数理解析研究所講究録
第118巻 1971年 59-87

対称性の自滅とエネルギー・スペクトル

学習院大・理　　江沢 洋

§1 対称性の自滅

これから J. Goldstone の名でよばれる一定理を紹介する．定理の内容は，大雑把にいうと，こうである：量子力学的の体系が力学量の代数$\mathfrak{O}$の自己同型の連続群Γをもち，そのハミルトニアンがΓに関して不変なとき（対称性！），もし《その自己同型がユニタリ変換で遂行できないならば》（対称性の自滅＝spontaneous breakdown of symmetry）エネルギーEのスペクトルは下端$E=0$に連なる区間$[0, \varepsilon]$，$\varepsilon>0$を連続的に埋める ———．

スペクトルに関する定理としては甚だ興味ふかい形をしている．

しかし，自己同型がユニタリ変換でもって遂行できないことを，なぜ対称性の自滅というのか？

それを説明するには，量子力学における対称性の記述を最

を一般的にあたえることから始めなければならない．正値

量子力学的な状態とは，力学量の代数$\mathfrak{A}$の上の線型汎関数である［1］．その全体を状態空間とよびSと記す．一つの力学系があたえられたとき，それに対する対称操作の群Gは

$$\left.\begin{array}{lll}\text{力学量の上に} & \hat{A} \in \mathfrak{A} \longmapsto \alpha_g(\hat{A}) \in \mathfrak{A} \\ \text{状態の上に} & \Phi \in S \longmapsto \beta_g(\Phi) \in S\end{array}\right\} \quad (g \in G) \tag{1}$$

なる変換を惹き起し，両者は《期待値の不変性の条件》，

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Phi} = \langle \alpha_g(\hat{A}) \rangle_{\beta_g(\Phi)} \tag{2}$$

によって結ばれている．これが広義の対称性である．

仮にGを回転とすれば，力学量を（すなわち測定装置を）回転すると同時に状態も回転するなら測定値の期待値は変わらないということで，これは空間の等方性を表わす．

狭義の対称性は，その力学系のハミルトニアン$\hat{\mathcal{H}} \in \mathfrak{A}$が不変なこと，

$$\hat{\mathcal{H}} = \alpha_g(\hat{\mathcal{H}}) \tag{3}$$

で，これがあると対称操作を施した後の系の時間的発展は施す前のと同一になるわけである．ふつう対称性といえば，この狭義のほうを指すが，その背後に上の広義の対称性が暗黙のうちに前提されている．

物理屋たちは，つい最近まで，力学系に応じて一つのヒルベルト空間$\mathbb{H}$をとり$\mathfrak{A}$をその上の演算子で表現するということを行なってきた．そうすると，状態は密度行列$\hat{\rho}$によるトレースとなる[2]：

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Phi} = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}), \qquad (\hat{A} \in \mathfrak{A}).$$

特に，一つのベクトル$\phi \in \mathbb{H}$があって

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Phi} = \langle \phi, \hat{A}\phi \rangle \qquad (\hat{A} \in \mathfrak{A})$$

と書けるような状態は純粋状態とよばれる．そう書けないものは混合状態である（$\hat{A} \in \mathfrak{A}$とその演算子による表現を同じ文字で表わした）．

対称操作の群Gに応じてユニタリ変換の群$\{U_g,\ g \in G\}$があって，

$$\text{力学量について}\quad \alpha_g : \quad \hat{A} \longmapsto U_g \hat{A} U_g^*, \quad (\hat{A} \in \mathfrak{A})$$

$$\text{状態ベクトルについて}\quad \beta_g : \quad \psi \longmapsto U_g \psi \quad , \quad (\psi \in \mathbb{H})$$

となる場合には期待値の不変性の条件(2)が自ずと満足される．力学系の自由度が有限な場合なら，正準交換関係を不変にするような対称操作については上記のようなユニタリ変換の存在は“正準交換関係の表現はユニタリ変換を除いて一意である”ことを主張するvon Neumannの定理[3]によって保

証されていた。

しかし，場のように自由度が無限大の力学系にくると，対称操作を行なったとき β_g によって《状態がヒルベルト空間の外にでてしまう》という現象が，むしろ普通に起ることが認識されたのである[4]。そういうときには，ユニタリ変換 U_g は，もちろん，存在しない。

この事実はユニタリ変換の存在に慣らされていた物理屋たちの間にいささかの混乱を惹き起した。その混乱の中から，ヒルベルト空間を一応はなれて力学量を代数的な側面からとらえ，とりわけ対称性を自己同型によって定義するという道が見出されたわけであった[5]。いま，そのことには深入りしない。この問題が超電導の理論という現実的な課題から発生したことを注意するだけにしておこう[6]。

われわれは対称性の自滅ということを説明しようとしていたのだった。

対称操作がユニタリ変換 U_g によって表現され，系のハミルトニアンがこれによって不変なとき（$U_g H = H U_g$），この系のエネルギー準位のうち縮退のないものは U_g の下で ray として不変になる。縮退の有限なものは……と説明を続ける必要もないかと思うが，これが《状態ベクトルの対称性》である。そして，ユニタリ変換が存在しないとき自滅するのは正

しくこの状態の対称性なのである。対称性は，非対称な摂動をうけて壊れたのではない．自由度が大きすぎたために太古のマンモスよろしく自滅したのだ．

では，対称性の自滅が一体どのようにしてエネルギー・スペクトルに結びつくのか？

Goldstone の定理の証明をすれば，もちろん，一つの答になるはずだが，その前に「例」によって定理の心を明かしておこう．

§2 例の一 [7]

いわゆる中性スカラー場 $\varphi(x)$，$x=(x_0=ct, x_1, x_2, x_3)$ を考え，そのラグランジアン $\mathcal{L}$ を形式的に

$$\mathcal{L} = \frac{c^2}{2}\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2 - \sum_{r=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}\right)^2\right] d^3x$$

とする．これから“導かれる”ハミルトニアンは，$\pi = \partial\varphi/\partial t$ として，

$$H = \frac{1}{2}\int :\left[\pi^2 + c^2 \sum_{r=1}^{3}(\partial\varphi/\partial x_r)^2\right]: d^3x . \qquad (4)$$

これは，実軸上の加え算の群 G に応じた対称操作，

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x) \longmapsto \varphi(x) + \alpha, \quad (\alpha = x \text{に無関係な実数}) \\ &\pi(x) \longmapsto \pi(x) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

によって惹き起される場の量の代数 $\mathfrak{A}$ 上の自己同型群 Γ に関

して不変である．

Fock の表現[8]をとると，ハミルトニアンは

$$H = \hbar c \int |\vec{k}|\, a^*(\vec{k})\, a(\vec{k})\, d\vec{k}$$

となって，基底状態 $|\Omega\rangle$ は Fock の no-particle state $|0\rangle$ であり，エネルギー・スペクトルは $[0, \infty)$ を覆いつくし，《基底状態の $E=0$ まで連続的につながっている》．実は，この場合，《理論が質量 0 の粒子をもつ》というより強い命題もなりたつが，この強い Goldstone の定理は後に述べる．

では，自己同型 Γ はユニタリー変換で実現できないか？事実できない．だからエネルギー・スペクトルの上の性質は Goldstone の定理の帰結とみなすことができる．

ユニタリ変換がないことを直接に示すこともたやすいが[9]，次のようにしてもよい．仮にユニタリな $U(\alpha)$ があって

$$\varphi(x) + \alpha = U(\alpha)\, \varphi(x)\, U^*(\alpha) \qquad (6)$$

となったとする．この $U(\alpha)$ は容易にわかるとおり非斉次ローレンツ群と可換だから，基底状態 $|\Omega\rangle$ に縮退がないことにより

$$U^*(\alpha)\, |\Omega\rangle = \omega(\alpha)\, |\Omega\rangle .$$

ただし $\omega(\alpha)$ は絶対値 1 の複素数．そうすると (6) の $|\Omega\rangle$

による期待値を作って矛盾に到達する（証了）.

この模型ではハミルトニアン(4)に質量項 $+\int\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\varphi(x)^2d^3x$ を加えると（ラグランジアンからは引く）エネルギー・スペクトルが $\{0\}\cup[mc^2,\infty)$ に変わり，基底状態 $E=0$ と最低の励起状態の間に mc^2 だけの間隙ができる．

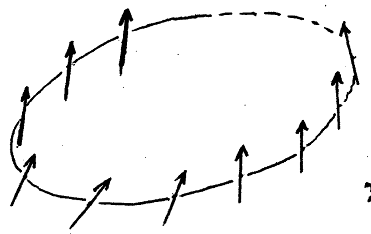
§3 例の二

こんどは，スピン $\vec{S}_r$, $r=1,2,\cdots,N$ が規則正しく並んだ結晶格子を考える．格子はどんな形をしていてもよいが，輪になった鎖を思い浮かべておくのが便利だろう（第1図）.

以下の式は，そこで，

$$\vec{S}_{N+1}\equiv\vec{S}_1$$

と読むことになる．



第1図

スピンというのは，

$$\vec{S}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma},\qquad \sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

という行列演算子で，

$$\vec{S}_i=\underbrace{1\otimes1\otimes\cdots\otimes1\otimes\overset{\boxed{r\text{番め}}}{\vec{S}}\otimes1\otimes\cdots\otimes1}_{N\text{個}}.$$

これに応じて，ヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ としては2次元の数列空間 $\ell^2=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{C}\right\}$ のN個のテンソル積をとる．

この系のハミルトニアンとして，

$$\mathcal{H} = -J\sum_{r=1}^{N} \vec{s}_r \cdot \vec{s}_{r+1} \qquad (J=\text{定数}>0)$$

をとろう．ここに・はスカラー積を表わす．スカラー積だから，このハミルトニアンはすべてのスピンに一斉に共通の回転Rをほどこしても変わらない．

力学量の代数$\mathfrak{A}$は$\{\vec{s}_r\}$によって生成される．その自己同型としては上述によりスピン全体に共通の回転を施す操作をとることになる．たとえばz-軸のまわりにベクトルを角γだけ回転させるという操作α_γなら，

$$\alpha_\gamma : \begin{pmatrix} s_{rx} \\ s_{ry} \\ s_{rz} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} s'_{rx} \\ s'_{ry} \\ s'_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{rx} \\ s_{ry} \\ s_{rz} \end{pmatrix}$$

であって，これはユニタリ変換

$$U_N(\gamma) = \exp\left[-i\gamma\sum_{r=1}^{N} s_{rz}\right] \tag{7}$$

を用いて

$$\vec{s}_r{}' = U_N(\gamma)\,\vec{s}_r\,U_N^*(\gamma)$$

のように遂行される．他の回転についても同様にいく．

ユニタリ変換で遂行できないならという仮定に立つGoldstoneの定理は$N\to\infty$の極限に関わることになるのである．

まず，このスピン系の基底状態を見よう．$J>0$としたから，すべてのスピンが平行という配向で系のエネルギーは最低；これが基底状態をあたえる．スピンたちが互に平行なら

よいので，南向きだろうと北東だろうと向きはどうでもよい——というのがハミルトニアンの回転不変性からの帰結であるが，これは基底状態が（N+1）重に縮退していることを意味する．スピンが互に平行だから合成スピンの大きさは $N/2$，そうすると，そうした状態ベクトルで一次独立なものは $2\cdot(N/2)+1$ 個あるというわけである．

次に励起状態．このスピン系のエネルギーが基底状態の E_0 から上るのは，スピン相互の平行性が破れたときであるが，その破れが小さければ励起エネルギーも小さいということになるはずだろう．

しかし，勝手に一つのスピンだけ傾けても，それは $\mathcal{H}$ の固有状態にはならない．

いまの模型では，スピンが鎖に沿って波状にゆれるという状態が励起状態をあたえ，その波長によって励起エネルギーの定まることがわかっている[10]．そして基底状態と励起状態との間のエネルギー間隙は $N<\infty$ なる限り $\neq 0$ であって，$N\longrightarrow\infty$ の極限ではじめて消失する．いいかえれば，間隙は波長 $\rightarrow\infty$ の励起が可能になったときに消失するのである．

その《$N\longrightarrow\infty$ がユニタリ変換 (7) の極限の非存在と結びつく》

実際，このスピン系の力学量の代数 $\mathfrak{A}$ は，たとえば

$$A_L=\sum_{r=1}^{L}s_{rx}$$

を含むが，$N\to\infty$ のとき L はいくらでも大きくなり得るので増大列 $L_1<L_2<\cdots$ を考えれば，それらを回転する《全部に共通な》ユニタリ変換 U_∞ といったものが存在しないことは明らかである．もちろん L ごとに異なるものでよければ U_L が用いられるのだけれど——．

要するに，この模型では，$N\to\infty$ が一方において力学量の自己同型を遂行すべきユニタリ変換の非存在と同値であり，他方でエネルギー間隙の消失と同値というふうにして，Goldstone の定理の仮定と結論を媒介している．ユニタリ変換の非存在は，つまり，系が無限に大きいことを言い表わす役をしているのだといってもよい．

前節の模型についても，一見，同じことが言えそうに思われるだろう．あの場合にエネルギー・スペクトルが $E_0=0$ まで連続につながったのは，やはり波長のいくらでも長い励起が可能だったからでユニタリ変換の非存在もそこから来ている（[10] を見よ）．ただ，あの場合には，場を体積 $V<\infty$ の箱（立方体とする）に閉じこめたらといって，場

$$\varphi(x)=\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2c|\vec{k}|V}}\left[a(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x}-c|\vec{k}|t)}+h.c.\right],$$

$$\vec{k}=\frac{2\pi}{V^{1/3}}\vec{n},\quad (n_x,n_y,n_z=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

を書き下しても $\vec{n}=(0,0,0)$ の項が意味をなさない。そのために系の大きさが有限の場合と比べて議論をするということはできないのである。

それでも，とにかく，ユニタリ変換の非存在を仮定する心は，系の大きさの無限大をいい，波長 ∞ （波数ベクトル 0）の励起を許すところにあるといえるだろう。

もちろん，波長 ∞ の励起が励起エネルギー 0 とは限らないが，それを保証するのが Γ の下でのハミルトニアンの不変性である。このことは本節の例では明らかであるし，前節の例でも $\alpha=\cos\vec{k}\vec{x}$ とでもして $\vec{k}\longrightarrow 0$ にゆく極限を想像してみれば理解されるだろう。しかし，この種の議論に深入りするのはあまりに物理的というものである。

この辺で定理を正確に述べて，その証明をあたえることにしよう。

§4 Goldstone の定理

これから述べるのは相対論的な理論でも非相対論的な理論†でもなりたつ一般的な形である。相対論の要請により定理を強い形にすることは次節で行なう。

理論の枠として次のことを前提する：――

1° 場の量子論．ある Hilbert 空間 $\mathbb{H}$ で作用する演算子の

† 次頁の註(††)を見よ。

*-代数[†] $\mathfrak{A}$ が局所性をもつ：作用が光速より速く伝わらない[††]ことの他，

a) 時空の有界領域 $\mathcal{O}$ ごとに *-代数 $\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ があって，

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Longrightarrow \mathfrak{A}_{\mathcal{O}_1} \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{O}_2}, \qquad (\text{isotony})$$

b) $\mathfrak{A} = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}_{\mathcal{O}}}$，（$\overline{}$ は uniform closure, $\mathfrak{A}$ は C^*-代数になる）

2° 時間 x^0 の推進なる $\mathfrak{A}$ の強連続な自己同型 τ_{x_0}：

$$A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}} \longmapsto \tau_{x_0}(A) = U_{x_0} A U_{x_0}^* \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}+x^0},$$

ただし $\mathcal{O}+x^0 \equiv \{y + (x^0,0,0,0) \mid y \in \mathcal{O}\}$

をあたえる 1-パラメタの連続ユニタリ変換群 T : $x^0 \longmapsto U_{x^0}$ があって，そのスペクトル分解，

$$U_{x^0} = \int e^{ip^0x^0} E(dp^0) \tag{8}$$

において射影演算子 $E((-\infty,0]) = E(\{0\}) \equiv E_\Omega$ は1次元である．$E_\Omega \Omega = \Omega$ なるベクトル Ω は $\mathfrak{A}$ に関し巡回的とする．（U_{x^0} のスペクトル p^0 はエネルギーと解釈され，Ω は基底状態とよばれる．$U_{x^0}\Omega = \Omega$ がなりたつ．$\langle \Omega, \Omega \rangle = 1$ としておく）．

3° $\mathfrak{A}$ の自己同型の 1-パラメタ群 I : $\gamma \longmapsto \alpha_\gamma$ があって

a) 局所性： $\alpha_\gamma(\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}) \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$,

b) 時間推進と可換： $\tau_{x^0} \alpha_\gamma = \alpha_\gamma \tau_{x^0}$,

c) Ω を定義域に含む（非有界）演算子の族 J_R^0

$(0 < R < \infty)$ があって，$(J_R^0)^* = J_R^0$，かつ

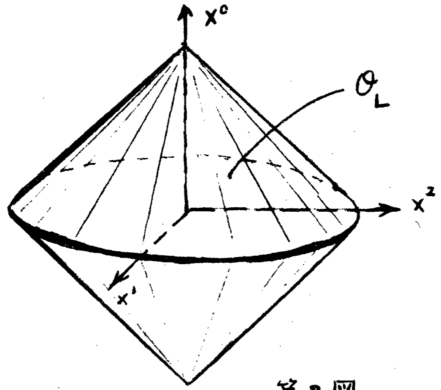
$$\langle \Omega, J_R^0 \Omega \rangle = 0,$$

† ここに * は演算子の共役を示す．

†† 非相対論的な理論では この仮定を力の到達距離有限という形におきかえたりするが，厳密には未解決である[16]．

$$i\frac{d}{d\gamma}\langle\Omega,\alpha_\gamma(A)\Omega\rangle\Big|_{\gamma=0}=\lim_{R\to\infty}\left[\langle A^*\Omega,\ J_R^0\Omega\rangle-\langle J_R^0\Omega,A\Omega\rangle\right] \tag{9}$$

が各 $A\in\mathfrak{A}_{\mathcal{O}_L}$, $\mathcal{O}_L=\{x\in\mathbb{R}^4 \mid |\vec{x}|+|x^0|<L\}$ に対してなりたつ.



第2図

d) $n>0$ があって,

$$R^{-n}\|J_R^0\Omega\|\xrightarrow[R\to\infty]{}0.$$

条件 3°-c) の心は, もし $\text{s-}\lim_{R\to\infty}J_R^0=J^0$ があって, しかも定義域の問題なしに

$$i\frac{d}{d\gamma}\alpha_\gamma(A)=[A,J^0]$$

が書けるならば明瞭であるが, ここでは, これが許されない場合を考慮に入れて (§3の(7)式の例を見よ) 条件を弱めてあるわけである.

そこで,

<u>定理 1 [11]</u> 上述の枠内で, (8)の単位の分解 $E(I)$ につき,

$$\langle J_R^0\Omega,E(I)A\Omega\rangle,\qquad A\in\mathfrak{A},\quad 0<R<\infty$$

が, $m>0$ を定数として $I\cap[m,+\infty)\neq\phi$ のときのみ0と異なるという場合には——もし基底状態と励起状態の間にエネルギー間隙があれば十分—— J_R^0 により (9) の意味で生成される $\mathfrak{A}$ の自己同型 Γ はユニタリ変換で実現される∎

これを言いかえて，

<u>定理 1′ （Goldstone の一般定理）</u>　$\mathfrak{A}$ の自己同型 Γ がユニタリ変換で実現できない（対称性の自破！）のはエネルギー・スペクトルが $p^0 = 0$ までつながっている（エネルギー間隙がない）ときに限る．

さて，

<u>定理 1 の証明</u>の足場は，いわゆる GNS（Gelfand-Naimark-Segal）構成法である．それは，

C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 上に正定値・線型な汎関数 Φ があたえられると $\mathfrak{A}$ の演算子表現 $(\pi, \mathbb{H}, \Omega)$，すなわち

$$\begin{cases} \text{Hilbert 空間 } \mathbb{H}, \\ A \in \mathfrak{A} \text{ に } \mathbb{H} \text{ 上の演算子 } \pi(A) \text{ を対応させる写像 } \pi, \\ \{\pi(A);\ A \in \mathfrak{A}\} \text{ に関して巡回的なベクトル } \Omega \in \mathbb{H} \end{cases}$$

で

$$\Phi[A] = \langle \Omega, \pi(A)\Omega \rangle \tag{10}$$

をみたすものがユニタリ同値を除いて一意に定まる．

ここで巡回ベクトルに対して すぐ上に述べた基底状態と同じ記号 Ω を用いたのは，証明の筋として次のようなことを考えているためである：

まず《理論の枠として与えられている》Hilbert 空間 $\mathbb{H}$ とその上の（有界）演算子の C^*-代数 $\mathfrak{A}$ から出発し，汎関数 Φ を

基底状態の $\Omega \in \mathbb{H}$ により

$$\Phi(A) \equiv \langle \Omega, A\Omega \rangle , \quad A \in \mathfrak{A} \tag{11}$$

と定義すれば，これは正定値・線型かつ連続である．そこで次の二つの補題が証明できたとしよう：

<u>補題1</u>　定理1の仮定のもとでは，汎関数 (11) は自己同型 Γ のもとで不変である．すなわち，

$$\Phi[\alpha_\gamma(A)] = \Phi[A] , \quad {}^\forall A \in \mathfrak{A} . \quad \blacksquare$$

<u>補題2</u>　$\mathfrak{A}$ 上の正定値・線型・連続な汎関数 Φ が，$\mathfrak{A}$ 上の自己同型のノルム連続な 1-パラメタ群 Γ のもとで不変ならばユニタリ変換 $U(\gamma)$ があって

$$\alpha_\gamma(A) = U(\gamma) A U(\gamma)^* ,$$

となり，$\{U(\gamma)\}$ は Γ のユニタリ表現，

$$U(\gamma+\gamma') = U(\gamma)U(\gamma') , \quad U(\gamma)^{-1} = U(\gamma)^* ,$$

で強連続である $\blacksquare$

この<u>補題2の証明</u>に上記の GNS 構成法が用いられるのである．補題1の証明は後まわしにして，その状況を見よう．

それには GNS 構成法の復習から始めるのが便利である：一般に（というのは上のような演算子の代数とは限らないという意味）C^*-代数 $\mathfrak{A}$ とその上の汎関数 Φ があたえられたとして（Φ は正定値・線型とすること，いうまでもない），

$$\mathcal{N}_\Phi = \{A \mid A \in \mathfrak{A},\ \Phi(A^*A) = 0\}$$

を定義すると，これはSchwarzの不等式 $|\Phi(A^*B)|^2 \leqq \Phi(A^*A)\Phi(B^*B)$ から知れるとおり両側イデアルをなす．そこで $\mathfrak{A}$ を modulo $\mathcal{N}_\Phi$ で類に分ければ，類々関数として

$$\langle \mathring{A}, \mathring{B} \rangle = \Phi(A^*B) \tag{12}$$

が定義できる．ここに $\mathring{A}$ は A の属する類を表わす．この $\langle\ ,\ \rangle$ は正定値な sesqui-linear form であって，これを内積として $\mathfrak{A}$ の類の全体 $\mathfrak{A}/\mathcal{N}_\Phi$ なる線型空間は——完備化を経て——Hilbert空間となる．この上での $\mathfrak{A}$ の表現は

$$Q \in \mathfrak{A} : \pi(Q)\mathring{A} = (QA)^\circ \tag{13}$$

で定まる．巡回ベクトルは $1 \in \mathfrak{A}$ の属する類 $\mathring{1}$ である．こうしたときに (10) の要求が満足されていること，すなわち

$$\langle \mathring{1}, \pi(A)\mathring{1} \rangle = \Phi(A)$$

となっていることは明らかである．

これで GNS 構成法が完了した．ユニタリ変換の自由さを除いて構成が一意的なことは説明するまでもない．

注意　もし $\mathfrak{A}$ が Hilbert空間 $\mathbb{H}$ 上の有界演算子の C^*代数で汎関数 Φ が $\Omega \in \mathbb{H}$ により (11) であたえられていたなら，上記のようにして構成した $\mathfrak{A}$ の表現は，そもそもの演算子表現 $(\pi(A) \equiv A, \mathbb{H}, \Omega)$ とユニタリ同値だから，そのユニタリ変換を行なったとして二つの表現を同一視することができる．そう

すれば $\mathbb{H}=\overline{\mathfrak{A}/\mathcal{N}_\Phi}$ （$\overline{}$ はノルム $\|\mathring{A}\|=\langle\mathring{A},\mathring{A}\rangle^{1/2}$ による閉包），
$\pi(A)\Omega=\mathring{A}$ である．

上の結果によれば補題2の証明はやさしい．Hilbert空間 $\overline{\mathfrak{A}/\mathcal{N}_\Phi}$ 上の演算子 $U(\gamma)$ を，その作用

$$U(\gamma)\mathring{A}=\left(\alpha_\gamma(A)\right)^\circ$$

によって定義すると，これが望みどおりの性質をもつからである：

Γの表現：$U(\gamma)\pi(B)U(\gamma)^{-1}=\pi\left(\alpha_\gamma(B)\right)$ は両辺を任意の $\mathring{A}\in\overline{\mathfrak{A}/\mathcal{N}_\Phi}$ に演算してみると分かる．そして，

$$U(\gamma')U(\gamma)\pi(B)U(\gamma)^{-1}U(\gamma')^{-1}=U(\gamma')\pi(\alpha_\gamma(B))U(\gamma')^{-1}$$
$$=\pi\left(\alpha_{\gamma'}(\alpha_\gamma(B))\right).$$

右辺は $\pi\left(\alpha_{\gamma+\gamma'}(B)\right)$ に等しいから $U(\gamma')U(\gamma)=U(\gamma+\gamma')$;

ユニタリ性：$\langle U(\gamma)\mathring{A},U(\gamma)\mathring{B}\rangle=\Phi[(\alpha_\gamma(A))^*\alpha_\gamma(B)]$

$$=\Phi[\alpha_\gamma(A^*B)]=\Phi[A^*B] \quad (\text{補題}1)$$
$$=\langle\mathring{A},\mathring{B}\rangle;$$

強連続性：$\|U(\gamma)\mathring{A}-\mathring{A}\|^2=\Phi[(\alpha_\gamma(A)-A)^*(\alpha_\gamma(A)-A)]\leqq\|\alpha_\gamma(A)-A\|_{C^*}$.

最後の式の $\|\ \|_{C^*}$ は $\mathfrak{A}$ 上の C^*-代数としてのノルムであり，不等式は規格化 $\Phi(1)=\langle\Omega,\Omega\rangle=1$ による ∎

こうして定理1の証明は補題1の証明に帰着された．

<u>補題1の証明</u>のためには，(9) により

$$\frac{d}{d\gamma}\langle\Omega,\alpha_\gamma(\cdots)\rangle=0, \qquad {}^\forall A\in\mathfrak{A} \qquad (14)$$

をいえばよいが，第一に，この式を$\mathfrak{A}$の全体に対して証明する必要はない．原点 $x=0$ を中心とし半径 L をもつ（ユークリッド）球を$\mathcal{O}_L$として，任意の$L<\infty$の$\mathfrak{A}_{\mathcal{O}_L}$に対して証明できれば十分である．何故なら $\bigcup_L \mathfrak{A}_{\mathcal{O}_L}$ は$\mathfrak{A}$で稠密であり$|\Phi[A]| \leq \|A\|_{C^*}$だから——．第二に，この(14)式をすべての$\gamma$について証明する必要もない．$\alpha_\gamma$は1-パラメタ群をなすとしたから

$$\frac{d}{d\gamma}\langle\Omega, \alpha_\gamma(A)\Omega\rangle\Big|_{\gamma=\gamma_0} = \frac{d}{d\gamma}\langle\Omega, \alpha_\gamma\left(\alpha_{\gamma_0}(A)\right)\Omega\rangle\Big|_{\gamma=0}$$

であり，α_γは局所性$\alpha_\gamma(\mathfrak{A}_{\mathcal{O}_L}) \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{O}_L}$をもつとしたので，(14)式を$\gamma=0$に対して証明すれば十分である．

こうして補題1の証明は，

$$\frac{d}{d\gamma}\langle\Omega, \alpha_\gamma(A)\Omega\rangle\Big|_{\gamma=0} = 0 , \qquad A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}_L} \tag{15}$$

の証明に帰着した．仮定(9)を思い出せば，これは

$$\lim_{R\to\infty}\left[\langle A^*\Omega, J_R^0\Omega\rangle - \langle J_R^0\Omega, A\Omega\rangle\right] = 0 \tag{16}$$

を証明する問題である．

その証明には，エネルギー間隙の存在から導かれる次の補題が利用される．

<u>補題3</u>　定理1の仮定のもとでは，各$A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}_L}$と$r>0$に対して次の性質をもつ演算子$B_r$, C_rが存在して(16)のAを

$$\frac{d}{dx^0}\tau_{x^0}(B_r)\Big|_{x^0=0} + C_r \tag{17}$$

でおきかえることができる．B_r, C_r の性質というのは，

$$\begin{cases} B_r,\ \dfrac{d}{dx^0}\tau_{x^0}(B_r) \in \mathfrak{A}_{\theta_{L+r}} \\ \|C_r\|\cdot r^m \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \quad (\forall m>0) \end{cases} \tag{18}$$

のことである ■

実際，この補題によれば (16) において置きかえ (17) を行なったとき C_r の寄与は

$$\left|\langle C_r^*\Omega, J_R^0\Omega\rangle - \langle J_R^0\Omega, C_r\Omega\rangle\right| \leqq 2\|J_R^0\Omega\|\cdot\|C_r\|$$

に仮定 3°d) と (18) を参照して，$R>L+r$, $r\to\infty$ としたとき 0 に行くことがわかる．よって (16) の A は (17) の第 1 項だけで置きかえるものとしてよい．ところが，これは $\in \mathfrak{A}_{\theta_{L+r}}$ だというのだから $R>L+r$ なら (9) が用いられて，

$$\left[(16)\text{で } A\to \frac{d}{dx^0}\tau_{x^0}(B_r)\Big|_{x^0=0} \text{としたもの}\right] = \frac{d}{d\gamma}\left\langle\Omega,\ \alpha_\gamma\left(\frac{d}{dx^0}\tau_{x^0}(B_r)\right)_{x^0=0}\Omega\right\rangle$$

これは仮定 2° —— 特に $U_{x^0}\Omega=\Omega$ —— により $\langle\Omega, \tau_{x^0}(\alpha_\gamma(B_r))\Omega\rangle$ が x^0 によらないから消える．ただし τ_{x^0} と α_γ の可換なこと（仮定 3°b) を用いた．これで補題 1 が証明され，定理 1 の証明が補題 3 によって完結することがわかった．

<u>補題 3 の証明</u>をしよう．そのために $\varphi(x^0)\in\mathcal{S}$ をとって

$$A_\varphi \equiv \int \varphi(x^0)\,\tau_{x^0}(A)\,dx^0$$

を定義するが、特に φ は、その Fourier 変換 $\tilde{\varphi}(p^0)$ の台が $(-m,\ m)$ に含まれているものとすれば、

$$\langle J_R^0 \Omega, A_\varphi \Omega \rangle = \int \varphi(x^0) \langle J_R^0 \Omega, \tau_{x^0}(A)\Omega \rangle dx^0$$

$$= \int \varphi(x^0) \langle J_R^0 \Omega, U_{x^0} A \Omega \rangle dx^0 = \int \tilde{\varphi}(p^0) \langle J_R^0 \Omega, E(dp^0) A \Omega \rangle dp^0$$

$$= 0 .$$

何故ならエネルギー間隙の仮定（定理1を見よ）により $\int dp^0$ の被積分関数の二つの因子は台を共有しないからである。

$\tilde{\varphi}(p^0)$ を実数値の偶関数とすれば $(A_\varphi)^* = (A^*)_\varphi$ となり、

$$\langle J_R^0 \Omega, A_\varphi \Omega \rangle - \langle (A_\varphi)^* \Omega, J_R^0 \Omega \rangle = 0 .$$

上の議論により項別に $=0$ なのである。これは (16) の［　］が

$$A \longrightarrow A_g , \quad g(x^0) = \delta(x^0) + \varphi(x^0)$$

としても変らないことを意味している。

さらに $\int \varphi(x^0) dx^0 = -1$ のようにとると、

$$g(x^0) = \frac{d}{dx^0} f(x^0) , \qquad f(x^0) = \theta(x^0) + \int_{-\infty}^{x^0} \varphi(u) du$$

と書くことができる。ここに

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 1 & x^0 \geq 0 , \\ 0 & x^0 < 0 \end{cases}$$

であって、$f(x^0)$ は $x^0 \longrightarrow \pm\infty$ のとき $\frac{1}{x^0}$ のどんなベキよりも速く減少して 0 になる。

もうひとつ、

$$\chi_r(x^0) = \begin{cases} 1 & |x^0| \le r - a \\ 0 & |x^0| > r \end{cases} \qquad (a>0 \text{ は任意})$$

なる $\chi_r(x^0) \in \mathcal{D}$ を用意して

$$B_r = -\int \chi_r(x^0) f(x^0) \cdot \tau_{x^0}(A)\, dx^0 ,$$

$$C_r = \int \left[\frac{d}{dx^0}\Big(\{1-\chi_r(x^0)\} f(x^0) \Big) \right] \tau_{x^0}(A)\, dx^0 \qquad (19)$$

とおくと，これが補題3に述べられた性質をもつ．

第一に，
$$\frac{d}{dy^0} \tau_{y^0}(B_r)\Big|_{y^0=0} + C_r = \int \frac{df(x^0)}{dx^0} \tau_{x^0}(A)\, dx^0$$

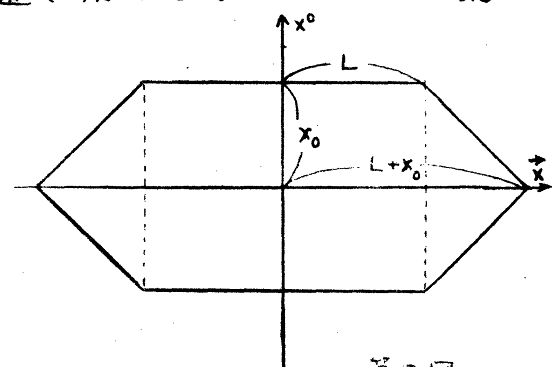
だから，これで (16) の右辺の A を置き換えてよいことは上に説明したとおりである．第二に，作用が光速（$=1$ とする）より速く伝わらないとの仮定により

$$\tau_{x^0}(\mathfrak{A}_{\theta_L}) \subset \mathfrak{A}_{\theta_{L+|x^0|}}$$

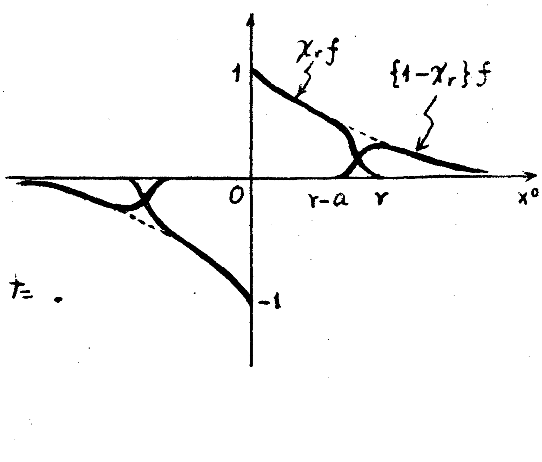
だから（第3図），$A \in \mathfrak{A}_{\theta_L}$ なら

$$B_r , \quad \frac{d}{dx_0} \tau_{x^0}(B_r)\Big|_{x^0=0} \in \mathfrak{A}_{\theta_{L+r}}$$

が分かる．第三に $\|C_r\|$ の急減少なことは $\|A\| < \infty$ が τ_{x^0} により保存されることと (19) なる構成から明らかである（第4図を参照）∎



第3図



これで定理1の証明が完結した．

§5 質量ゼロの粒子の存在

前節の仮定を相対論的に共変な形に補強すると，エネルギー・運動量の joint spectrum に質量 0 の粒子に相当する部分の存在すべきことがいえる．すなわち，何かある Ψ，$\Psi \in \mathfrak{H}$ について，

$$\langle \Psi, dE(p)\Psi \rangle = \lambda\,\delta(p^2) + \cdots\cdots \quad , \quad (\lambda \neq 0)\,; \qquad (20)$$

ここに $E(p)$ は時空の推進をあたえるユニタリ演算子の単位の分解，もちろん $p = (p^0, \vec{p})$ で，

$$p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 \,.$$

この結果によればエネルギー・スペクトルは $p^0 = 0$ までつながっていることになり，前節の結果は当然に含意されている．しかし，今度の結果が単に前節の結果の相対論的共変な言い直し，ないしは拡張につきるものではないことに注意しなければならない．(20) の δ-関数がそのことを示している。

前節にならって理論の枠組を示せば次のとおりである：—

1° 場の量子論．前節に同じ．

2° 時空 $R^4 \ni x = (x^0, \vec{x})$ の推進群の連続ユニタリ表現 U_x があって，

a) $A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}} \longmapsto \tau_x(A) = U_x A U_x^* \in \mathfrak{A}_{\mathcal{O}+x}$.

b) そのスペクトル分解，

$$U_x = \int \exp\left[i(p^0 x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}) \right] dE(p) \,,$$

のスペクトルは前方光円錐 $\overline{V^+}=\{p\,|\,(p^0)^2-(\vec{p})^2\geq 0,\ p^0\geq 0\}$ に含まれており，かつ

$$U_x\Omega = \Omega$$

なる $\Omega\in\mathfrak{H}$ （真空状態）は一つあって一つに限り $\mathfrak{A}$ に関して巡回的である．

c)　$x\in R^4 \longmapsto \tau_x$ は強連続．

3°　$\mathfrak{A}$ の自己同型の1-パラメタ群 Γ : $\gamma\longmapsto\alpha_\gamma$ があって，これは四元ベクトル場 $j^\mu(x)$　$(\mu=0,1,2,3)$ の第0成分によって生成される．詳しくいうと，

a)　$\mathcal{D}(R^4)$ 上で(非有界な)演算子の値をとる超関数の組 $j^\mu(x)$ がある；$(j^\mu(x))^*=j^\mu(x)$，

b)　Ω は $j^\mu(f)=\int j^\mu(x)f(x)\,d^4x$，$f\in\mathcal{D}(R^4)$ の定義域に含まれ，$\langle\Omega, j^\mu(f)\Omega\rangle=0$，

c)　$U_x\, j^\mu(y)\, U_x^*=j^\mu(y+x)$，

d)　$\displaystyle\sum_{\mu=0}^{3}\frac{d}{dx^\mu}j^\mu(x)=0$，　（"流れ" j^μ の保存）．

e)　$A\in\mathfrak{A}_{\mathcal{O}}$ で $\mathrm{supp}\,f\cap\mathcal{O}=\phi$ のとき，

$$\langle j^\mu(f)\Omega, A\Omega\rangle-\langle A^*\Omega, j^\mu(f)\Omega\rangle=0,$$

f)　$\langle\Omega, j^\mu(x)j^\nu(y)\Omega\rangle$ は $R^4\times R^4$ の超関数，

g)　前節の (9) 式が

$$J_R^0 = j^0(f_d f_R)$$

でもって成り立つ．ただし，

$$f_R(\vec{x}) \in \mathcal{D}(R^3), \qquad f_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & |\vec{x}| < R, \\ 0 & |\vec{x}| \geq R + a, \ (a>0) \end{cases}$$

$$f_d(x^0) \in \mathcal{D}(R^1) \qquad f_d(x^0) = 0 \qquad |x^0| \geq d,$$

かつ，
$$\int f_d(x^0)\,dx^0 = 1 .$$

注意1　仮定3°-gのJ^0_Rは保存則3°-dのおかげで$f_d(x^0)$の形に —— $R \to \infty$の極限で —— ならない．正確にいうと前節(9)式の右辺が$f_d(x^0)$の形にならない．

注意2　この節の仮定のもとでは前節の仮定がすべて成り立つことを証明できる．特に前節の仮定3°dはスペクトル条件など場の理論の公理系から$\| J^0_R \Omega \| \leq \mathrm{const}.\, R^2$の形で証明される[12]．

以上の枠組の中で次の定理が証明される．証明は，場の理論の交換関係に対する積分表示の公式[13, 12]を必要とするので，ここでは述べない．

定理2 [14, 15]　上の仮定のもとで，もし前節の(9)につき

$$\frac{d}{d\gamma} \langle \Omega, \alpha_\gamma(A)\Omega \rangle \neq 0$$

なる$A \in \mathfrak{A}$が存在するならば，

$$\langle A\Omega, j^0(x)\Omega \rangle$$

のFourier変換が$\delta(p^2)$-型の特異性をもつ —— これは，この理論のエネルギー・運動量のスペクトルに質量0の粒子に相

当するものが含まれていることを意味する

最後に綜報[17]〜[20]をつけ加えておく．この稿は，特に[17]に負うところが大きい．

REFERENCES

1. R. Haag and D. Kastler: An Algebraic Approach to Quantum Field Theory, Jour. Math. Phys. 5 (1964) 848 - 861.

2. A.M. Gleason: J. of Rat. Mech. and Analysis 6 (1957) 885.

   C. Piron: Survey of General Quantum Mechanics, Univ. of Denver preprint, Oct. 1970.

3. J. von Neumann: Die Eindeutigkeit der Schrodinger Operatoren, Math. Ann. 104 (1931) 570 - 578.

   N. Straumann: A New Proof of von Neumann's Theorem Concerning the Uniqueness of the Schrodinger Operators, Helv. Phys. Acta 40 (1967) 518 - 524.

4. H. Ezawa: Jiyudo-Mugendai no Kei no Ryoshi-Rikigaku, Nihon Buturi Gakkai-shi 25 (1970) 30 - 37.

5. M. Guenin and G. Velo: Automorphism and Broken Symmetries in Algebraic Quantum Field Theories, Princeton Univ. preprint, May, 1965.

   G. Emch and C. Piron: Symmetry in Quantum Theory, Jour. Math. Phys. 4 (1963) 469 - 473.

   G. Emch and M. Guenin: Gauge Invariant Formulation of the BCS-Model, Jour. Math. Phys. 7 (1966) 915 - 921.

6. N.N. Bogoliubov: On Some Problems of the Theory of Superconductivity, Physics Suppl. (Congress on Many-Particle Problems, Utrecht), S1 - 16 (1960).

   Y. Nambu: Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity, Phys, Rev. 117 (1960) 648 - 663.

   N.N. Bogoliubov, D.N. Zubarev and Yu.A. Tserkovnikov: An Asymptotically Exact Solution for the Model Hamiltonian of the Theory of Superconductivity, Soviet Physics JETP 12 (1961) 88 - 93.

R. Haag: The Mathematical Structure of the Bardeen-Cooper-Schriefer Model,
Nuovo Cimento 25 (1962) 287 - 299.

H. Ezawa: The Representation of Caninical Variables as the Limit of Infinite Space Volume, the Case of the BCS Model,
Jour. Math. Phys. 5 (1964) 1078 - 1090.

Y. Kato: Spectrum of the BCS Reduced Hamiltonian in the Theory of Superconductivity,
Prog. Theoret. Phys. 34 (1965) 734 - 753.

Y. Kato and N. Mugibayashi: Friedrichs-Berezin Transformation and Its Application to the Spectral Analysis of the BCS Reduced Hamiltonian,
Prog. Theoret. Phys. 38 (1967) 813 - 831.

W. Thirring and A. Wehl: On the Mathematical Structure of the BCS-Model,
Commun. Math. Phys. 4 (1967) 303 - 314.

* * * * * * *

Y. Nambu and G. Jona-Lasinio: Dynamical Model of Elementary Particles based on an Analogy with Superconductivity, I,
Phys. Rev. 122 (1961) 345 - 356.

H. Umezawa, Y. Takahashi and S. Kamefuchi: The Mass Level and the Broken Symmetry in Terms of Inequivalent Representations,
Ann. Phys. (New York) 26 (1964) 336 - 363.

L. Leplae and H. Umezawa: Boson Formalism in Superconductivity,
Jour. Math. Phys. 10 (1969) 2038 - 2046.

7. R. F. Streater: Spontaneous Breakdown of Symmetry in Axiomatic Theory,
Proc. Roy. Soc. (London) 287A (1965) 510-518.

8. F.A. Berezin: The Method of Second Quantization (tr. by N. Mugibayashi and A. Jeffrey, Academic Press, New York, 1966).

9. H. Ezawa: A Note on the Van Hove-Miyatake Catastrophe,
Prog. Theoret. Phys. 30 (1963) 545 - 549.

10. E. Lieb, J. Schultz and D. Mattis: Two Soluble Models of an Antiferromagnetis Chain,
Ann. Phys. (New York) 16 (1961) 407 - 466.

S. Katsura: Statistical Mechanics of the Anisotropic Linear Heisenberg Model, Phys. Rev. 127 (1962) 1508 - 1518.

See also

J. Ginibre: Proof of the Existence of Spontaneous Magnetization in the Anisotropic Heisenberg Ferromagenet, Lecture given at "The Colloque du C.N.R.S. Gif-sur-Yvette, May, 1969.

J. Ginibre: Existence of Phase Transitions for Quantum Lattice Systems, Commun. Math. Phys. 14 (1969) 205 - 234.

11. D. Kastler, D.W. Robinson and J.A. Swieca: Conserved Currents and Associated Symmetries; Goldstone Theorem, Commun. Math. Phys. 2 (1966) 108 - 120.

12. H. Araki, K. Hepp and D. Ruell: On the Asymptotic Behaviour of Wightman Functions in Space-like Direction, Helv. Phys. Acta 35 (1962) 164 - 174.

13. R. Jost and H. Lehmann: Nuovo Cimento 5 (1957) 1598.

F.J. Dyson: Integral Representation of Causal Commutators, Phys. Rev. 110 (1958) 1460 - 1464.

14. J. Goldstone: Field Theories with Superconductor Solutions, Nuovo Cimento 19 (1961) 154 - 164.

J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg: Broken Symmetries, Phys. Rev. 127 (1962) 965 - 970.

G.S. Guralnik, T. Kibble and C.R. Hagen: Global Conservation Laws and Massless Particles, Phys. Rev. Letters 13 (1964) 585 - 587.

R.F. Streater: Generalized Goldstone Theorem, Phys. Rev. Letters 15 (1965) 475 - 476.

15. H. Ezawa and J.A. Swieca: Spontaneous Breakdown of Symmetries and Zero-Mass States, Commun. Math. Phys. 5 (1967) 330 - 336.

16. J.A. Swieca: Range of Forces and Broken Symmetries in Many-Body Systems,
Commun. Math. Phys. 4 (1967) 1 - 7.

H. Stern: Broken Symmetry, Sum Rules and Collective Modes in Many-Body Systems,
Phys. Rev. 147 (1966) 94 - 147.

17. D. Kastler: Broken Symmetries and the Goldstone Theorem,
Proc. Int'l Conf. on Particles and Fields, Rochester 1967 (ed. by C.R. Hagen, G. Guralnik and V.S. Mazur, Interscience, 1967).

18. R.F. Streater: Spontaneous Breakdown of Symmetry,
Mathematical Theory of Elementary Particles, (ed. by R. Goodman and I.E. Segal, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1966).

19. Th. A.J. Maris: Bemerkungen zu gebrochenen Symmetrien,
Zeits. f. Phys. 229 (1969) 392 - 402.

20. C.A. Orzalesi: Charges and Generators of Symmetry Transformations in Quantum Field Theory,
Rev. Mod. Phys. 42 (1970) 381 - 408.

余白を利用して上に拾い落した論文で手もとにあるものをメモしておく：

S.A. Bludman and A. Klein: Broken Symmetries and Massless Particles,
Phys. Rev. 131 (1963) 2364 - 2372.

J. Łopuszanski and H. Reeh: On a Quantum Field Theory with Degenerate Vacuum with a Special Type of Symmetry,
Inst. for Adv. Study preprint, March 1965.
Jour. Math. Phys. ?

S. Coleman: The Invariance of the Vacuum is the Invariance of the World,
CERN preprint, August 1965. Phys. Rev. ?

G.S. Guralnik and C.R. Hagen: Massless Particles and the Goldstone Th.
Imperial College preprint, 1964 (unpublished).

N.G. Desphande and S.A. Bludman: Spontaneously Broken Symmetry and the Question of Massless Particles in a Model Field Theory,
Phys. Rev. 146 (1966) 1186 - 1194.