数理解析研究所講究録
第 106 巻 1971 年 178-188

非線形半群についての注意

早稲田大 教育　宮寺　功

X を Banach 空間，X_0 を X の空でない部分集合とする．つぎの (i) ~ (iii) を満たす作用素 $T(t): X_0 \to X_0$ の族 $\{T(t)\,;\, t \geqq 0\}$ を contraction semi-group on X_0 と呼ぶことにする．

(i)　$\|T(t)x - T(t)y\| \leqq \|x - y\|$, $t \geqq 0$, $x, y \in X_0$

(ii)　$T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s \geqq 0$

(iii)　$\lim_{t \to 0+} T(t)x = x$, $x \in X_0$.

$\{T(t)\,;\, t \geqq 0\}$ の i.g. A_0, w.i.g. A' をつぎの式により定義する．

$$A_0 x = \lim_{h \to 0+} h^{-1}(T(h)x - x)$$

$$A' x = w\text{-}\lim_{h \to 0+} h^{-1}(T(h)x - x).$$

定義域 $D(A)$，値域 $R(A)$ ともに X の部分集合である

ような，必ずしも一価でない作用素Aを考える．かゝるAに対して

$$|||Ax||| = \inf\{\|x'\|;\ x' \in Ax\}$$
$$A^\circ x = \{x' \in Ax;\ \|x'\| = |||Ax|||\}$$

，$x \in D(A)$，とおく．

各 $x, y \in D(A)$，$x' \in Ax$，$y' \in Ay$ に対して

$$\mathrm{Re}\,(x' - y',\ \xi^*) \leqq 0$$

を満たす $\xi^* \in F(x-y)$ が存在するとき，Aを dissipative operator という，こゝに Re（ ，）は（ ，）の実部を表わし，$F(x) = \{x^* \in X^*;\ (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$．

また，作用素Aのグラフが $X \times X$ において閉集合であるとき，Aを closed operator という．

最近 Crandall and Liggett [3] は非線形半群の生成に関してつぎの著しい結果を与えた．

定理I．Aを dissipative operator とし，

(C_1) $R(I - \lambda A) \supset D(A)$，$\lambda > 0$

を仮定する．このとき，つぎの (1)，(2) を満足する contraction semi-group $\{T(t);\ t \geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ が

存在する.

(1) $T(t)x = \lim_{\lambda \to 0+} (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]} x, \quad x \in R \cap \overline{D(A)}, t \geqq 0,$

ただし $R = \bigcap_{\lambda>0} R(I - \lambda A)$,

(2) $\| T(t)x - T(s)x \| \leqq |||Ax||| \, |t - s|, \quad x \in D(A), \ t, s \geqq 0.$

定理II. A を closed dissipative operator とし,

(C_2) $R(I - \lambda A) \supset \mathrm{co}\, D(A), \quad \lambda > 0$

を仮定する, ただし co D(A) は D(A) の convex hull.

$\{T(t);\ t \geqq 0\}$ を定理I により与えられる contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ とする.

$x \in \overline{D(A)}$ とする. 若し $T(t)x$ が $t_0 > 0$ で強微分可能ならば

(3) $T(t_0)x \in D(A), \ [(d/dt)T(t)x]_{t=t_0} \in AT(t_0)x.$

この定理から, X が回帰的(reflexive)ならば各 $x \in D(A)$ に対して (3) が a.e. $t_0 (\geqq 0)$ で成立する. 実際 $x \in D(A)$ のとき, (2) と X の回帰性から, $T(t)x$ は a.e. $t_0 (\geqq 0)$ で強微分可能となるからである([6]).

この小論の才1の目的はつぎのことである.

(a) 定理II において (C_2) を (C_1) に弱めることができる,

即ち　A が closed dissipative で (C_1) を満たせば，定理Ⅱの結論は成立している．

その証明はつぎの補助定理に基づく．補助定理を述べる前に少し準備をしておく．

関数 $\langle\ ,\ \rangle_s : X\times X \to (-\infty, \infty)$ を

$$\langle x, y\rangle_s = \sup\{\mathrm{Re}(x, y^*)\ ;\ y^*\in F(y)\}$$

により定義する．

(4) $\langle\ ,\ \rangle_s : X\times X \to (-\infty,\infty)$ は上半連続である

([3]).

A を dissipative operator とし

(C_1') 　 $R(I-\lambda A)\supset \overline{D(A)}$, $\lambda>0$

と仮定する．

$$J_\lambda = (I-\lambda A)^{-1}\ ,\quad A_\lambda = \lambda^{-1}(J_\lambda - I)\ ,\quad \lambda>0$$

とおくと $\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leqq \|x-y\|$, $x, y\in R(I-\lambda A)$

で，かつ

(5) 　 $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, $x\in R(I-\lambda A)$

(6) 　 $\|A_\lambda x\| \leqq |||Ax|||$, $x\in D(A)$, $\lambda>0$.

また，定理Ⅰから，contraction semi-group $\{T(t)\,;\ t\geqq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ が存在して

(7) 　 $T(t)x = \lim\limits_{\lambda\to 0+} J_\lambda^{[t/\lambda]}x \ \left(= \lim\limits_{\lambda\to 0+}(I-\lambda A)^{-[t/\lambda]}x\right)$

$, \quad x \in \overline{D(A)}, \quad t \geqq 0 .$

補助定理. Aは(C_1')を満たすdissipative operatorとし, $\{T(t);\ t \geqq 0\}$を(7)により定義されるcontraction semi-group on $\overline{D(A)}$とする.

$x \in \overline{D(A)}$, $x_0 \in D(A)$, $y_0 \in Ax_0$ ならば

$$\sup_{s^* \in F(x-x_0)} \left\{ \limsup_{t \to 0+} \mathrm{Re}\left(\frac{T(t)x - x}{t}, s^* \right) \right\} \tag{8}$$

$$\leqq \langle y_0, x - x_0 \rangle_s .$$

証明. $\| J_\lambda^{[t/\lambda]} x_0 - x_0 \| \leqq t |||Ax_0|||$ のゆえ

(9) $\| J_\lambda^{[t/\lambda]} x - x_0 \| \leqq \| x - x_0 \| + t |||Ax_0|||$.

$\lambda > 0$, 正整数kに対して

$$y_{\lambda,k} \equiv \lambda^{-1} (J_\lambda^k x - J_\lambda^{k-1} x) \in AJ_\lambda^k x .$$

Aはdissipativeのゆえ, 適当な$\eta^* \in F(J_\lambda^k x - x_0)$を選ぶと

(10) $\mathrm{Re}(y_{\lambda,k} - y_0, \eta^*) \leqq 0$.

$\mathrm{Re}(y_{\lambda,k}, \eta^*) = \lambda^{-1} \mathrm{Re}(J_\lambda^k x - x_0 - \{J_\lambda^{k-1} x - x_0\}, \eta^*)$

$\geqq \lambda^{-1} (\| J_\lambda^k x - x_0 \|^2 - \| J_\lambda^{k-1} x - x_0 \| \| J_\lambda^k x - x_0 \|)$

$\geqq (2\lambda)^{-1} (\| J_\lambda^k x - x_0 \|^2 - \| J_\lambda^{k-1} x - x_0 \|^2)$; よって

$$\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\|^2 \leqq 2\lambda \operatorname{Re}(y_{\lambda,k}, \eta^*)$$

$$\leqq 2\lambda \operatorname{Re}(y_0, \eta^*) \quad ((2.10)\text{ を用いた})$$

$$\leqq 2\lambda < y_0, J_\lambda^k x - x_0 >_s .$$

$J_\lambda^{[\tau/\lambda]} x = J_\lambda^k$, $k\lambda \leqq \tau < (k+1)\lambda$ のゆえ

$$\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\|^2$$

(11)
$$\leqq 2\int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} < y_0, J_\lambda^{[\tau/\lambda]} x - x_0 >_s d\tau .$$

$t \geqq \lambda$ とし, (11) を $k=1, \cdots, [t/\lambda]$ について加えると

$$\|J_\lambda^{[t/\lambda]} x - x_0\|^2 - \|x - x_0\|^2$$

$$\leqq 2\int_{\lambda}^{([t/\lambda]+1)\lambda} < y_0, J_\lambda^{[\tau/\lambda]} x - x_0 >_s d\tau .$$

lim sup ($\lambda \to 0+$ として) をとると, (4) 及び (9) から Lebesgue の収束定理により

$$\|T(t)x - x_0\|^2 - \|x - x_0\|^2$$

$$\leqq 2\int_0^t < y_0, T(\tau)x - x_0 >_s d\tau .$$

$\|T(t)x - x_0\|^2 - \|x - x_0\|^2 \geqq 2\operatorname{Re}(T(t)x - x, \xi^*)$, $\xi^* \in F(x - x_0)$ のゆえ

(12) $\operatorname{Re}(T(t)x - x, \xi^*) \leqq \int_0^t < y_0, T(\tau)x - x_0 >_s d\tau$

, $t > 0$.

$T(\tau)x$ は $\tau \geqq 0$ について強連続であるから，(4) により，$< y_0, T(\tau)x - x_0 >_s$ は $\tau \geqq 0$ に関して上半連続である．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して

$$< y_0, T(\tau)x - x_0 >_s \; < \; < y_0, x - x_0 >_s + \varepsilon \;, \quad 0 \leqq \tau < \delta .$$

(12) から

$$\mathrm{Re}\left(\frac{T(t)x - x}{t} \,,\, 5^* \right) \leqq \; < y_0, x - x_0 >_s + \varepsilon \;, \quad 0 < t < \delta$$

即ち

$$\limsup_{t \to 0+} \mathrm{Re}\left(\frac{T(t)x - x}{t} \,,\, 5^* \right) \leqq \; < y_0, x - x_0 >_s \;,$$

$5^* \in F(x - x_0)$.　　　　証明終．

さて A が closed dissipative ならば，各 $\lambda > 0$ に対して $R(I - \lambda A)$ は closed．よって (C_1) から (C_1') がともなう，従って補助定理の (8) が成立する．[3] におけると同様にして (a) が得られる．（定理 II [3] の証明で条件 (C_2) は上の不等式 (8) を得るためにのみ用いられている．）

上の補助定理を用いてつぎのことが得られる．

(b)　A は (C_1) を満足する maximal dissipative operator in $\overline{D(A)}$ とし，$\{T(t) ; t \geqq 0\}$ を定理 I により与えられる contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ とする．

A° は一価であると仮定する.

(i') X が reflexive ならば, $D(A^\circ) = D(A)$, A° は $\{T(t); t \geqq 0\}$ (on $\overline{D(A)}$) の w. i. g. で, しかも

$$(w\text{-}D^+)T(t)x = A^\circ T(t)x, \quad x \in D(A), \quad t \geqq 0$$

(ii') X が uniformly convex ならば, $D(A^\circ) = D(A)$, A° は $\{T(t); t \geqq 0\}$ (on $\overline{D(A)}$) の i. g. で, しかも

$$D^+ T(t)x = A^\circ T(t)x, \quad x \in D(A), \quad t \geqq 0,$$

ただし $D^+ T(t)x$ ($(w\text{-}D^+)T(t)x$) は $T(t)x$ の強(弱)右側微係数を表わす.

上の (e) からつぎの結果がえられる.

(e') X, X^* がともに uniformly convex, A が (c_1) を満足する closed dissipative operator ならば, A° は一価で $D(A^\circ) = D(A)$, しかも A° を i. g. としてもつ unique contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ が存在する.

最后に, 定理 I の逆の問題を考えて見る. すなわち, 1つの contraction semi-group $\{T(t); t \geqq 0\}$ on X_0 を与えたとき,

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to 0+} (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]} x, \quad x \in X_0$$

となる如き dissipative operator A が存在するか?

これからは X_0 を closed convex set とする．X が Hilbert 空間のときには，これは肯定的に解決されている（$\{T(t); t \geq 0\}$ の i.g. の maximal dissipative extension を考えればよい）．Banach 空間では未解決であるが，これに関連するものとしてつぎのことが成立する．

(c) $\{T(t); t \geq 0\}$ を contraction semi-group on X_0 とし，$A^h = h^{-1}(T(h) - I)$，$E = \{x \in X_0 ; \|A^h x\| = O(1), h \to 0+\}$ とおく．このとき各 $x \in \bar{E}$ に対し

$$T(t)x = \lim_{(\lambda, h) \to (0,0)} (I - \lambda A^h)^{-[t/\lambda]} x$$

が $[0, \infty)$ の各有界区間上で一様に成立している．

実際，[8] 及び [3] の中の評価から

$$\| T([t/h]h)x - (I - \lambda A^h)^{-[t/\lambda]} x \|$$
$$\leqq \{ \sqrt{th} + h + 2(\lambda^2 + \lambda t)^{1/2} \} \| A^h x \|$$

$x \in X_0$，$t \geq 0$，$\lambda > 0$，$h > 0$ がえられるからである．

文献

[1] H. Brezis and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions on convex sets, to appear in J. of Functional Analysis.

[2] ——————, Accretive sets and differential equations in Banach spaces, to appear.

[3] M. G. Crandall and T. M. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, to appear.

[4] M. G. Crandall and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. of Functional Analysis, 3 (1969), 376 – 418.

[5] T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Nonlinear Functional Analysis, Chicago, Amer. Math. Soc., (1968).

[6] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493 – 507.

[7] ——————, Differentiability of nonlinear

semi-groups, J. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 375 – 402.

[8] I. Miyadera, Approximation of nonlinear semi-groups, 京大数解研講究録 (1969).

[9] ____________, Some remarks on semi-groups of nonlinear operators, to appear.

[10] I. Miyadera and S. Oharu, Approximation of semi-groups of nonlinear operators, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 24 – 47.

[11] S. Oharu, On the generation of semi-groups of nonlinear contractions, to appear in J. Math. Soc. Japan.