|_1 \to 0 \quad (t\to\infty)$

b) 特に $\vec{f}(x,t)\equiv\vec{f}'(x)$ のときには

$$\|\vec{v}(x,t)-\vec{v}'(x)\| \le e^{-\alpha t}\|\vec{v}(x,0)-\vec{v}'(x)\| \qquad (t\ge 0)$$

ただし $\alpha=\dfrac{1}{2C_\Omega^{*2}}(\nu-\beta\|\nabla\vec{v}'\|) \quad (>0)$

(注意) 2次元流の場合における類似の結果が[2]で示されている．なお，$\alpha>0$ なることは $\nu-\beta\|\nabla\vec{v}'\|\ge\tilde{\nu}$ より明らか．

(証明) 大略にとどめる．以下で $\vec{u}(x,t)=\vec{v}(x,t)-\vec{v}'(x)$.

a) 弱収束の下半連続性によって $\int_0^\infty\|\nabla\vec{u}\|^2dt,\ \int_0^\infty\|\nabla\vec{u}_t\|^2dt<\infty$ (cf: (2.12), (2.19)). これからまず $\|\nabla\vec{u}\|^2\to 0\ (t\to\infty)$ が分るが、$\|\vec{u}\|^2\le C_\Omega^{*2}\|\nabla\vec{u}\|^2$ より結局 $\|\vec{u}(x,t)\|_1\to 0\ (t\to\infty)$.

b) $\vec{u}(x,t)$ は(2.2)を充している．ただし $\vec{g}(x,t)=0$. これから殆ど到るところの $t(\ge 0)$ に対して

$$\int_\Omega[\vec{u}_t\cdot\vec{\Phi}+\nu\vec{u}_{x_k}\cdot\vec{\Phi}_{x_k}-(u_k\vec{u}+u_k\vec{v}'+v_k'\vec{u})\cdot\vec{\Phi}_{x_k}]dx=0$$

ここで $\vec{\Phi}(x,t)=\vec{u}(x,t)$ とおくと $A(\vec{u},\vec{u},\vec{u})=A(\vec{u},\vec{v}',\vec{u})=0$ より

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{u}\|^2+\nu\|\nabla\vec{u}\|^2+A(\vec{u},\vec{u},\vec{v}')=0 \quad (a.e.\ t\ge 0)$$

これに不等式 $|A(\vec{u},\vec{u},\vec{v}')|\le\beta\|\nabla\vec{v}'\|\|\nabla\vec{u}\|^2$ 及び $\|\nabla\vec{u}\|^2\ge C_\Omega^{*-2}\times\|\vec{u}\|^2$ を用いると $\dfrac{d}{dt}\|\vec{u}\|^2+2\alpha\|\vec{u}\|^2\le 0\ (a.e.\ t\ge 0)$ をえる． $\therefore\ \|\vec{u}(x,t)\|\le e^{-\alpha t}\|\vec{u}(x,0)\|$. (証明終り)

最後に、ここでえられた大域的解の存在についての結果は、Fujita-Kato[3]のそれ([3]Theorem1.4)にそのまま含まれてしまうものではないことを注意しておく．それは、外力$\vec{f}(x,t)$として$\{\varphi(t)+1\}\vec{f}(x)$ ($\vec{f}(x)$は条件(1.3)を充し$\neq 0$) の形の関数を考え、ここで$\varphi(t)$を我々の定理の仮定を充し、しかも[3]Theorem1.4の仮定は充さないように定めることができることから分る．

追記：最近Heywoodの論文[5]を知る機会をえたが、そこでは本稿と類似の結果がえられており，更に外部問題にも触れられている．本稿で扱ったような問題に関心を持たれる方は、是非参照して頂きたい．

文献

[1] A.A.Kiselev&O.A.Ladyzhenskaya: On the existence and uniqueness of solutions of the non-stationary problems for flows of non-compressible fluids … Izv. Akad. Nauk SSSR 21(1957)　英訳 A.M.S. Transl.

[2] O.A.Ladyzhenskaya: The mathematical theory of viscous incompressible flow (英訳) … Gordon&Breach

[3] H.Fujita-T.Kato: On the Navier-Stokes initial val-

ue problem I. ··· Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964)

[4] H. Fujita : On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equation ··· J. Fac. Sci. Univ. Tokyo vol 9 part 1 (1961)

[5] J.G. Heywood : On stationary solutions of the Navier-Stokes equations as limits of nonstationary solutions ··· Arch. Rat. Mech. Anal. 37 (1970)