

Asymptotic Fields in the $\lambda(\phi^4)_2$ QFT
with Space Cutoff.

神戸大 教有 加藤 祐輔
理 夏林 布道

§ 1. 序

場の量子論における漸近場の存在を Fock space における場の作用素の強極限として証明する試みは Regular perturbation の場合 [1], [2], Totally smooth perturbation の場合 [3] にみられる。最近 Glimm, Jaffe [4~6] が Singular perturbation [7] によって $\lambda(\phi^4)_2$ 理論の解の存在証明に成功したのでここではこのモデルについて漸近場の存在を調べる。Regular perturbation の際にもちいた方法を拡張して適用するにあたり Singular perturbation に特有の問題と、このモデルにあつて時空全体の次元数が4でなく2であることを適切に処理しなければ存しない。Asymptotic fields の存在、それらの間の正規交換関係の成立、Total Hamiltonian の Spectrum (の部分) などを明らかにすることができた。

§ 2. 定義および $\lambda(\phi^4)_2$ 理論における既知事項

質量 $m > 0$ の中性スカラー場 $\phi(x)$ を扱う。

$$\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{ikx} [a^*(k) + a(-k)] (2\omega(k))^{-\frac{1}{2}} dk,$$

$$[a(k), a^*(k')] = \delta(k - k'),$$

$$\omega(k) = (k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$H_0 = \int \omega(k) a^*(k) a(k) dk \quad ; \text{ Free Hamiltonian,}$$

Ω_0 , $H_0 \Omega_0 = 0$; H_0 の最低固有状態

$D : \prod_{i=0}^n \phi(f_i) \Omega_0$ の 1 次結合

n 有限, $f_i \in \mathcal{S}(R^1)$,

D は Fock space \mathcal{F} に稠密.

$$H = H_0 + \lambda \int : \phi^4(x) : g(x) dx$$

$$= H_0 + H_I \quad ; \text{ Total Hamiltonian,}$$

$$\lambda g(x) \geq 0, \quad g(x) \in C_0^\infty(R^1(x))$$

次の関係が知られてゐる [4], [7].

$$H_0^2 + H_I^2 \leq (1 + \varepsilon)(H + b)^2, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon H_0 + H_I + b \geq 0, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon H_0^2 + [H_0^{\frac{1}{2}}, [H_0^{\frac{1}{2}}, H_I]] + b \geq 0, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon N^3 + [N, [N, H_I]] + b \geq 0. \quad (2.4)$$

(2.1), (2.2) は $D' \times D'$, (2.3), (2.4) は $D_0 \times D_0$ の 2 次形式として考へる。ただし $D' \equiv D(H) = D(H_0) \cap D(H_I)$,

$D_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(H_0^n)$. $\varepsilon > 0$ は任意, b は十分大でいすれど
各式に ε を異つてよい。なお $D^n = D(H^n)$, $D^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} D^n$.

粒子数 $N = \int a^*(k)a(k)dk$ に対しては

$$mN \leq H_0 \quad (2.5)$$

また H の最低スペクトルは縮退のない真スペクトルで

$$H\psi_0 = E_0\psi_0.$$

かつ H は $[E_0, E_0 + m - \varepsilon]$ でコンパクト作用素。

$f \in L^2(\mathbb{R}_1)$ のとき

$$a\{f\} = \int a(k)f(k)dk$$

に対して

$$\begin{aligned} a_f(t) &= e^{iHt} e^{-iH_0 t} a\{f\} e^{iH_0 t} e^{-iHt} \\ &= e^{iHt} a\{f e^{i\omega t}\} e^{-iHt} \end{aligned}$$

を考へ $a_{\pm}\{f\} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} a_f(t)$

の存在および次の関係を次節で調べたい。

$$[a_{\pm}\{f\}, a_{\pm}^*\{g\}] = (f, g) \quad (f, g \in L^2),$$

$$[H, a_{\pm}\{f\}] = -a_{\pm}\{\omega f\} \quad (\omega f \in L^2) \quad \forall \psi,$$

$$a_{\pm}\{f\}\psi_0 = 0 \quad \forall \psi.$$

なお

$$\begin{aligned} W_{j,l} &= \int w(k_1, \dots, k_l) a^*(k_1) \dots a^*(k_j) a(-k_{j+1}) \dots a(-k_l) \prod_{i=1}^l dk_i \\ w(k) &\in L^2(\mathbb{R}^l), \quad \psi \in D((N+l)^{\frac{l}{2}}) \text{ のとき [4] に } \\ \|W_{j,l}\psi\| &\leq \text{const.} \cdot \|w\| \cdot \|(N+l)^{\frac{l}{2}}\psi\| \quad (2.6) \end{aligned}$$

§3. Asymptotic Fields の存在と H の Spectrum.

まず主要な結論を述べる。

定理 3.1. $\psi \in D^2$, $f \in L^2(\mathbb{R}^1)$ のとき

$$\begin{aligned} a_{\pm}\{f\}\psi &= s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} a\{fe^{i\omega t}\} e^{-iHt} \psi \\ &= a\{f\}\psi + i \int_0^{\pm\infty} dt e^{iHt} [H_{\pm}, a\{fe^{i\omega t}\}] e^{-iHt} \psi. \end{aligned}$$

(a^* についての同様の)

定理 3.2.

i) $a_{\pm}\{f\}\psi, a_{\pm}^*\{\bar{f}\}\psi \in D'$ ($\psi \in D^3, f \in L^2$),

ii) $[H, a_{\pm}\{f\}]\psi = -a_{\pm}\{\omega f\}\psi, [H, a_{\pm}^*\{\bar{f}\}]\psi = a_{\pm}^*\{\omega \bar{f}\}\psi$
($\psi \in D^3, \omega f \in L^2$).

定理 3.3.

$$H\psi_j = E_j\psi_j \quad j=0, 1, 2, \dots, r$$

$$E_0 < E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_r \quad (r: \text{infinite かもしれない})$$

(E_0, ψ_0 は §2 で定義)

に対して

$$a_{\pm}\{f\}\psi_j = 0, \quad f \in L^2$$

$$\prod_{i=0}^n a_{\pm}^*\{\bar{f}_i\}\psi_j \in \mathcal{F} \quad (n: 0, \text{正整数}).$$

定理 3.4 漸近場に対して正準交換関係が成り立つ:

$$[a_{\pm}\{f\}, a_{\pm}^*\{g\}]\psi = (f, g)\psi \text{ 左右} \quad (\psi \in D^*),$$

以上の諸定理から

$$\mathcal{F} = \left(\sum_{j=0}^r \oplus \mathcal{F}_{j,\pm} \right) \oplus \mathcal{F}'_{\pm},$$

ここで $\mathcal{F}_{j\pm}$ は定理 3.3 で与えた要素で張られ,

$$U_{j\pm} \mathcal{F} = \mathcal{F}_{j\pm}$$

とあるように等長作用素 $U_{j\pm}$ が存在する。 H の $\mathcal{F}_{j\pm}$ 上の spectrum は H_0 の \mathcal{F} での spectrum と一致する。

定理 3.1 の証明はまず $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ から $f(0) = f'(0) = 0$ なる f に対して与え、のちに $f \in L^2$ に拡張する。

また $\frac{d}{dt} e^{iHt} a\{f e^{i\omega t}\} e^{-iHt} \psi$ を計算するために形式的な恒等式

$$\begin{aligned} & \text{等式} \quad (e^{iHt} a\{f e^{i\omega t}\} e^{-iHt} - a\{f\}) / t \\ & = e^{iHt} a\{f e^{i\omega t}\} \left(\frac{e^{-iHt} - 1}{t} + iH \right) - e^{iHt} a\{f e^{i\omega t}\} iH \\ & \quad + e^{iHt} a\{F(f, t)\} + e^{iHt} a\{i\omega f\} + \left(\frac{e^{iHt} - 1}{t} - iH \right) a\{f\} \\ & \quad + iH a\{f\}, \quad \left(F(f, t) = f \left(\frac{e^{i\omega t} - 1}{t} - i\omega \right) \right), \end{aligned}$$

を利用する。最後の 2 項を正しく扱うためには次の 2 つの Lemmas を必要とする。

Lemma 3.1. $\psi \in D^2$, $f \in C_0^\infty$ のとき

$$[H_I, a\{f\}] \psi \in \mathcal{F}.$$

Lemma 3.2. $\psi \in D^2$, $f \in C_0^\infty$ のとき

$$H a\{f\} \psi = [H_I, a\{f\}] \psi - a\{\omega f\} \psi + a\{f\} H \psi.$$

さき Lemma 3.1 の証明のために次の Lemma が必要。

Lemma 3.3. $\psi \in D^2$, $f(k_1, k_2, k_3) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ のとき

♠

$\| \int f(k_1, k_2, k_3) a^\#(k_1) a^\#(k_2) a^\#(k_3) dk_1 dk_2 dk_3 \psi \| < c \|f\| \|(H+b)^2 \psi\|$,
 ここで $a^\#$ は a または a^* , c は f, ψ に無関係。

(この Lemma の証明は §4) — 欄外 [註] 参照

以上の Lemmas により $\psi \in D^2, f \in C_0^\infty$ のとき

$$\frac{d}{dt} a_f(t) \psi = i e^{iHt} [H_I, a_f e^{i\omega t}] e^{-iHt} \psi$$

あるいは

$$a_f(t) \psi - a_f \psi = i \int_0^t d\tau e^{iH\tau} [H_I, a_f e^{i\omega\tau}] e^{-iH\tau} \psi.$$

$t \rightarrow \pm\infty$ は次の Lemmas により可能である。

Lemma 3.4. $\| \int_{t_1}^{t_2} d\tau e^{iH\tau} [H_I, a_f e^{i\omega\tau}] e^{-iH\tau} \psi \| < c \|(H+b)^2 \psi\| \int_{t_1}^{t_2} d\tau F_f(\tau)^{\frac{1}{2}}$,

$$F_f(t) = \int dk_1 dk_2 dk_3 \left| \int dk \frac{f(k)}{\sqrt{\omega}} e^{i\omega t} \frac{g(k+k_1+k_2+k_3)}{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3}} \right|^2.$$

c は $\psi \in D^2, f \in C_0^\infty$ に無関係 (証明略)

Lemma 3.5. $f(k) \in C_0^\infty, f(0) = f'(0) = 0$ のとき

$$t > B \text{ で } |F_f(t)| < A/t^3 \quad (A, B \text{ 十分大}) \quad (\text{証明略})$$

以上の Lemmas と [1] のオノ論文, 定理 5.1 のオノに従い定理 3.1 が証明される。他の定理についても同様に証明できる。

[註] 研究会での報告では, 証明は $\| \lambda g \|^2 < \text{const. } m^3$ の条件のもとで可能であるとした。その後検討した結果この制限は不要であることが判明した。

§4. Lemma 3.3 の証明.

Lemma 4.1.

$$h_n(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_n}{\omega(\alpha - \alpha_1) \cdots \omega(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) \omega(\alpha_{n-1})} \leq M < \frac{2(2n)^n}{\pi n m},$$

$$\|g\|^2 \equiv \int \frac{|g(\sum_{i=1}^4 k_i)|^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 < \frac{4^5}{\pi m} \|g\|^2$$

(証明略)

定義 4.1. P_m : \mathcal{F} の m 粒子状態への射影作用素,

$$Q_n = \sum_{m=0}^n P_m, \quad R_n = 1 - Q_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} P_m,$$

$$N_n = N Q_n + n R_n, \quad N_{n\nu} = N_n + \nu \quad (n, \nu: 0, \text{正整数}).$$

定義 4.2. $\psi \in D'$, $\{\phi_m\}$ は \mathcal{F} 中の無限列で

$$\|P_n(\phi_m - \psi)\|^2 + \|P_n H_0(\phi_m - \psi)\|^2 \leq \varepsilon_m^2 (n + \rho)^{-\sigma},$$

$$P_n \phi_m \in P_n D, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0, \quad \rho > 0, \quad \sigma \geq 2.$$

$\psi \in D'$ に対し上記の $\{\phi_m\}$ が $\varepsilon < \varepsilon_0 < 1$ とおけることは容易に示される。 $\psi_m = Q_m \phi_m \in D \subset D'$ とおくと ψ に σ -収束する無限列 $\{\psi_m\}$ が ψ に σ -収束するとして定義する。

まず 2 つの Lemmas を準備する。

Lemma 4.2. $\{\psi_m\}$ が $\psi \in D'$ に σ -収束すると,

$m \rightarrow \infty$ のとき

$$i) \|\psi_m - \psi\| + \|H_0(\psi_m - \psi)\| \rightarrow 0 \quad (\sigma \geq 2), \quad ii) \|H(\psi_m - \psi)\| \rightarrow 0 \quad (\sigma \geq 6).$$

(証明). ii) が重要。 H_I が粒子数を最大で 4 個変化させることと, (2.6) 式から導かれる。(詳細は略)

Lemma 4.3. y : 実数, $x > 1$, $\psi \in D$ のとき

$$\| N_{n+l, \nu+l}^y [N_{n\nu}^x, [N_{n\nu}^2, W_{j\ell}]] \psi \| \leq \ell^2 x^2 \| W \| \cdot \| N_{n+l, \nu+l}^{2x+y-2+\frac{1}{2}} \psi \|.$$

(証明). 2重交換関係を具体的に書き, (2.6) をもちいる。

以上の準備のもとで, 下記の Lemma 4.4, 4.5 が証明され
 るからよって Lemma 4.6, したがって Lemma 3.3. が証
 明される。

Lemma 4.4. $\psi \in D^2$, $\nu \geq 0$, $0 < \beta < m$ (m : 質量) の

$$\text{とき} \quad \| (H+b)^2 \psi \| \geq \beta \| (N+\nu)(H+b) \psi \|,$$

b は十分大, ψ に点関線存数。

(証明). (2.1), (2.5) から直接計算される。

Lemma 4.5. $\psi \in D^2$, $\nu \geq 1$, $0 < \gamma < m$ のとき

$$\| N_{n\nu} (H+b) \psi \| \geq \gamma \| N_{n\nu}^2 \psi \|,$$

b は十分大, ψ , n に点関線存数。

(証明). $m > \theta > \gamma$ として

$$\begin{aligned} & \| N_{n\nu} (H+b) \psi \|^2 - \gamma^2 \| N_{n\nu}^2 \psi \|^2 \\ &= \| N_{n\nu} (H+b - \theta N_{n\nu} + \theta N_{n\nu}) \psi \|^2 - \gamma^2 \| N_{n\nu}^2 \psi \|^2 \\ &\geq \theta \{ (N_{n\nu}^3 \psi, (H+b - \theta N_{n\nu}) \psi) + \text{c.c.} \} + (\theta^2 - \gamma^2) \| N_{n\nu}^2 \psi \|^2. \end{aligned}$$

ここで ψ を σ -収束 ($\sigma \geq 6$) の無限列 $\{\psi_\ell\}$ で近似
 すると $N_{n\nu}^y \psi_\ell \in D'$, $N_{n\nu}^y H \psi_\ell \in \mathcal{F}$ であるため右辺
 の1項の評価が容易となる:

$$\begin{aligned}
& (N_{nv}^3 \psi_l, (H+b-\theta N_{nv}) \psi_l) + c. c. \\
& = 2 (N_{nv}^{\frac{3}{2}} \psi_l, (H+b/2-\theta N_{nv}) N_{nv}^{\frac{3}{2}} \psi) + (\psi_l, [N_{nv}^{\frac{3}{2}}, [N_{nv}^{\frac{3}{2}}, H+b/2-\theta N_{nv}]] \psi_l) \\
& \geq (\psi_l, [N_{nv}^{\frac{3}{2}}, [N_{nv}^{\frac{3}{2}}, H]] \psi_l). \quad (b \text{ 十分大}).
\end{aligned}$$

よこして Lemma 4.2, 4.3 を用いておこす。

$$\begin{aligned}
& \|N_{nv}(H+b)\psi\|^2 - \gamma^2 \|N_{nv}^2 \psi\|^2 \\
& \geq (\theta^2 - \gamma^2) \|N_{nv}^2 \psi\|^2 + \theta b \|N_{nv}^{\frac{3}{2}} \psi\|^2 - \theta \alpha \Gamma_g \|N_{n+4, v+4}^{\frac{3}{2}} \psi\|^2 \\
& \quad - \theta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).
\end{aligned}$$

よする。\$\alpha\$ は定数。\$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0\$ は \$l\$ に依存し \$l \to \infty\$ のとき十分小となりうる。\$b\$ は十分大とする。よこして右辺は正となる。(証明終り)。

Lemma 4.6. \$\psi \in D^2\$ に対し

i) \$\|N_n^2 \psi\| \leq c \|(H+b)^2 \psi\|\$, \$c, b\$ は \$n, \psi\$ に無関係な正数。ii) の \$i)\$ の \$ii)\$ が導かれた。

$$ii) \quad N^2 \psi \in \mathcal{F} \quad \text{か} \rightarrow \quad \|N^2 \psi\| \leq c \|(H+b)^2 \psi\|$$

文 献

- [1] Y. Kato and N. Mugibayashi, P.T.P. 30, 103 (1963),
N. Mugibayashi and Y. Kato, P.T.P. 31, 300 (1964).
- [2] R. Höegh-Krohn, J.M.P. 9, 2075 (1968); 10, 639 (1969);
11, 185 (1970).
- [3] K. O. Friedrichs, Perturbation of spectra in Hilber space.

Amer. Math. Soc., Providence 1965.

- [4] J. Glimm and A. Jaffe, *Phys. Rev.* 176, 1945 (1968).
- [5] ————— —————, *Ann. Math.* 91, 362 (1970)
- [6] ————— —————, To appear
- [7] ————— —————, *C.P.A.M.* 22, 401 (1969)