数理解析研究所講究録
第106巻 1971年 121-144

半群とその近似

早大 教育 大春慎之助

本稿では線型もしくは非線型作用素の半群の構成についてのべ，合わせてこのような半群の列の収束性について論ずる．

I. 線型作用素の半群.

A を Banach 空間 X から Banach 空間 Y への線型作用素として，その定義域を $D(A)$，値域を $R(A)$，そして null space を $N(A)$ で表わす．$\mathcal{C}(X,Y)$ で X から Y への閉作用素の全体を，$\mathcal{B}(X,Y)$ で X から Y への有界作用素の全体を表わす．ただし $\mathcal{C}(X)\equiv\mathcal{C}(X,X)$，$\mathcal{B}(X)\equiv\mathcal{B}(X,X)$ とする．$A, A^2, \cdots, A^k\in\mathcal{C}(X)$ とすると $D(A^k)$ は norm $\|x\|_k=\sum_{i=0}^{k}\|A^i x\|$ によって Banach 空間となる．これを $[D(A^k)]$ で表わす．$U\in\mathcal{B}([D(A^k)],X)$ であるとき，その operator norm を $\|U\|_k$ とかく．また，$\mathbb{R}$ は実数の集合，$\mathbb{Z}^+$ は非負整数の集合を表わす．本稿において有界作用素の半群 $\{T_t;t>0\}$ とは，次の性質をもつ $T_t\in\mathcal{B}(X)$, $t>0$, の族をいう:

(i) $T_{t+s}=T_tT_s$, $\quad t, s>0$;

(ii) 各 $x\in X$ に対して，T_tx は $t>0$ で強連続.

1.　$A \in \mathcal{E}(X)$ として X における微分方程式

(1.1)　$$(d/dt)u(t) = Au(t)$$

を考える．与えられた $x \in X$ と区間 $[0,T]$ に対して X-値関数 $u(t;x)$ で，

(i)　$u(t;x)$ は $[0,T]$（もしくは $(0,T]$ の任意の閉部分区間）において強絶対連続で微分可能であり，

(ii)　各 $t \in (0,T]$ に対して $u(t;x) \in D(A)$ であり微分方程式 (1.1) を満足し，

(iii)　$\lim_{t \to +0} u(t;x) = x$

となるようなものを求めることを，$[0,T]$ 上で A に対して formulate された Cauchy 問題，ACP_1（もしくは ACP_2）という．同様にして区間 $[0,\infty)$ 上で formulate された Cauchy 問題 ACP_i，$i=1,2$，を考えることが出来る．本節ではこのような Cauchy 問題の解を構成することを考える．

$A \in \mathcal{E}(X)$ として次の条件を導入する：

(1.2)　$\exists\, k \in \mathbb{Z}^+$ ：$A, A^2, \cdots, A^k \in \mathcal{E}(X)$,

(1.3)　$\exists\, \omega \in \mathbb{R}$ ：$\xi > \omega \Rightarrow N(\xi - A) = \{0\},\ R(\xi - A) \supset D(A^k)$,

(1.4)　$\exists\, T > 0,\ \exists\, M > 0 : \|\xi^n(\xi - A)^{-n}x\| \leqq M\|x\|_k,\ \xi > \omega,\ n/\xi \in [0,T],\ x \in D(A^k)$.

$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1},\ \lambda^{-1} > \omega$，とおく．すると $x \in D(A^{2k+2})$，$n\lambda \leqq h$，$\nu h \in [0,T]$，$\lambda^{-1} \geqq h^{-1} > \omega$ となる x, λ, h, n, ν に対して

$$J_\lambda^{n\nu}x - J_h^{\nu}x = (n\lambda - h)\sum_{i=0}^{\nu-1} J_h^{\nu-i} J_\lambda^{n(i+1)} Ax - \lambda^2 \sum_{i=0}^{\nu-1} J_h^{\nu-i} \sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p}^{n-1} J_\lambda^{ni+q+1} A^2 x,$$

もしくは，$x \in D(A^{2k+1})$, $n \geqq m$, $0<\lambda \leqq \mu < 1/\omega$, $n\mu, m\lambda \in [0,T]$, $\alpha = \mu/\lambda$, $\beta = 1-\mu/\lambda$ となる x, n, m, μ, λ に対して

$$J_\mu^n x - J_\lambda^m x = \sum_{j=0}^{m} {}_nC_j \alpha^j \beta^{n-j} J_\mu^n (J_\lambda^{m-j} x - x) + \sum_{j=m}^{n} {}_{j-1}C_{m-1} \alpha^m \beta^{j-m} J_\mu^j (J_\mu^{n-j} x - x)$$

という変形が得られるから，条件(1.4)を使って，各 $x \in D(A^{2k+1})$ に対して $u(t;x) = \lim_{\lambda \to +0} J_\lambda^{[t/\lambda]} x$ の存在を証明することが出来る。この収束を使って次の結果を得る。

定理1.1. $A \in \mathcal{C}(X)$ が条件(1.2)−(1.4)を満足するならば，各 $x \in D(A^{2k+2})$ に対して，これを初期値とする $[0,T]$ 上で A に対して formulate された ACP_1 の解が存在する。特に $Y = \bigcap_{n \geqq 0} D(A^n)$ が $A, A^2, \cdots, A^k$ の core であるときには，各 $x \in D(A^{k+1})$ に対して，これを初期値とする $[0,T]$ 上で A に対して formulate された ACP_1 の解が存在する。

証明は岡沢−大春[10]にのべておいた。例えば定数係数 system の偏微分作用素で上にのべた条件を満足する例を作ることが出来る。

(1.2), (1.3) が成立し，$\rho(A) \neq \emptyset$ ならば次の条件が成立する：

(1.5) $\exists \omega \in \mathbb{R}$: $\rho(A) \supset \{\xi \in \mathbb{R};\ \xi > \omega\}$.

以下にのべるように，(1.2)+(1.3)の代りに(1.5)の下で議論することについては大春[9]にのべておいた。

$\rho(A) \neq \emptyset$ ならば全ての $n \in \mathbb{Z}^+$ に対して $A^n \in \mathcal{C}(X)$. また，$\rho(A) \neq \emptyset$ で $\overline{D(A)} = X$ ならば $D(A^{2k+2})$ は $[D(A^k)]$ で dense である。

従って次の結果を得る.

<u>系 1.2.</u>　$A\in\mathcal{C}(X)$ が条件 (1.5) と (1.4) を満足し $\overline{D(A)}=X$ ならば, 各 $x\in D(A^{k+1})$ に対して, これを初期値とする $[0,T]$ 上で A に対して formulate された ACP_1 の解が存在する.

<u>注意.</u>　$x\notin D(A^k)$ を初期値にもつような $[0,T]$ 上で formulate された ACP_1 の解が存在しないような例を作ることができる.

$[0,\infty)$ 上で ACP を考えるときには, (1.4) の代りに次の2通りの条件を考えることができる:

(1.6) $(\forall T>0)\ \exists M(T)>0:\ \|\xi^n(\xi-A)^{-n}x\|\leqq M(T)\|x\|_k$ for $x\in D(A^k)$.

(1.7) $\exists M>0, \exists\omega'\geqq\omega:\ \|(\xi-A)^{-n}x\|\leqq\dfrac{M}{(\xi-\omega')^n}\|x\|_k$ for $x\in D(A^k)$.

すると上記の結果を使って次の結論を導き出すことができる.

<u>定理 1.3.</u>　$A\in\mathcal{C}(X)$ が (1.5) と (1.6) を満足するならば, one-parameter family $\{U_t\,;\,t\geqq0\}\subset\mathcal{B}(D(A^m),X)$, $m=2k+1$, が存在して各 $x\in D(A^{m+1})$ に対して, U_tx は x を初期値とする A に対する ACP_1 の解を与える. 特に $\overline{D(A)}=X$ ならば $m=k$ とすることができる.

A が (1.5) と (1.7) を満足するならば $\|U_tx\|\leqq Me^{\omega't}\|x\|_k$, $t\geqq0$, $x\in D(A^m)$ となる. (1.5)+(1.7) の組合せの代りに次の組合せを考える.

(1.8) $\exists\gamma\in\mathbb{R}:\ \rho(A)\supset\{\lambda\,;\,\mathrm{Re}(\lambda)>\gamma\}$,

(1.9) $\exists l\in\mathbb{Z}^+, \exists M>0:\ \|R(\lambda;A)\|\leqq M(1+|\lambda|)^l,\ \mathrm{Re}(\lambda)>\gamma$.

これらの条件の間には次の関係がある.

<u>定理 1.4.</u> $A\in\mathcal{C}(X)$が$\omega\in\mathbb{R}$, $\omega'\geqq\omega$, $k\in\mathbb{Z}^+$, $M>0$ に対して (1.8) と(1.7) を満足するならば ω', $2k+1$, $M'(>M)$ に対して (1.9) が成立する. 特に $\overline{D(A)}=X$ のときには ω', k, M' に対して (1.9) が成立する. 逆に, A が $\gamma\in\mathbb{R}$, $l\in\mathbb{Z}^+$, $M>0$ に対して (1.8) と (1.9) を満足するならば, ある $\omega>\max\{0,\gamma\}$, $\omega'\geqq\omega$, $l+2$, $M'(>M)$ に対して (1.7) が成立する.

定理 1.3 で得られた family $\{U_t\}$ 自身は半群とはならないが, 牛島氏[1]と藤原氏[2]の結果を使って, (1.5)+(1.6) もしくは (1.5)+(1.7) を満足する作用素は次の意味で distribution semigroup の生成作用素となることが分る. 以下, $Y=\bigcap_{n\geqq1}D(A^n)$ とする.

<u>定理 1.5.</u> $A\in\mathcal{C}(X)$が (1.5) と (1.6) を満足し $\overline{Y}=X$ ならば, A は a regular distribution semigroup の生成作用素である.

<u>定理 1.6.</u> 線形作用素 A が exponential distribution semigroup の生成作用素であるための必要十分条件は, A が $\overline{D(A)}=X$ となる閉作用素であって以下に挙げた条件のいずれかを満足することである:

(i) $\overline{Y}=X$, (1.5), (1.7).

(ii) $\overline{Y}=X$, $\rho(A)\neq\emptyset$, Y は semi-norm 系 $\{\|A^n x\|;\ n=0,1,2,\cdots\}$ に関して Fréchet 空間となり, $A|_Y$ は $t\geqq0$ で強連続である $M>0$, $\omega\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}^+$ に対して $\|T_t y\|\leqq Me^{\omega t}\|y\|_k$, $y\in Y$, となる

Y 上の連続作用素の半群 $\{T_t ; t \geq 0\}$ の生成作用素.

(iii) (1.8), (1.9).

2. 本節では有界作用素の半群の構成について論ずる. まず生成作用素が空でない resolvent set を持つ場合を取扱う:

有界作用素の半群 $\{T_t ; t > 0\}$ で次の2性質をもつものを考える.

(2.1) $X_0 = \bigcup_{t>0} T_t[X]$ は X で dense;

(2.2) ω_0 を type とする. ある $\omega_1 (\geq \omega_0)$ が存在して, $Re(\lambda) > \omega_1$ なる λ に対して次の性質をもつ $R(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$ が対応する:

i) $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x \, dt$, $x \in X_0$; ii) $R(\lambda)x = 0$, $\lambda > \omega_1 \Rightarrow x = 0$.

A_0 をこのような半群の生成作用素とすると A_0 は pre-closed. $A = \overline{A_0}$ とすると, $\overline{D(A)} = X$ かつ $\lambda > \omega_1$ に対して $R(\lambda) = R(\lambda ; A)$.

そこで更に次の条件を仮定する.

$(2.3)_k$ $\exists k \in \mathbb{Z}^+ : D(A^k) \subset \Sigma = \{x \in X ; \lim_{t \to +0} T_t x = x\}$.

<u>定理 2.1.</u> 線型作用素 A が (2.1), (2.2) と $(2.3)_k$ を満足する有界作用素の半群の生成作用素の closure であるための必要十分条件は, $A \in \mathcal{C}(X)$, $\overline{D(A)} = X$ で, k とある $\omega \in \mathbb{R}$ に対して (1.5), (1.6) と次の Feller type の条件を満足することである:

$(F ; k)$ $(\forall \varepsilon > 0, \forall x \in D(A^k))$ $\exists M_\varepsilon > 0$, $\exists \lambda_0 \equiv \lambda_0(\varepsilon, x) > \omega$ such that

$$\| \xi^n R(\xi ; A)^n x \| \leq M_\varepsilon \|x\| \quad \text{for } \xi > \lambda_0,\ \varepsilon \leq n/\xi \leq 1/\varepsilon,\ x \in D(A^k).$$

証明は大春[9;§5]にのべておいた。

注意. 各$k \geq 1$に対して$(2.3)_k$は満足するが$(2.3)_{k-1}$を満足しないような半群の例をつくることができる。

有界作用素の半群$\{T_t\}$が a regular distribution semigroup に拡張できるものとする。するとその生成作用素の閉包はある$k \in \mathbb{Z}^+$に対して条件(1.5), (1.6), (F;k)を満足することを証明出来る。逆に，定理2.1の半群は exponential distribution semigroup に拡張することが出来る。牛島[12]と合わせれば次の結果を得る。

定理2.2. Aが continuous distribution semigroup の生成作用素である必要十分条件は，$A \in \mathcal{C}(X)$, $\overline{D(A)} = X$で，Aがある$k \in \mathbb{Z}^+$と$\omega \in \mathbb{R}$に対して条件(1.5), (1.6), (F;k)を満足することである。

次に，$\{T_t ; t>0\}$を有界作用素の半群として，

$$R_0(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x \, dt$$

とおく。$D(R_0(\lambda))$は右辺の積分が存在するようなxの全体である。そして$\{T_t\}$に関して次の性質を導入する：

(2.4) $\overline{X_0} = X$,

(2.5) ω_0を type とする。ある$\omega_1 (\geq \omega_0)$が存在して$\lambda > \omega_1$となる各λに対して次の性質をもつ$R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$が存在する：

i) $D(R(\lambda)) \supset \Sigma$; ii) $R(\lambda) = \overline{R_0(\lambda)|_{X_0}}$; iii) $N(R(\lambda)) = \{0\}$.

A_0をこの半群の生成作用素とするとA_0は closable. $A = \overline{A_0}$

とし，$Y=\bigcap_{n\geqq 1}D(A^n)$ とすると，

(2.6) $\quad \overline{Y}=X,\quad R(\lambda)=(\lambda-A)^{-1}$ for $\lambda>\omega_1$.

定理 2.3. A は X における線型作用素で Y が各 A^n, $n\in \mathbb{Z}^+$, の core になっているとする．このとき A が (2.4), (2.5), $(2.3)_k$ を満足する半群の生成作用素の closure となるための必要十分条件は，k とある $\omega\in\mathbb{R}$ に対して (1.2), (1.3), (1.6), そして (F;k) が成立することである．

証明は岡沢-大春[10]に述べておいた．

注意1. $\rho(A)\neq\phi$ で $\overline{Y}=X$ ならば Y は各 A^n, $n\in\mathbb{Z}^+$, の core となる．

注意2. 定理 2.1 の後にのべた注意と同じことがいえる．

注意3. $k\geqq 1$ とする．すると各 $x\in D(A)$ に対して T_tx は $[0,\infty)$ 上で A に対して formulate された ACP_2 の解となっていることを証明できる．

3. 閉線型作用素の列 A_ν, $\nu=1,2,3,\cdots$ が，ある $T>0$, $\omega\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}^+$ に対して次の条件を満足しているものとする：

(3.1) $\exists\,\omega\in\mathbb{R}:\rho(A_\nu)\supset\{\xi\in\mathbb{R}\,;\,\xi>\omega\}\equiv\Lambda,\quad \nu=1,2,3,\cdots$

(3.2) $\exists\,\lambda_0\in\Lambda,\ \exists M>0:\|\xi^nR(\xi;A_\nu)^nR(\lambda_0;A_\nu)^k\|\leqq M,\ \xi\in\Lambda,\ n/\xi\in[0,T],\ \nu=1,2,\cdots$

すると各 A_ν は (1.5) と (1.4) を満足するから系 1.2 によって A_ν に対する Cauchy 問題の解作用素 $\{U_t^{(\nu)};t\in[0,T]\}\subset\mathcal{B}(D(A_\nu^{2k+1}),X)$ が存在する．更に，次のような条件をおく．

(3.3) $(\forall \xi > \omega)\ \exists N_\xi > 0 : \sup_\nu \| R(\xi ; A_\nu) \| \leq N_\xi$;

(3.4) $\exists \lambda_1 \in \Lambda,\ \exists R(\lambda_1) \in \mathfrak{B}(X)$: $s\text{-}\lim_{\nu \to \infty} R(\lambda_1 ; A_\nu) = R(\lambda_1)$.

するとT.Kato [4; VIII, §1] の理論を適用出来るから,

<u>定理 3.1.</u> $\{A_\nu\}$が条件 (3.1) − (3.4)を満足するならば, Λを含む$\mathbb{C}$のある domain Λ_1とその上に定義される pseudo-resolvent $\{R(\lambda)\}$が存在して, $s\text{-}\lim_{\nu \to \infty} R(\lambda ; A_\nu) = R(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_1$, が成立し,

$$\| \xi^n R(\xi)^n R(\lambda_0)^k \| \leq M, \qquad \xi \in \Lambda,\ n/\xi \in [0, T],$$

特に, もしも $N(R(\lambda_1)) = \{0\}$ for some $\lambda_1 \in \Lambda_1$ ならば, k と ω に対して条件 (1.5), (1.4)を満足する $A \in \mathcal{E}(X)$が存在して $R(\lambda) = R(\lambda ; A)$, $\lambda \in \Lambda_1$, となる.

例えば大春-洲之内[7]で論じたように, もしも $s\text{-}\lim_{\xi \to \infty} \xi R(\xi ; A_\nu) = I$ がνに関して一様に成立するならば, $s\text{-}\lim_{\xi \to +\infty} \xi R(\xi ; A) = I$ となるから $N(R(\lambda)) = \{0\}$である. 今, $N(R(\lambda_1)) = \{0\}$として定理3.1で得られた作用素 A に対して, 系 1.2 によって定まる解作用素を$\{U_t ; t \in [0, T]\}$で表わす. すると次の収束を得る.

<u>定理 3.2.</u> $\{A_\nu\}$が (3.1) − (3.4)を満足し, $N(R(\lambda_1)) = \{0\}$ ならば,

$$s\text{-}\lim_{\nu \to \infty} U_t^{(\nu)} R(\lambda_0 ; A_\nu)^{2k+1} = U_t R(\lambda_0 ; A)^{2k+1}$$

が $t \in [0, T]$ に関して一様に成立する.

かくして定理 2.1 にある半群の収束定理を次のように導くことが出来る. 証明は定理 2.1, (1.4) を基にして大春-洲之内[7]における議論と同様にして得られる. 大春-高橋[8]を参照.

定理 3.3. $k\in\mathbb{Z}^+$ とする. $\{T_t^{(\nu)}; t>0\}$, $\nu=1,2,3,\cdots$ は性質 (2.1), (2.2), $(2.3)_k$ をもつ有界作用素の半群であるとし, A_ν, $\nu=1,2,3,\cdots$ は各 $\{T_t^{(\nu)}\}$ の生成作用素の closure であるとする. これらの列に対して次の条件が成立しているものとする:

(i) $\sup_\nu \|T_t^{(\nu)}x\| < +\infty$ for $t>0$, $x\in X$;

(ii) $\exists\,\omega\in\mathbb{R}$: $\rho(A_\nu)\supset\Lambda=\{\xi\in\mathbb{R};\xi>\omega\}$, $\sup_\nu\|R(\xi;A_\nu)\|<+\infty$ for $\xi>\omega$;

(iii) $\exists\,\omega_1\geqq\omega$, $\exists\,M>0$: $\|T_t^{(\nu)}x\|\leqq Me^{\omega_1 t}\sum_{\ell=0}^{k}\|A_\nu^{\ell}x\|$ for $x\in D(A_\nu^k)$;

(iv) $\exists\,\lambda_0>\omega$, $\exists\,R(\lambda_0)\in\mathcal{B}(X)$: $s\text{-}\lim_{\nu\to\infty}R(\lambda_0;A_\nu)=R(\lambda_0)$ and $\overline{R(\lambda_0)[X]}=X$.

すると Λ を含むある domain Λ_1 で定義される pseudo-resolvent $R(\lambda)$ と有界作用素の半群 $\{T_t\}$ が存在して次の事柄が成立する.

(3.5) $$R(\lambda)=s\text{-}\lim_{\nu\to\infty}R(\lambda;A_\nu),\qquad \lambda>\omega$$

(3.6) $$R(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x\,dt,\qquad \lambda>\omega \text{ and } x\in\Sigma$$

(3.7) $$T_t=s\text{-}\lim_{\nu\to\infty}T_t^{(\nu)},\qquad t>0 \text{ and } x\in X.$$

ここで (3.6) の Σ は $\{T_t\}$ の continuity set であり, (3.7) の収束は $(0,\infty)$ の任意の有界閉区間で一様である. 更に, $R(\lambda)=(\lambda-A)^{-1}$, $\lambda>\omega$, となるような (多価) 作用素 A が存在して, A_0 を $\{T_t\}$ の生成作用素とすると $A^0\subset A$. 特に $N(R(\lambda_0))=\{0\}$ ならば, A は $\{T_t\}$ の生成作用素の閉包となり, $\{T_t\}$ は (2.1), (2.2), $(2.3)_k$ をみたす.

注意. 定理 1.4 を使って, 上の (ii), (iii) を次の条件と置換えて考えることもできる:

(ii)' $\exists\,\omega\in\mathbb{R}$, $\exists\,M>0$: $\rho(A_\nu)\supset\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{C};\mathrm{Re}(\lambda)>\omega\}$, $\|R(\lambda;A_\nu)\|\leqq M(1+|\lambda|)^k$.

II. 非線型作用素の半群

X をBanach空間とし，A は $D(A)\subset X$，$R(A)\subset X$ なる（多価）作用素とする．ただし，$D(A)=\{x\,;\,Ax\neq\emptyset\}$，$R(A)=\bigcup_{x\in D(A)}Ax$．各 $x\in D(A)$ に対して，$|||Ax|||=\inf\{\|y\|\,;\,y\in Ax\}$，$A^0x=\{y\in Ax\,;\,\|y\|=|||Ax|||\}$ とおく．A^0 を A の canonical restriction と呼ぶ．また，F で X の duality mapping を表わす．$S\subset X$ として S からそれ自身への作用素の one-parameter family $\{T_t\,;\,t\geq 0\}$ が以下の条件を満足するとき，これを S 上の半群という：

(i) $T_tT_s=T_{t+s}$，$t,s\geq 0$，$T_0=I$（S 上の恒等写像）；

(ii) 各 $x\in S$ に対して T_tx は $t\geq 0$ で強連続．

また，§I-1において導入したACPにならって非線型（多価）作用素に対するCauchy問題を次のようにformulateする：

CP. 与えられた（多価）作用素 A と X の元 x に対して $[0,\infty)$ 上の X-値関数 $u(t;x)$ で，

(a) $u(t;x)$ は任意の有界区間で強絶対連続；

(b) $u(0;x)=x$ で微分方程式 $(d/dt)u(t)\in Au(t)$ を a.a. $t\geq 0$ に対して満足する，

となるものを求めよ．

以下に於て，上記のような半群の構成やCauchy問題，CP，の解の構成について論ずる．

4. 本節ではCrandall-Liggett [15] の結果の直接の拡張として，D-operatorによって定められる半群についてのべる．

Banach空間 X に定義された（多価）作用素 A がD-operatorであるとは，任意の有界集合 B に対して実数 ω_B が対応して，$x_1, x_2 \in B \cap D(A)$, $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$ とある $f \in F(x_1 - x_2)$ に対して

$$\mathrm{re}\langle y_1 - y_2, f\rangle \leqq \omega_B \|x_1 - x_2\|^2$$

となることをいう．全ての有界集合 B に対して $\omega_B \equiv 0$ となるとき，作用素 A はdissipative operatorとなる．

今D-operatorに対して次の条件を考える：

(I) $\exists \lambda_0 > 0$: $(I - \lambda A)x \cap (I - \lambda A)y = \emptyset$, $x \neq y$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$;

(R) $R(I - \lambda A) \supset D(A)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$;

(E) 任意の $T > 0$ に対して作用素の族 $\{J_\lambda^n; \lambda \in (0, \lambda_0), n\lambda \in [0, T]\}$ はlocally equi-bounded (i.e., 任意の有界集合 B に対して集合 $\bigcup_{\substack{\lambda \in (0,\lambda_0) \\ n\lambda \in [0,T]}} J_\lambda^n(B)$ が有界)；ここに，$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

例えば，任意の有界集合 B に対して $\omega_B = \omega$（定数）となるならば(E)が成立する．また，非負定数 M, N が存在して，$\lambda \in (0, \lambda_0)$ と $x \in D(J_\lambda)$ に対して $\|J_\lambda x\| \leqq (1 + \lambda M)\|x\| + \lambda N$ となるならば，A は(E)をみたす．(R)の代りに次のような条件を考えることもある．

(R_{co}) $R(I - \lambda A) \supset \overline{co}\, D(A)$, $\lambda \in (0, \lambda_0)$; $\overline{co}$ はconvex closureを示す．

(I), (R), (E)を満足するD-operator A は以下にのべるような

性質をもつ; これらの事柄については Chambers-大春[14]にのべておいた.

(4.1) J_λ, $\lambda\in(0,\lambda_0)$, は1価作用素として定義され, $\lambda,\mu\in(0,\lambda_0)$ に対して, $R\left[\frac{\mu}{\lambda}+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)J_\lambda\right]\subset D(J_\mu)$, $J_\lambda x=J_\mu\left[\frac{\mu}{\lambda}x+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)J_\lambda x\right]$, $x\in D(J_\lambda)$.

(4.2) 任意の $T>0$ と有界集合 B に対して実数 $\omega_{B,T}\geqq 0$ が存在して, $\|J_\lambda^n\|_{Lip(B)}\leqq(1-\lambda\omega_{B,T})^{-n}$; $\lambda\in(0,1/\omega_{B,T})$, $n\lambda\in[0,T]$.

(4.3) 各 $x\in D(A)$ と $T>0$ に対して $B_{x,T}\equiv\overline{co}\{J_\lambda^n x;\lambda\in(0,\lambda_0),n\lambda\in[0,T]\}$ は有界で, (4.2)の意味で対応する実数を $\omega_{x,T}$ とする.

(4.4) 各 $x\in D(A)$と $T>0$ に対して実数 $\omega_{x,T}\geqq 0$ が対応して,

$$\|J_\lambda^n x-x\|\leqq\frac{\lambda n}{(1-\lambda\omega_{x,T})^n}|||Ax|||,\ \lambda\in(0,1/\omega_{x,T}),\ n\lambda\in[0,T].$$

従って Crandall-Liggett [ ] の評価と同様にして, $x\in D(A)$, $T>0$, $n\geqq m$, $0<\mu\leqq\lambda<1/\omega_{x,T}$, $0\leqq n\mu$, $m\lambda\leqq T$, $\alpha=\mu/\lambda$, $\beta=1-\mu/\lambda$ となる n,m,μ,λ に対して次の評価を得る.

$$\|J_\mu^n x-J_\lambda^m x\|\leqq(1-\mu\omega_{x,T})^{-n}\sum_{j=0}^{m}\alpha^j\beta^{n-j}\binom{n}{j}\|J_\lambda^{m-j}x-x\|$$
$$+\sum_{j=m}^{n}(1-\mu\omega_{x,T})^{-j}\alpha^m\beta^{j-m}\binom{j-1}{m-1}\|J_\mu^{n-j}x-x\|,\quad \text{従って,}$$

(4.5)
$$\|J_\mu^n x-J_\lambda^m x\|\leqq\{[(n\mu-m\lambda)^2+n\mu(\lambda-\mu)]^{\frac12}\exp[2\omega_{x,T}(n\mu+m\lambda)]$$
$$+[m\lambda(\lambda-\mu)+(m\lambda-n\mu)^2]^{\frac12}\exp[4\omega_{x,T}n\mu]\}|||Ax|||.$$

これから各 $t\geqq 0$ と $x\in D(A)$ に対して, $T_t x=\lim_{n\to\infty}(I-\frac{t}{n}A)^{-n}x$ が存在する事が従う. この結果を基にして次の結果を得る.

<u>定理4.1.</u> D-operator A が(I), (R), (E)を満足するならば, 次のような半群$\{T_t;t\geqq 0\}$が存在する:

(a) $$T_t x = \lim_{\lambda\to+0} J_\lambda^{[t/\lambda]} x, \qquad t \geqq 0,\ x \in D(A),$$

ここに収束は$[0,\infty)$の任意の有界区間で一様である；特に，Aがclosedであるならば上の収束は各$t \geqq 0$と$x \in \overline{D(A)}$に対して成立する；

(b) 任意の有界集合Bと$T>0$に対して実数$\omega_{B,T} \geqq 0$が存在して，

$$\| T_t \|_{Lip(B)} \leqq \exp(\omega_{B,T}\, t), \qquad t \in [0,T];$$

(c) 各$x \in D(A)$に対して$T_t x$は$[0,\infty)$の任意の有界区間でLipschitz連続で$T_0 x = x$.

また，微分可能性についてのCrandall-Liggettの結果をD-operatorの言葉で次のように拡張することができる．まず宮寺[21]に与えられている結果の証明を参照して次の不等式を証明することができる．

補題 4.2. Aは条件(I),(R),(E)を満足するclosed D-operatorであるとし，$\{T_t\}$を定理4.1によって得られる$\overline{D(A)}$上の半群とする．すると任意の有界集合Bに対して実数$\omega_B \geqq 0$が存在して，各$x \in B \cap \overline{D(A)}$と$x_0 \in B \cap D(A)$と$y_0 \in Ax_0$に対して

$$\sup_{\xi^* \in F(x-x_0)} \ \overline{\lim_{t\to+0}}\ \mathrm{re}\left\langle \frac{T_t x - x}{t} + \omega_B (x_0 - x), \xi^* \right\rangle \leqq \sup_{\xi^* \in F(x-x_0)} \langle y_0, \xi^* \rangle.$$

従ってCrandall-Liggett [15; 定理Ⅱの証明]と同様にして，

定理 4.3. Aは条件(I),(R),(E)を満足するclosed D-operatorであるとし，$\{T_t\}$を定理4.1で得られた$\overline{D(A)}$上の半群とする．

もしもある$x\in\overline{D(A)}$に対して$T_t x$が$t_0>0$で強微分可能であるならば，$T_{t_0}x\in D(A)$となり$T'_{t_0}x\in AT_{t_0}x$である．

Xがreflexiveであるとすると，定理4.1(c)から，各$x\in D(A)$に対して$T_t x$はa.a.$t\geqq 0$で強微分可能である．従って，

系4.4. Aはreflexive Banach spaceで定義されたclosed D-operatorで条件(I), (R), (E)を満足しているものとすると，各$x\in D(A)$に対してこれを初期値とする，Aに対してformulateされたCauchy問題，CP，の解が存在する．

5. この節では空間や作用素の形を制限することによって，§4で構成された半群の微分可能性について考察する．

初めにmaximal D-operatorについて考える．B_nを中心0半径nのopen ballsとし，これに対して非負非減少数列$\{\omega_n\}$が与えられているとする．そこで$x,y\in D(A)\cap B_n$, $x'\in Ax$, $y'\in Ay$に対して

$$\mathrm{re}\,\langle x'-y', f^*\rangle \leqq \omega_n \|x-y\|^2$$

となるような$f^*\in F(x-y)$が存在する，という性質をもつD-operator Aの族を$\mathfrak{F}\{\omega_n\}$で表わす．明らかに，任意のD-operator Aに対して$A\in\mathfrak{F}\{\omega_n\}$となる数列$\{\omega_n\}$がある．$\mathfrak{F}\{\omega_n\}$の元$A$を$(D,\{\omega_n\})$-operatorと呼ぶ．$S\subset X$とし，$A\in\mathfrak{F}\{\omega_n\}$とする．もしも$A$の任意の$(D,\{\omega_n\})$-extensionが$S$上で$A$と一致するとき，

A は S 上での maximal $(D,\{\omega_n\})$-operator という．これについて次の性質がある．

(5.1) $A \in \mathcal{F}\{\omega_n\}$ と $S \subset X$ に対して S 上での maximal $(D,\{\omega_n\})$-operator $\tilde{A}$ で $\tilde{A}|_S \supset A|_S$ となるものが存在する．

(5.2) X^* が uniformly convex であり，A が $\overline{D(A)}$ 上での maximal $(D,\{\omega_n\})$-operator であるならば，A は demi-closed となり，各 $x \in D(A)$ に対して Ax は閉かつ凸である．

これらの性質を使って以下のことを証明することが出来る．

<u>定理 5.1.</u> X は uniformly convex dual をもつ Banach 空間とする．

(a) A は $\overline{D(A)}$ 上の maximal $(D,\{\omega_n\})$-operator とする．もしも A が条件 (I), (R), (E) を満足するならば，各 $x \in D(A)$ に対して $(d/dt)T_t x \in A^0 T_t x$, a.a. $t \geq 0$, となるような $D(A)$ 上の一意な半群 $\{T_t\,; t \geq 0\}$ が存在する．

(b) A を 1 価の demi-closed D-operator とする．もしも A が条件 (I), (R), (E) を満足するならば，A がその弱生成作用素となる様な $D(A)$ 上の半群 $\{T_t\,; t \geq 0\}$ が存在する．

<u>定理 5.2.</u> X と X^* は共に uniformly convex であるとする．

(a) 条件 (I), (R), (E) を満足する様な demi-closed (D)-operator A の canonical restriction A^0 が 1 価で $D(A^0) = D(A)$ となるならば，A^0 は各 $x \in D(A)$ に対して $D^+ T_t x = A^0 T_t x$, $t \geq 0$, となる様

なD(A)上の一意な半群の生成作用素となる．

(b) 特に，Aが(R)をみたすclosed dissipative operatorであるならば，A^0はD(A)上の一意な半群の生成作用素となる．

上にのべた結果の詳しい議論については大春[24], Chambers-大春[14]にのべておいた．次に，特別な形の作用素によって定められる半群の微分可能性を取扱う．

Aは条件(R_{co})を満足するdissipative operator, $\{T_t\}$は定理4.1によって得られた$\overline{D(A)}$上の半群であるとする．

$$A_\eta = \eta^{-1}[J_\eta - I],\ \eta>0,\quad U_\eta = A_\eta \mid \overline{co}\,D(A)$$

とおく．すると(4.5)の評価によって各U_ηは$\overline{co}\,D(A)$上の縮小半群$\{T_t^{(\eta)}; t\geq 0\}$の生成作用素となり，各$x\in\overline{D(A)}$に対して，$T_t x = \lim_{\eta\to+0} T_t^{(\eta)} x$となる．これを利用して次のことを証明することができる．

定理 5.3. Xは複素Banach空間，Aは(R)を満足する1価のclosed dissipative operatorとし，$\{T_t\}$は定理4.1から得られる$\overline{D(A)}$上の縮小半群とする．もしも$\overline{D(A)}$が閉凸集合Dの閉苞で，$\lambda>0$に対して$(I-\lambda A)^{-1}$がDでGateaux微分可能ならば，次のことが成立する．

(a) 各$t>0$に対してT_tはDでanalytic，従ってDで連続なFréchet derivative $dT_t(x)$をもつ；

(b) 各$x\in D\cap D(A)$に対して$AT_t x$は$t\geq 0$に関して強連続で，

$$(d/dt)T_t x = AT_t x = dT_t(x)Ax, \qquad t \geqq 0.$$

次に，L は $\overline{D(L)} = X$ なる non-empty resolvent set をもつ閉線型作用素で，Φ は locally bounded な1価作用素とする．そして $D(\Phi) \supset S$，$\overline{D(L\Phi) \cap S} = S$ となるような閉集合 S が存在すると仮定して，

(5.3) $$A = L\Phi|_S$$

とおく．

<u>定理 5.4.</u> X は weakly complete Banach space とし，A は (5.3) で定義され条件 (I) と (R) を満足し，さらに

(5.4) $\overline{D(L^*)} = X^*$ で，Φ は $D(\Phi)$ 上で demi-continuous,

であるとする．そしてある $x \in D(A)$ に対して次の2条件を成立させる数列 $\lambda_j \downarrow 0$ が存在すると仮定する：

(5.5) $(\forall T>0)\ \exists \lambda_T > 0$: $\lambda_T < \lambda_0$, $\sup\{\|AJ_{\lambda_j}^{n_j}x\|;\ \lambda_j \in (0, \lambda_T),\ n_j\lambda_j \in [0,T]\} < +\infty$; ここに $J_\lambda = (I-\lambda A)^{-1}$, $\lambda \in (0, \lambda_T)$;

(5.6) $(\forall t \geqq 0)\ \exists\ y(t;x) = \lim_{j\to\infty} J_{\lambda_j}^{[t/\lambda_j]}x$.

すると，$y(t;x)$ は weakly continuously differentiable で，全ての $t \geqq 0$ に対して方程式 $(w\text{-}d/dt)y(t;x) = Ay(t;x)$ を満足する；ここに $(w\text{-}d/dt)y(t;x)$ は $y(t;x)$ の weak derivative を表わす．さらにまた，$y(t;x)$ は x を初期値とする，A に対して formulate された Cauchy 問題 CP の解である．特に，X が reflexive ならば (5.4) を次の条件で置換えることが出来る：

(5.7) Φ は demi-closed.

定理 4.1 と定理 5.4 を合わせれば (5.3) で定義される作用素の決定する半群について次の結果を得る.

<u>定理 5.5.</u> X は弱完備な Banach 空間であるとし, A は (5.3) によって定義され, 次の 5 条件を満足する作用素であるとする:

(i) 任意の有界集合 B に対して実数 $\omega_B \geq 0$ が存在して, 各 $x, y \in B \cap D(A)$ に対応して $\mathrm{re}\langle L(\Phi x - \Phi y), f\rangle \leq \omega_B \|x-y\|^2$ となるような $f \in F(x-y)$ が定まる;

(ii) $\rho(L) \ni 0$ で条件 (5.4) が成立する; $G = L^{-1}$ とおく.

(iii) 正定数 $\lambda_0 > 0$ が存在して, 各 $\lambda \in (0, \lambda_0)$ に対して作用素 $(G - \lambda\Phi)|_{D(A)}$ は injective;

(iv) 各 $\lambda \in (0, \lambda_0)$ と $v \in G(S)$ に対して方程式 $(G - \lambda\Phi)u = v$ は $u \in S$ となる解 u をもつ;

(v) 正定数 M, N が存在して, 各 $x \in D(A)$ に対して

$$\|x\| \leq (1 + M\lambda)\|x - \lambda L\Phi x\| + N\lambda, \qquad \lambda \in (0, \lambda_0).$$

すると, A は定理 4.1 の (a), (b), (c) を満足する $D(A)$ 上の半群 $\{T_t ; t \geq 0\}$ の weak infinitesimal generator となる. そして, 各 $x \in D(A)$ に対して $T_t x$ は x を初期値とする A に対して formulate された Cauchy 問題の一意な解となる.

6. 以上の生成に関する結果をもとにして，非線型作用素の半群の列の収束性について考えることが出来る.

X_n, $n=1,2,3,\cdots$ を Banach 空間 X の部分集合の列とする. $\{T_t^{(n)};t\geqq 0\}$ を各 X_n 上の(非線型)作用素の半群とし，A_n でその生成作用素を表わす. また，$\{T_t;t\geqq 0\}$ を部分集合 X_0 上の半群とし，A でその弱生成作用素を表わす. そしてこの様な半群の列 $\{T_t^{(n)}\}$ と生成作用素の列 $\{A_n\}$ に対して以下に挙げる条件が成立していると仮定する:

(6.1) 空でない集合 $D\left(\subset \bigcap D(A_n)\right)$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax, \qquad x\in D;$$

(6.2) 数列 $\delta_n \downarrow 0$ が存在して，各 $n\geqq 1$ と $x, y\in D(A_n)$ に対して

$$re\langle A_n x - A_n y, f\rangle \leqq \delta_n$$

となるような $f\in F(x-y)$ が存在する;

(6.3) ある $D_0(\subset D)$ が存在して，各 $x\in D_0$ に対して以下の2条件が満足される.

a) $T_t x$ と $T_t^{(n)}x$ は $[0,\infty)$ の任意の有界区間で強絶対連続で;

$$T_t^{(n)}x\in D(A_n) \text{ for a.a. } t\geqq 0,\ n=1,2,\cdots;\ T_t x\in D \text{ for a.a. } t\geqq 0;$$

b) $\exists\, \varphi_x\in L^1_{loc}(0,\infty)$: $\varphi_x(t)\geqq 0$,

$$\|A_n T_t^{(n)}x\|\leqq \varphi_x(t) \text{ for a.a. } t\geqq 0,\ n=1,2,\cdots;\ \|AT_t x\|\leqq \varphi_x(t) \text{ for a.a. } t\geqq 0.$$

定理 6.1. 生成作用素の列 $\{A_n\}$ に対して条件 (6.1)–(6.3) が満足されるならば，各 $x\in D_0$ と $t\geqq 0$ に対して次の収束が成立つ.

$$(6.4)\qquad T_t x = \lim_{n\to\infty} T_t^{(n)} x,$$

ここで収束は任意の有界区間で一様で，$T_t|_{D_0}$ は contraction.

上に得られた収束(6.4)と前節にのべた生成についての結果を合わせて，いくつかの収束定理を導くことが出来る．例えば，定理5.2 (b)と(6.4)を合わせると次の様な収束定理が得られる．

系 6.2. X と X^* は共に uniformly convex であるとする．$\{T_t^{(n)};\, t\geq 0\}$, $n=1,2,3,\cdots$, を部分集合 X_n 上の縮小半群とし，A_n でその生成作用素を表わす．今条件(R)を満足する closed dissipative operator A が存在して，$\lim_{n\to\infty} A_n x = A^0 x$, $x\in D(A)$, となるならば A^0 は $D(A)$ 上の半群 $\{T_t\}$ の生成作用素となり，$x\in D(A)$ と $t\geq 0$ に対して収束(6.4)が成立する．

以上の結論は宮寺[19,20]と同様にして導き出される．次に，Banach空間 X における D-operators の列 $A^{(k)}$, $k=0,1,2,\cdots$, を考える．そしてこれに対して次の条件が満足されているものと仮定する：

$(D)_0$ 任意の有界集合 B に対して実数 ω_B が対応して，$k\in Z^+$, $x, y\in B\cap D(A^{(k)})$, $x'\in A^{(k)}x$, $y'\in A^{(k)}y$ に対して

$$\mathrm{re}\langle x'-y', f\rangle \leq \omega_B \|x-y\|^2$$

となる $f\in F(x-y)$ が存在する．

$(I)_0$ $\exists \lambda_0>0$: $(I-\lambda A^{(k)})x \cap (I-\lambda A^{(k)})y=\emptyset$, $x\neq y$, $\lambda\in(0,\lambda_0)$, $k\in Z^+$.

(R)$_0$　$R(I-\lambda A^{(k)}) \supset D(A^{(k)})$　for $\lambda\in(0,\lambda_0)$ and $k\in\mathbb{Z}^+$.

(E)$_0$ 任意の $T>0$ に対して，作用素の族 $\{J_\lambda^{(k)n}; \lambda\in(0,\lambda_0), n\lambda\in[0,T], k\in\mathbb{Z}^+\}$ は locally equi-bounded；ただし $J_\lambda^{(k)}=(I-\lambda A^{(k)})^{-1}$.

すると定理 4.1 により各 $k\in\mathbb{Z}^+$ に対して $\overline{D(A^{(k)})}$ 上の半群 $\{T_t^{(k)}\}$ が構成される．また，任意の有界集合 B と $T>0$ に対して k には独立な実数 $\omega_{B,T}\geqq 0$ が対応して

(6.5)　$\| J_\lambda^{(k)n}\|_{Lip(B)} \leqq (1-\lambda\omega_{B,T})^{-n}$　for $\lambda\in(0,1/\omega_{B,T})$ and $n\lambda\in[0,T]$.

一方各 $x\in D(A)$, $T>0$, $\lambda_1\in(0,\lambda_0)$ に対して $B_{x,T}\equiv\overline{co}\{J_\lambda^{(k)n}J_\lambda^{(k)}x; \lambda\in(0,\lambda_0), n\lambda\in[0,T], k\in\mathbb{Z}^+\}$ が有界であることから，実数 $\omega_{x,T}\geqq 0$ が存在して，$\|J_\lambda^{(k)n}J_{\lambda_1}^{(k)}x - J_{\lambda_1}^{(k)}x\| \leqq n\lambda(1-\lambda\omega_{x,T})^{-n}\|A_{\lambda_1}^{(k)}x\|$, $A_{\lambda_1}^{(k)}=\lambda_1^{-1}[J_{\lambda_1}^{(k)}-I]$. 従って (4.5) を得たと同様にして，十分大なる整数 m, n, $m\leqq n$ と $t\in[0,T]$ に対して

$$\|J_{\frac{t}{n}}^{(k)n}J_{\lambda_1}^{(k)}x - J_{\frac{t}{m}}^{(k)m}J_{\lambda_1}^{(k)}x\| \leqq 2T\sqrt{\tfrac{1}{m}-\tfrac{1}{n}}\; e^{4\omega_{x,T}T}\|A_{\lambda_1}^{(k)}x\|.$$

(6.5) とこの評価をもとにして次の収束定理を得る．

<u>定理 6.3.</u>　上にのべた D-operators の列 $\{A^{(k)}\}$ について，

(6.6)　$\overline{D(A^{(k)})}\supset\overline{D(A^{(0)})}$　for $k\in\mathbb{Z}^+$,

(6.7)　$\lim\limits_{k\to\infty} J_\lambda^{(k)}x = J_\lambda^{(0)}x$,　for $x\in D(A^{(0)})$, $\lambda\in(0,\lambda_0)$,

が成立するならば，各 $x\in\overline{D(A^{(0)})}$ に対して任意の有界区間で一様に，

$$T_t^{(0)}x = \lim_{k\to\infty} T_t^{(k)}x, \qquad t\geqq 0.$$

References

I. 1 Chazarain, J., Problemes de Cauchy au sens des distributions vectorielles et applications, C. R. Acad. Sc. Paris, 266 (1968), 10–13.

2. Fujiwara, D., A characterization of exponential distribution semigroups, Jour. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 267–274.

3. Hille, E. and Phillips, R.S., Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31 (1957),

4. Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, (1966).

5. Kōmura, T., Semigroups of operators in a locally convex space, Jour. Func. Anal., 2 (1968), 258–296.

6. Krein, S.G., Linear differential equations in Banach spaces, (in Russian), Nauka, (1967).

7. Oharu, S. and Sunouchi, H., On the convergence of semigroups of linear operators, Jour. Func. Anal., to appear.

8. Oharu, S. and Takahashi, K., Approximation of linear semigroups, in preparation.

9. Oharu, S., Semigroups of linear operators in a Banach space, to appear.

10. Okazawa, N. and Oharu, S., Abstract Cauchy problems and semigroups of linear operators, to appear.

11. Ushijima, T., Some properties of regular distribution semi-groups, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 224–227.

12. Ushijima, T., On the strong continuity of distribution semi-groups, to appear.

II. 13. Brezis, H. and Pazy, A., Semigroups of nonlinear contractions on convex sets, Jour. Func. Anal., to appear.

14. Chambers, J. and Oharu, S., Semigroups of local Lipschitzians in a Banach space, to appear.

15. Crandall, M. and Liggett, T., Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, to appear.

16. Kōmura, Y., Differentiability of nonlinear semigroups, Jour. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 375-402.

17 Kato, T., Nonlinear semigroups and evolution equations, Jour. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508-520.

18 Kato, T., Accretive operators and nonlinear evolution equation in Banach spaces, Proc. Symp. Nonlin. Func. Anal., Chicago, A.M.S. (1968).

19. Miyadera, I., On the convergence of nonlinear semi-groups, Tôhoku Math. Jour., 21 (1969), 221-236.

20 Miyadera, I., Approximation of nonlinear semigroups, 京大数解研講究録 (1969).

21. Miyadera, I., Some remarks on semi-groups of nonlinear operators, to appear.

22. Miyadera, I. and Oharu, S., Approximation of semi-groups of nonlinear operators, Tôhoku Math. Jour., 22 (1970), 24-47.

23. Oharu, S., A note on the generation of nonlinear semigroups in a locally convex space, Proc. Japan Acad., 43(9) (1967), 847-851.

24. Oharu, S., On the generation of semigroups of nonlinear contractions, Jour. Math. Soc. Japan, 22 (1970), to appear.

25. Oharu, S., A note on the generation of nonlinear semigroups in Banach spaces, 数学論文集, 早大・教育・数学教室 (1970), to appear.