数理解析研究所講究録
第 118 巻 1971 年 88-103

C^*環の自己同型によるハミルトニアンの意味づけ

京大 数研 荒木 不二洋

§1 系の時間的発展とハミルトニアン

元来ハミルトニアンは、系の時間的発展の生成作用素という意味と、エネルギーという意味と、二重の物理的解釈を持っている。エネルギーと見る場合は、第一にそのスペクトルが問題となり、時間発展の生成作用素と見る場合は、時間をパラメターとする一変数群が問題となる。後者に関して、通常のヒルベルト空間の枠ではユニタリ作用素の一変数群の形をとるが、もう少し抽象的なC^*環の枠では、C^*環の自己同型の作る一変数群の形で捕えられる。

まずC^*環の枠における例、および自己同型の形で捕えたとき、ハミルトニアンのスペクトルの問題はどうなるか等について考えて見る。

スピン格子系の統計力学の例　ν次元格子の各点を整数ν個の組　$n=(n_1 \cdots n_\nu) \in Z^\nu$　で表わし、各点nに対して

パウリのスピン行列 $\sigma_j^{(n)}$ の作る代数 $\mathfrak{A}_n$ を考える。ここに $\mathfrak{A}_n$ の要素は $\sum_{j=0}^{3} c_j\sigma_j^{(n)}$ であり、各 $\sigma_j^{(n)}$ は次のような2行2列の行列と同じ演算規則に従う。

$$\sigma_0^{(n)}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\sigma_1^{(n)}\sim\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\sigma_2^{(n)}\sim\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\quad\sigma_3^{(n)}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}^\nu$ の有限部分集合 I ($I\Subset\mathbb{Z}^\nu$ と書く) に対して $\mathfrak{A}(I)=\bigotimes_{n\in I}\mathfrak{A}_n$ (テンソル積、平たく云うと n と m が異るとき $\sigma_j^{(n)}$ と $\sigma_k^{(m)}$ は可換と思って $\{\mathfrak{A}_n,\ n\in I\}$ で作られる代数を考える) を考え、$I\subset I'$ なら $\mathfrak{A}(I)$ を $\mathfrak{A}(I')$ の部分代数に自然な意味で同一視する。$\mathfrak{A}=\bigcup_I\mathfrak{A}(I)$ は無限次元の*環となるが、各 $\mathfrak{A}(I)$ の元には一意的に行列としてのノルムが与えられるので、$\mathfrak{A}$ の元にもこのノルムを与え、完備化したものを $\overline{\mathfrak{A}}$ と書く。$\overline{\mathfrak{A}}$ は C^* 環である。

各 $\sigma_j^{(n)}$ を $\sigma_j^{(n+a)}$ へ移す $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ への変換で、積・和・共役の諸演算を保存するものは一意的に存在する。これを $\tau_L(a)$ と書く。このように $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}$ の上への一対一写像で、積・和・共役の諸演算を保存するものを<u>*自己同型</u>と呼ぶ。今の場合 $\tau_L(a)$ は $\mathfrak{A}$ の元のノルムも保存するので、$\overline{\mathfrak{A}}$ に一意的に拡張できる。したがって $\overline{\mathfrak{A}}$ の*自己同型と考えてよい。しかも格子点の平行移動の作る群の連続表現になっている。

次に系の<u>ポテンシャル</u>を導入する。各 $I\Subset\mathbb{Z}^\nu$ に対し、$\mathfrak{A}(I)$ の元 $\Phi(I)$ (ポテンシャル) がきめられていて次の諸条件を

満たしているものとする。(1) $\Phi(I+a) = \tau_L(a)\Phi(I)$（平行移動に対する不変性と呼ばれる。ただし、$I+a$ は I の各点 n に a を加えたもの全体を表わす。）(2) I の中の点の数 $v(I)$ がある数 N_0 を越えると $\Phi(I)=0$．（例えば，二体相互作用だけを考える場合は $N_0=2$ に相当．）(3) Ruelle の導入したノルム

$$(1.1) \qquad \|\Phi\| = \sum_{I \ni 0} v(I)^{-1} \|\Phi(I)\|$$

が有限．（和は特定の格子点 0 を含むすべての I にわたる。）

この場合，$A \in \bar{\mathfrak{A}}$，$U_\Phi(I) \equiv \sum_{I' \subset I} \Phi(I')$ に対し

$$(1.2) \qquad \tau(t)A \equiv \lim_{I \to \infty} e^{itU_\Phi(I)} A e^{-itU_\Phi(I)},$$

が $\bar{\mathfrak{A}}$ のノルム位相での極限として存在し，$\tau(t)$ は $\bar{\mathfrak{A}}$ の＊自己同型を与えることを，次のようにして証明できる．

まず $A \in \mathfrak{A}$ の場合を証明する。$A \in \mathfrak{A}(I_0)$ とし，公式

$$(1.3) \qquad e^{itU_\Phi(I)} A e^{-itU_\Phi(I)} = \sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} (it)^n [\overbrace{U_\Phi(I), [\ldots,}^{n} A]\cdots]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} (it)^n \sum_{I_1 \subset I} \cdots \sum_{I_n \subset I} [\Phi(I_1), [\cdots, [\Phi(I_n), A]\cdots]$$

を使う。この和で，$I_1 \subset I, \ldots, I_n \subset I$ の制限をはずしたときに，それが絶対収束すれば，そのような t に対し (1.2) の極限は明らかに存在する。絶対収束性を示すために，次の評価を使う。

$$(1.4) \qquad \|[\Phi(I_1), [\cdots, [\Phi(I_n), A]\cdots]\| \leq 2^n \|\Phi(I_1)\| \cdots \|\Phi(I_n)\| \, \|A\|.$$

I_n についての和は，I_0 と共通点をもつものに制限できる。

I_0の特定の点を含むI_nについての$\|\Phi(I_n)\|$の和は

(1.5) $\|\Phi\|_1 \equiv \sum_{I_n \ni 0} \|\Phi(I_n)\| \leqq N_0 \; \|\Phi\| < \infty$

で押さえられる。（平行移動に対する不変性を使った）したがって，$I_n \cap I_0 \neq$空集合をみたすI_nについての和に対して，

(1.6) $\sum \|\Phi(I_n)\| \leqq \nu(I_0) \quad \|\Phi\|_1$.

同様にして，I_{n-1}についての和は，$I_n \cup I_0$と共通点を含むものに限れるので，$\nu(I_n \cup I_0) \leqq \nu(I_n) + \nu(I_0) - 1$ と，

$\nu(I_n) \leqq N_0$ より，

(1.7) $\sum \|\Phi(I_{n-1})\| \leqq (\nu(I_0) + N_0 - 1) \|\Phi\|_1$

以下同様にして，

(1.8) $\sum \|\Phi(I_{n-k})\| \leqq (\nu(I_0) + k[N_0 - 1]) \; \|\Phi\|_1$.

この評価を(1.4)の右辺に使うことにより，

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} (it)^n \sum_{I_1 \cdots I_n} [\Phi(I_1), [\cdots, [\Phi(I_n), A] \cdots]$$

は

(1.9) $|t| < [2 (N_0 - 1) \|\Phi\|_1]^{-1}$

で絶対収束して$\tau(t)A$を与えることがわかる。

一般の$A \in \overline{\mathfrak{A}}$に対しては，任意の$\varepsilon > 0$について，$A_\varepsilon \in \mathfrak{A}$で$\|A - A_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3}$をみたすものと，$Z^\nu$の有限部分集合$I_\varepsilon$で任意の$I \supset I_\varepsilon$と(1.9)をみたす$t$に対して

(1.10) $\|\tau(t) A_\varepsilon - e^{it U_\Phi(I)} A_\varepsilon \, e^{-it U_\Phi(t)}\| < \frac{\varepsilon}{6}$

をみたすものが存在するので，このI_εについて，$I \supset I_\varepsilon$，

$J \supset I_\varepsilon$ ならば,

$$\left\| e^{itU_\Phi(I)} A e^{-itU_\Phi(I)} - e^{itU_\Phi(J)} A e^{-itU_\Phi(J)} \right\| < \varepsilon \tag{1.11}$$

となり,(1.3)の右辺はコーシー条件をみたす。したがって,(1.9)をみたす t に対しては一般の $A \in \mathfrak{A}$ について(1.3)の極限が存在する。この議論から,連続性 $\lim_{t \to 0} \tau(t)A = A$ は明らかである。

任意の t についての(1.3)の極限の存在と,加法性 $\tau(t_1)\tau(t_2) = \tau(t_3)$ は次式より明らかである。

$$\begin{aligned} &\left\| e^{i(t_1+t_2)U_\Phi(I)} A e^{-i(t_1+t_2)U_\Phi(I)} - \tau(t_1)\tau(t_2)A \right\| \\ &\leq \left\| e^{it_1U_\Phi(I)} \left\{ e^{it_2U_\Phi(I)} A e^{-it_2U_\Phi(I)} - \tau(t_2)A \right\} e^{-it_1U_\Phi(I)} \right\| \\ &\quad + \left\| e^{it_1U_\Phi(I)} (\tau(t_2)A) e^{-it_1U_\Phi(I)} - \tau(t_1)(\tau(t_2)A) \right\| \end{aligned}$$

ただし,右辺第一項は,$e^{it_1U_\Phi(I)}$, $e^{-it_1U_\Phi(I)}$ をおとしても値は変らない。(証明終)

$\tau(t)$ はスピン格子系の物理量の時間発展(ハイゼンベルグ表示における)を表わす*自己同型と解釈する。この場合,形式的にはハミルトニアン $H = \sum_I U_\Phi(I)$ を考えたことに相当しているが,H 自身は $\mathfrak{A}$ の中に存在しないし,$\mathfrak{A}$ の適当な表現空間を考えても,その表現空間上の作用素としても存在しない場合が多い。そのために*自己同型として捕えたのである。

C^*環と不変状態 ヒルベルト空間上の作用素の作る＊環$\mathfrak{A}$（すなわち，AとBが$\mathfrak{A}$の元ならばc_1A+c_2B，AB，A^*も$\mathfrak{A}$の元であるという性質をもつ$\mathfrak{A}$）で，作用素のノルム位相について閉じているもの（抽象的には，和，積，複素数を掛ける演算，＊，ノルムが定義されていて，前述の$\mathfrak{A}$と＊同型であり，ノルムも一致するもの）をC^*環という。二つのC^*環の＊同型写像はノルムを保存する，すなわち，C^*環としてのノルムは，＊環の構造で決定される。

C^*環$\mathfrak{A}$上の線型汎関数φが，任意の$A\in\mathfrak{A}$に対して

(1.12) $$\varphi(A^*A)\geqq 0$$

という性質を持ち，

(1.13) $$\|\varphi\| \equiv \sup_{\|A\|=1} |\varphi(A)| = 1$$

をみたすとき，$\mathfrak{A}$の状態と呼ぶ。もし単位元1が$\mathfrak{A}$に含まれているならば$\|\varphi\|=\varphi(1)$である。

C^*環$\mathfrak{A}$からあるヒルベルト空間$\mathfrak{H}$上の作用素への＊準同型πを$\mathfrak{A}$の表現という。$\|\pi(A)\|\leqq\|A\|$が常に成立する。$\mathfrak{H}$のベクトルΩについて，$\pi(A)\Omega$，$A\in\mathfrak{A}$の全体が$\mathfrak{H}$で稠密な場合，Ωを$\pi(\mathfrak{A})$の巡回ベクトルという。

Ωが$\mathfrak{H}$の単位ベクトルで，πが$\mathfrak{H}$上$\mathfrak{A}$の表現ならば，

(1.14) $$\varphi_\Omega(A)=(\Omega,\ \pi(A)\Omega)$$

は$\mathfrak{A}$の状態である。逆にφが$\mathfrak{A}$の任意の状態のとき，GNS

(Gelfand-Naimark-Segal) 構成法という方法で，ヒルベルト空間$\mathfrak{H}_\varphi$，$\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}_\varphi$上の表現π_φ，$\mathfrak{H}$の単位ベクトルΩ_φで$\pi_\varphi(\mathfrak{A})$の巡回ベクトルになるもの，の組を作って$\varphi_{\Omega_\varphi}=\varphi$ならしめ得る。またそのような組$\mathfrak{H}_\varphi$，$\pi_\varphi$，$\Omega_\varphi$は（ユニタリ同値類として）一意的である。

$\tau(t)$をC^*環$\mathfrak{A}$の＊自己同型の連続な一変数群とする。（すなわち，各$\tau(t)$は$\mathfrak{A}$の＊自己同型であり，$\tau(t_1)\tau(t_2)=\tau(t_1+t_2)$をみたし，各$A\in\mathfrak{A}$に対して，$\lim_{t\to 0}\|\tau(t)A-A\|=0$，$\tau(0)A=A$をみたす．）$\tau(t)$による状態の変化（Schrödinger表示）は

$$[\tau(t)^*\varphi](A)=\varphi(\tau(t)A),\quad A\in\mathfrak{A} \tag{1.15}$$

で定義する．特に$\tau(t)^*\varphi=\varphi$（すなわち任意の$A\in\mathfrak{A}$に対し$\varphi(\tau(t)A)=\varphi(A)$をみたす状態$\varphi$）を不変状態と呼ぶ．

状態の分解　状態φ，φ_1，φ_2について，

$$\varphi(A)=\lambda\varphi_1(A)+(1-\lambda)\varphi_2 \tag{1.16}$$

をすべての$A\in\mathfrak{A}$に対してみたす実数$0\leqq\lambda\leqq 1$が存在するとき，φをφ_1とφ_2の（重みλ，$(1-\lambda)$の）混合状態という．φと異なるφ_1，φ_2に対しては(1.16)が成立しないような状態φは純状態と呼ぶ．φと異なる不変状態φ_1，φ_2の混合には決して等しくない不変状態φは，エルゴード状態と呼ばれる．

表現πは，$\pi(\mathfrak{A})\mathfrak{H}_1$（$\{\pi(A)\Psi;\ A\in\mathfrak{A},\ \Psi\in\mathfrak{H}_1\}$全体のこと）

が$\mathfrak{H}_1$に含まれる$\mathfrak{H}$の線型閉部分集合（不変部分空間とよばれる）は$\mathfrak{H}$と0以外にないという性質をもつ場合，既約であると云われる。これは，すべての$\pi(A)$ ($A\in\mathfrak{A}$)と可換な作用素は$c\mathbf{1}$（恒等作用素の複素数倍）以外にないという條件と同等である。（シュールの補題） φが純状態であることは，π_φが既約であることと同等である。

φが$\tau(t)$について不変状態ならば，$\mathfrak{H}_\varphi$上のユニタリー作用素の一変数群$U_\varphi(t)$で，

$$U_\varphi(t)\ \pi_\varphi(A)\Omega_\varphi = \pi_\varphi(\tau(t)A)\Omega_\varphi\ , \quad A\in\mathfrak{A} \tag{1.17}$$

をみたすものが一意的に存在する。φがエルゴード状態であることは，$\pi_\varphi(\mathfrak{A})$と$U_\varphi(t)$, $-\infty<t<+\infty$の全体で生成される*環の既約性と同等である。

$A_1, \cdots A_n\in\mathfrak{A}$; $\epsilon_1>0, \cdots \epsilon_n>0$が与えられたとき，

$$|\psi(A_j)-\varphi(A_j)|<\epsilon_j\ , \quad j=1,\cdots,n \tag{1.18}$$

をみたす状態ψの全体を，($\{A_j\}$, $\{\epsilon_j\}$できめられた)φの弱近傍といい，$\{A_j\}$, $\{\epsilon_j\}$を変えることにより得られる弱近傍の全体できまる位相を状態の弱位相という。状態全体はこの弱位相についてコンパクトである。

状態の集合Kが，その任意の二元の混合状態をすべて含んでいるとき，凸と呼ぶ。今K_τを不変状態の全体とすれば，K_τは凸で，弱位相について閉じている。(故にコンパクトである。)

K_τ 上の測度μが正（任意の可測集合$\Delta \subset K_\tau$に対し$\mu(\Delta) \geq 0$）で規格化されている（$\mu(K_\tau)=1$）場合（このようなμを確率測度とよぶ）, 任意の$A \in \mathfrak{A}$に対して

(1.19) $$\varphi_\mu(A) = \int_{K_\tau} \psi(A)\, d\mu(\psi)$$

をみたす状態φ_μが一意的にきまり, それは不変状態である. φ_μが先に与えられた場合, このようなμはφ_μの分解を与えるという.

以下$\mathfrak{A}$を可分とする.

μとνが共に同一の状態φの分解を与え, 各$\psi \in K_\tau$に対してK_τ上の確率測度m_ψがあって, 任意のK_τ上連続関数$F(\psi)$に対して$\int F(\sigma)\, dm_\psi(\sigma)$が$\psi$の関数として$\mu$可測であり, かつ

(1.20) $$\int_{K_\tau} F(\psi)\, d\nu(\psi) = \int_{K_\tau} \left\{ \int_{K_\tau} F(\sigma)\, dm_\psi(\sigma) \right\} d\mu(\psi)$$

が成立するとき, νによる分解はμによる分解よりこまかいと呼び, $\mu \prec \nu$と書くことにする. この順序関係について極大な測度（最もこまかい分解）が一意的に存在し, その測度はエルゴード状態に載っている。（すなわちエルゴード状態以外の測度が0.） この分解はエルゴード分解と呼ばれる.

スペクトル条件と真空状態 $\mathfrak{H}_\varphi$上に(1.17)により定義された$U_\varphi(t)$はtについて強連続（$\tau(t)$の連続性の仮定による）であるから, $U_\varphi(t) = \exp itH_\varphi$のような自己共役作用素$H_\varphi$がきまる. もし$\Omega_\varphi$が"真空"ならば, 通常この$H_\varphi$はハミルト

ニアンと呼ばれる.

今$\tilde{f}(s)$を一実変数sのなめらかな関数である有界集合Δ_fの外で0とする. H_φのスペクトル分解を$H_\varphi = \int \lambda\, dE(\lambda)$とし,

$f(t) = (2\pi)^{-1} \int \tilde{f}(s)\, e^{-ist}\, ds$, $Q \in \mathfrak{A}$,

$$(1.21) \qquad Q(f) = \int \tau(t) Q\, f(t)\, dt$$

とおく. このとき

$$(1.22) \qquad (\Psi, \pi_\varphi[Q(f)]\Phi) = \iint (dE(\lambda)\Psi, \pi_\varphi(Q)\, dE(\lambda')\Phi)\, \tilde{f}(\lambda - \lambda').$$

特に, ΨおよびΦのH_φに関するスペクトル測度$\|dE(\lambda)\Psi\|^2$, $\|dE(\lambda)\Phi\|^2$がそれぞれΔ_ΨおよびΔ_Φのそとで0であり, Δ_Ψと$\Delta_\Phi + \Delta_f$ $(= \{\lambda_1 + \lambda_2\,;\ \lambda_1 \in \Delta_\Phi,\ \lambda_2 \in \Delta_f\})$が共通点を持たなければ, (1.22)は$0$になる. この意味で, $Q(f)$はエネルギーをΔ_fに属する値の範囲だけ変化させる作用素と解釈できる。

そこである状態φ(不変状態とは限らない)が, $\Delta_f \in (-a, -\infty)$ならば必らず$\varphi(Q(f)^* Q(f)) = 0$のとき, 高々エネルギー$a$の状態と呼ぶ. 高々エネルギー$0$の状態は自働的に不変状態であり, 対応するハミルトニアンH_φは非負($H_\varphi \geq 0$)である. 逆にH_φが非負な不変状態φはたかだかエネルギー0の状態である.

相対論的な場合, 時空での平行移動に対応した四次元的な自己同型群$\tau(x)$があり, 各時間的ベクトルe $((e,e) \geq 0,\ e^0 > 0)$について$\tau(te)$, $-\infty < t < \infty$を上記$\tau(t)$にとることが可能であ

る．各 e に対し適当な a_e があって状態 φ が $\tau(te)$ に関し高々エネルギー a_e の状態の場合，φ をエネルギー有限の状態と云い，特に $a_e=0$ にとれる場合，φ を真空と呼ぶ．

局所性の仮定を導入すると，一般的に，エネルギー有限の状態があれば必らず真空状態が存在し，真空状態のエルゴード分解は既約分解であり（すなわちエルゴード分解を与える測度を μ とすると，K_τ 中純状態以外の部分の μ 測度は 0），各既約エルゴード状態 ψ に対応する表現 π_ψ は既約で，$\mathfrak{H}_\psi$ 上 $U_\psi(x)$（$\tau(x)$ に対応して (1.17) で定義されるユニタリ作用素で，時空並進を表わす）で不変なベクトルは一意的（Ω_ψ の複素数倍）であることが示せる．すなわち普通の場の理論の出発点の公理が各 $\mathfrak{H}_\psi$, π_ψ, Ω_ψ でみたされることになる．もちろん真空状態の一意性は保証されないが，各 $\mathfrak{H}_\psi$ における真空ベクトルの一意性は保証される．また各 $\mathfrak{H}_\psi$ 上でエネルギー運動量 P^μ が定義されて $(P^\mu, P^\mu) \geq 0$, $P^0 \geq 0$ となる．

§2 $(\varphi^4)_2$ 模型の時間発展

Cut-Off ハミルトニアンの自己共軛性

$(\varphi^4)_2$模型のハミルトニアンは

(2.1) $H = H_0 + H_{I V}$, $\quad H_{I V} = \int :\varphi(x)^4: g(x^1)\,dx^1 \Big|_{x^0=0}$

で与えられる。ここにgはcut-off（空間の）関数で、$|x^1| \leq 1$で$g(x^1) = g$, $|x^1| \geq 2$で$g(x^1) = 0$となるC^∞級の関数とする。H_0は自由ハミルトニアンで、その自己共軛性はよく知られている。

$H_I(g)$の自己共軛性を示すには次の定理が使われる。

定理　Bがヒルベルト空間$\mathfrak{H}$の対称作用素、$\mathfrak{M}$が極大可換W^*環、Ωが$\mathfrak{M}$の巡回ベクトルで、$\mathfrak{M}\Omega$はBの定義域に含まれ、$\mathfrak{M}$の元とBは$\mathfrak{M}\Omega$上で可換ならば、Bは本質的に自己共軛である。

ここに極大可換W^*環$\mathfrak{M}$とはヒルベルト空間$\mathfrak{H}$上の有界線型作用素の集合で、$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$をみたすもの（ただし$\mathfrak{M}'$は$\mathfrak{M}$の各元と可換な有界線形作用素の全体である）を云い、今の場合、時刻0における場$\int \varphi(x) f(x^1)\,dx^1 \Big|_{x^0=0}$で生成される$W^*$環をとればよい。また$\Omega$が巡回ベクトルとは、Qが$\mathfrak{M}$の元をつくすときQ$\Omega$の全体が$\mathfrak{H}$で稠密なことを云い、$\Omega$としては真空ベクトルを使う。そのとき$B = H_{I V}$に対し定理の仮定は満たされているので、$H_{I V}$が本質的に自己共役であることがわか

3.

定理の証明は次のように簡単である．Bを$\mathcal{M}\Omega$へ制限したものの閉包をB_1と書く．B_1+iの値域は閉部分集合でそれを$\mathfrak{H}_1$と書き，その直交補集合を$\mathfrak{H}_1^{\perp}$と書く．$\mathfrak{H}_1$上で$(B_1-i)(B_1+i)^{-1}$，$\mathfrak{H}_1^{\perp}$上で0となる線型作用素を$S(B_1)$と書く．$S(B_1)$は有界で，B_1のCayley変換と呼ばれる．

$S(B_1)$についてまず$\mathcal{M}$の各元と可換であることを示す．$Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}$に対し

$$(2.2)\qquad (\psi,\ [Q_1^*,\ (B_1+i)]\ Q_2\ \Omega) = 0$$

が任意のψに対し成立するので，$\psi\in\mathfrak{H}_1^{\perp}$ならば

$$(2.3)\qquad (Q_1\psi,\ (B_1+i)\ Q_2\Omega) = (\psi,\ (B_1+i)\ Q_1^*Q_2\Omega)$$
$$= 0$$

となり，$Q_1\psi\in\mathfrak{H}_1^{\perp}$である。したがって，$\psi\in\mathfrak{H}_1^{\perp}$に対しては　$S(B)Q_1\psi = Q_1 S(B)\psi\ (=0)$が成立する。また$\mathfrak{H}_1$のなかで稠密なベクトル$\psi=(B_1+i)Q\Omega$，$Q\in\mathcal{M}$に対しては

$$(2.4)\qquad S(B_1)\,Q_1\psi = S(B_1)\,(B_1+i)\,Q_1 Q\,\Omega$$
$$= Q_1\,(B_1-i)\,Q\,\Omega$$
$$= Q_1\,S(B_1)\,\psi$$

により，やはり　$S(B_1)Q_1\psi = Q_1 S(B_1)\psi$　が得られる．

以上により$S(B_1)\in\mathcal{M}' = \mathcal{M}$である。故に$S(B)^*\in\mathcal{M}$で$\mathcal{M}$は可換なので$S(B_1)S(B_1)^* = S(B_1)^*S(B_1)$である．したがって，

(2.5) $$(1-S(B_1)S(B_1)^*)\,\mathfrak{H} = (1-S(B_1)^*S(B_1))\,\mathfrak{H}$$

である。この空間の元をψとすると，ψはB_1+iの値域にもB_1-iの値域にも直交しなければならないので，$\psi=0$である．故に$S(B_1)$はユニタリで，B_1は自己共軛である．（証終）

H_0と$H_{I,V}$の自己共軛性がわかった上で，その和の自己共軛性は，特異摂動の理論を使って示すことができるが，これはここでは省略する．

時間発展の自己共軛群

これには次のTrotter公式を使う．

(2.6) $$e^{itH_V} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{itH_0/n}\, e^{itH_{I,V}/n}\right)^n$$

この公式は，H_0，$H_{I,V}$が自己共軛で，$H_V=H_0+H_{I,V}$が本質的に自己共軛（すなわち$\overline{H_0+H_{I,V}}$が自己共軛）ならいつでも成立する。

いま$[-R, R]$における場，すなわち$\int\phi(x)\, f(x')\, dx'\big|_{x^0=0}$および$\int\pi(x)\, f(x')\, dx'\big|_{x^0=0}$で$f(x_1)$が$|x_1|\geq V-\varepsilon$で$0$になるもの（ただし$\varepsilon>0$は任意）で生成されるW*環を$\mathfrak{A}_R$とおく．

$Q\in\mathfrak{A}_{R_1}$に対しては

(2.7) $$e^{itH_0}\, Q\, e^{-itH_0} \in \mathfrak{A}_{R_1+t}\,,$$

(2.8) $$e^{itH_{I,V}}\, Q\, e^{-itH_{I,V}} \in \mathfrak{A}_{R_1}$$

である。したがってTrotter公式により

(2.9) $$e^{itH_V}\, Q\, e^{-itH_V} \in \mathfrak{A}_{R_1+t}$$

が得られる。すべての $\mathfrak{A}_R$, $-\infty<R<\infty$ により生成される C^*環を $\mathfrak{A}$ とすれば，$\bigcup_R \mathfrak{A}_R$ 上で定義される＊自己同型

(2.10) $\tau_V(t)Q = e^{itH_V}Qe^{-itH_V}$

は，明らかに $\mathfrak{A}$ の＊自己同型に一意的に拡大されるので，それをも $\tau_V(t)$ で表わす。

H_V と H_{V_1} とは可換であり，$Q\in\mathfrak{A}_{V_1}$，$V_1<V$ ならば

(2.11) $[Q, e^{it(H_V-H_{V_1})}]=0$

である（(2.1) より）ので，Trotter 公式により，$Q\in\mathfrak{A}_R$ に対し

(2.12) $\tau_V(t)Q=\tau_{V_1}(t)Q$

が任意の $V\geq R+t$, $V_1\geq R+t$ について成立する。(2.12) を $\tau(t)Q$ と定義すると，これは $\mathfrak{A}$ の＊自己同型にやはり一意的に拡大され，任意の $Q\in\mathfrak{A}$ に対し

(2.13) $\tau(t)Q=\lim_{V\to\infty}\tau_V(t)Q$

である。この $\tau(t)$ が形式的には $H_0+g\int:\phi(x)^4:dx$ に対応する時間発展の自己同型である。

上記より $\tau(t)\mathfrak{A}_V\subset\mathfrak{A}_{V+t}$ が成立するので，この理論が局所性の公理をみたすことは明らかである。

<u>真空状態</u>　H_0+H_{IV} の自己共軛性の議論から，H_0+H_{IV} が下に有界で，一意的な最低固有ベクトル Ψ_{0V} をもつことが示される。Ψ_{0V} による $\mathfrak{A}$ のベクトル状態を ω_V とおく．($\omega_V(Q)=(\Psi_{0V}, Q\Psi_{0V})$)．状態全体の弱位相に関するコンパクト性から，

$V \to \infty$ での ω_V の集積点が少くとも一つ存在する。それを ω_∞ とすると、ω_∞ は τ_t に関して高々 0 エネルギーの状態であることが次のように簡単に示される。$Q \in \mathfrak{A}$ とし、$Q_\varepsilon \in \mathfrak{A}_{V(\varepsilon)}$, $\|Q - Q_\varepsilon\| < \varepsilon$ とする。また $s \geqq 0$ で 0 となる $\tilde{f}(s)$ を一つきめ、$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-ist}\tilde{f}(s)\,ds$ とする。$\tilde{f}$ を smooth な関数で有界な台を持つものとすれば、$\varepsilon > 0$ に対し $T(\varepsilon)$ が存在して、$\int_{|t| \geqq T(\varepsilon)} |f(t)|\,dt < \varepsilon$ をみたす。$V > V(\varepsilon) + T(\varepsilon)$ に対して、

$$\omega_V(Q(f)^* Q_V(f)) = 0$$

である。ただし $Q_V(f) = \int \tau_V(t) Q_\varepsilon f(t)\,dt$. $|t| \leqq T(\varepsilon)$ では $\tau_V(t) Q_\varepsilon = \tau(t) Q_\varepsilon$ なので $\|Q_V(f) - Q_\varepsilon(f)\| \leqq 2\|Q_\varepsilon\|\,\varepsilon$ である。また $\|Q_\varepsilon(f) - Q(f)\| \leqq \int |f(t)|\,dt\ \varepsilon$. したがって

$$|\omega_V(Q(f)^* Q(f))| \leqq \left(2\|Q\| + 2\varepsilon + \int |f(t)|\,dt\right) \|Q(f)\|\,\varepsilon$$

が成立する。$V \to \infty$ の集積点についても同じ式が成立し、ε は任意であるから $\omega_\infty(Q(f)^* Q(f)) = 0$ を得る。

Glimm-Jaffe はさらに運動量も含めたスペクトル条件を示している。