数理解析研究所講究録
第121巻 1971年 16-30

局所凸空間に於ける
二階線型常微分方程式

東大 理 小西芳雄
東大 理 手塚和男

第0章 序文

作用素の半群の生成については，Hille-Yosida-Feller-Miyadera-Phillipsの定理及びその一般化として局所凸空間に於ける局所同等連続半群の生成に関するT. Kōmuraの結果がある。

Sova, Fattorini等は増大度が指数型の作用素のcosine functionの生成を行い，半群の場合と類似の生成定理を得た。

第1章ではT. Kōmuraの方法を用いれば，Sova, Fattoriniの結果が更に一般の形で述べられることを示し，半群に対し述べられているTrotter-Katoの収束定理と全く同様の収束定理がcosine functionについても言える事を報告する。

第2章では収束定理により，特にBanach空間に於けるcosine functionの生成作用素の摂動を述べる。近似についても考察し，次にcosine functionの生成作用素を係数

にもつ二階線型常微分方程式を調べる。

第1章

§1. 準備. 記号等は T. Kōmura [4] による。Eは点列完備な局所凸空間とし，aは正数とする。

$$\varphi \in \mathcal{D}_{(-\infty,a]} \xrightarrow{\wedge} \mathbb{D}_{(-\infty,a]} \ni \hat{\varphi} \quad \text{“共役Laplace変換”}$$

$$\begin{tikzcd}
F \in \mathcal{D}'_a(E) \arrow[r, "\wedge", "\text{“一般Laplace変換”}"'] \arrow[d, "\frac{d}{dt}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{D}'_a(E) \ni \hat{F} \arrow[d, "\lambda"] & \supset 1\otimes E \cong E \\
 & D(\mathbb{A}) \arrow[d, "\mathbb{A}"] \arrow[u, hook] & D(A) \arrow[d, "A"] \arrow[u, hook] \\
\mathcal{D}'_a(E) \arrow[r] & \mathbb{D}'_a(E) & \supset 1\otimes E \cong E
\end{tikzcd}$$

$$(\mathbb{A}\hat{F})(\hat{\varphi}) = A(\hat{F}(\hat{\varphi}))$$

定義. $\mathbb{T} \in L(\mathbb{D}'_a(E))$ 且つ HをEの部分空間とする。$T(\lambda)$ $: H \xrightarrow{\text{線型}} E$ $(\mathrm{Re}\lambda > 0)$ で $T(\lambda)x$ は各 $x \in H$ に対し $\mathrm{Re}\lambda > 0$ におけるE-値正則関数とする。 $T(\lambda)$がH上の$\mathbb{T}$の表現とは，任意の$\mu > 0$に対し

$$(\mathbb{T}(1\otimes x))(\hat{\varphi}) = \frac{1}{i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \hat{\varphi}(\lambda)T(\lambda)x\,d\lambda \quad \hat{\varphi} \in \mathbb{D}_{(-\infty,a]},$$

$x \in H$が成立するときにいう。

定義. Eに於ける線型作用素Aに対し，$(\lambda - \mathbb{A})^{-1}$ (resp. $(\lambda^2 - \mathbb{A})^{-1}$) が存在して，$L(\mathbb{D}'_a(E))$の元であるとき Aのλ (resp. λ^2) に関する一般resolventという。Eに於ける作用素の組A, Bに

対して もし$(\lambda^2+\lambda\mathbb{B}+\mathbb{A})^{-1}$が存在して，$L(\mathbb{D}_a'(E))$の元であるとき 組A, Bの一般resolventという。

§2. Cosine functionの生成．強連続な$L(E)$－値函数$S(\cdot)$がcosine functionであるとは，次の"cosine property"をみたすことである。

(i) $S(s+t)+S(s-t)=2S(s)S(t) \quad \forall t, s \in R^1$;

(ii) $S(0)=I$。

Sの生成作用素Aは次の様に定義される：

$$A = S''(0) \quad ;$$

$$D(A)=\{x\in E \,;\, S(\cdot)x \in C^2(R^1;E)\}。$$

これらの定義のもとで 次のT. Kōmura[4] 定理3.3, 3.3′と類似の結果を得る。

定理A　Eに於ける作用素Aが一意に決まる局所同等連続なcosine functionの生成作用素である為の必要十分条件は次の(1),(2)である。

(1) Aは閉作用素且つ稠密な定義域をもつ；

(2) 各$a>0$に対し 空間$\mathbb{D}_a'(E)$に於いて 次の条件が成立：

(a) Aのλ^2に関する一般resolvent $(\lambda^2-\mathbb{A})^{-1}$が存在する.

(b) $\lambda(\lambda^2-\mathbb{A})^{-1}$はE上の表現$Q(\lambda)$をもち 作用素族

$$\left\{\frac{\mu^{n+1}}{n!}\frac{d^n}{d\mu^n}Q(\mu) : \mu>0 \text{ 且つ } n=0,1,2,\cdots\right\}$$

は$L(E)$で同等連続である。

§3 二階の方程式. AをEの中の線型作用素，uをE一値の$[0,a]$で定義された函数とする。

定義（M. Sova [8]）[1] uがAに対する放物型問題の$[0,a]$に於ける解であるとは次が成立することである：

(i) $u \in C[0,a] \cap C^1(0,a]$；

(ii) $u(t) \in D(A)$，$t \in (0,a]$；

(iii) $u'(t) = Au(t)$，$t \in (0,a]$。

定義（M. Sova [8]）Aが$[0,a]$で parabolically determined であるとは Aに対する放物型問題の$[0,a]$に於ける解uで$u(0)=0$なるものは恒等的に0であることとする。

補題 次の(1),(2)が成立するとしよう.

(1) Aは閉かつ稠密な定義域をもつ作用素.

(2) 或る$a>0$に対し 空間$\mathbb{D}_a'(E)$に於いて次の条件が成立：

(a) Aのλに関する一般 resolvent $(\lambda - A)^{-1}$が存在する.

(b) $(\lambda - A)^{-1}$は$D(A)$上の表現$R(\lambda)$をもち 作用素族

$$\left\{ \frac{\mu^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\mu^n} R(\mu) : \mu > 0 \text{ 且つ } n = 0, 1, 2, \cdots \right\}$$

は$L(D(A), E)$で同等連続. ここに$D(A)$はグラフ位相により点列完備な局所凸空間とみなされている。

このとき

[1] 以下の定義でM. Sovaの原論文と多少異なる部分がある。

(i) A は $[0,a]$ で parabolically determined;

(ii) $L(D(A),E)$ で同等連続な作用素族 $\{T(t);0\leqslant t\leqslant a\}$ が存在し

(α) 各 $x\in D(A)$ に対し $T(\cdot)x\in C[0,a]$ で $T(0)x=x$;

(β) 各 $x\in D(A^2)$ に対し $T(\cdot)x\in C^1(0,a]$ で $T(t)x\in D(A)$, $t\in(0,a]$ 且つ $\frac{d}{dt}T(t)x=AT(t)x$, $t\in(0,a]$.

次に A,B を E に於ける作用素, u を E ー値の $[0,a]$ で定義された函数とする。

<u>定義</u> (M. Sova [8]). u が <u>組 A,B に対する双曲型問題の $[0,a]$ に於ける解</u> であるとは次が成立することである:

(i) $u\in C^1[0,a]\cap C^2(0,a]$;

(ii) $u(t)\in D(A)$, $u'(t)\in D(B)$, $t\in(0,a]$;

(iii) $u''(t)+Bu'(t)+Au(t)=0$, $t\in(0,a]$.

<u>定義</u> (M. Sova [8]) 組 A,B が $[0,a]$ で <u>hyperbolically determined</u> であるとは 組 A,B に対する双曲型問題の $[0,a]$ に於ける解 u で $u(0)=u'(0)=0$ なるものは恒等的に 0 であることとする。

<u>定義</u> (M. Sova [8]) 組 A,B が <u>biclosed</u> とは次が成立することである。$x_k\in D(A)$, $y_k\in D(B)$ $(k=1,2,\cdots)$ $x_k\to x$ 且つ $y_k\longrightarrow y$ 且つ $Ax_k+By_k\to z$ $(k\to\infty)$ ならば $x\in D(A)$, $y\in D(B)$ 且つ $Ax+By=z$.

双曲型問題を一階化して補題を使うことにより, 次を得る。

<u>定理B.</u> 次の(1),(2)が成立するとしよう。

(1) 組A, Bは *biclosed* 且つ稠密な定義域 D(A), D(B)をもつ.

(2) 或る $a>0$ に対し 空間 $\mathbb{D}'_a(E)$ に於いて次の条件が成立：

(a) 組A, Bの一般 *resolvent* $(\lambda^2+\lambda B+A)^{-1}$ が存在し $(\lambda^2+\lambda B+A)^{-1}(\lambda+B)$ は *closable* で $\overline{(\lambda^2+\lambda B+A)^{-1}(\lambda+B)}$ は $\mathbb{L}(\mathbb{D}'_a(E))$ の元である。

(b) $(\lambda^2+\lambda B+A)^{-1}$ と $\overline{(\lambda^2+\lambda B+A)^{-1}(\lambda+B)}$ は E上の表現 $R_1(\lambda)$ と $R_2(\lambda)$ を夫々もち 作用素族

$$\left\{\frac{\mu^{n+1}}{n!}\frac{d^n}{d\mu^n}R_i(\mu)\ ;\ \mu>0 \text{ 且つ } n=0,1,2,\cdots\right\}$$

$i=1,2,$ は L(E)で同等連続.

このとき

(i) 組 A, B は $[0,a]$ で *hyperbolically determined* ;

(ii) $Ax+By\in D(B)$ なる各 $x\in D(A)$ と $y\in D(A)\cap D(B)$ に対し組A, Bに対する双曲型問題の $[0,a]$ に於ける解 u が存在し

$$u(0)=x,\quad u'(0)=y.$$

更に任意の連続 *semi-norm* p に対し或る(x, y, u 及び t に無関係な)連続 *semi-norm* q が存在し

$$p(u(t))\leq q(x)+q(y)$$
$$p(u'(t))\leq q(y)+q(Ax+By)\qquad 0\leq t\leq a.$$

<u>§4. Cosine function の収束</u>

<u>定理C</u>　$\{S^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$を局所同等連続なcosine functionの列とし次の"安定性"の条件をみたすものとする：各連続semi-norm pに対し或る連続semi-norm qが存在して

$$p(S^{(k)}(t)x) \leq q(x),\ k=0,1,2,\cdots,\ 0\leq t\leq a,$$

$x\in E$.　$\{Q^{(k)}(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$を次の様な$\lambda(\lambda^2-A^{(k)})^{-1}$ $(k=0,1,2,\cdots)$のE上の表現の列とする。

$$Q^{(k)}(\lambda)=\int_0^a e^{-\lambda t}S^{(k)}(t)\,dt,$$

ここに$A^{(k)}$ $(k=0,1,2,\cdots)$は$S^{(k)}$の生成作用素とする。
このとき
各$x\in E$に対しR^1のcompact集合上で一様に$S^{(k)}(t)x$が$S^{(0)}(t)x$に収束する為の必要十分条件はC^1の右半平面のλと各$x\in E$に対し

$$\lim_{k\to\infty}Q^{(k)}(\lambda)x = Q^{(0)}(\lambda)x\ .$$

特に同等連続半群に対するTrotter-Katoの定理の類似として
<u>定理D.</u> $\{S^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$を同等連続なCosine functionの列で次の"安定性"の条件をみたすものとする：各連続semi-norm pに対し或る連続semi-norm qが存在して

$$p(S^{(k)}(t)x) \leq q(x),\ k=0,1,2,\cdots,\ 0\leq t,\ x\in E.$$

$A^{(k)}$ $(k=0,1,2,\cdots)$を$S^{(k)}$の生成作用素としよう.
もし或るλ_0 $(Re\lambda_0>0)$に対し

$$\lim_{k\to\infty}(\lambda_0^2-A^{(k)})^{-1}x = J(\lambda_0^2)x,\ \forall x\in E$$

が存在し $R(J(\lambda_0^2))$ が E で稠密ならば $J(\lambda_0^2)$ は或る同等連続 cosine function S の生成作用素 A の resolvent: $J(\lambda_0^2)=(\lambda_0^2-A)^{-1}$ であり

$$\lim_{k\to\infty} S^{(k)}(t)x = S(t)x$$

が各 $x\in E$ に対し成立する。

更にこの収束は R^1 の compact 集合上一様である。

<u>Remark</u>. この定理を使って H. F. Trotter [9] Theorem 5.2 と類似の定理を cosine function に対してもいえる。また M. Hasegawa [3], S. Ôharu [6] と同様の議論が成立し類似の定理を得る。

§5. 定理 A の証明の方針

〈必要性〉 $\mathbb{Q}\hat{F}=(F*S)^\wedge$, $\hat{F}\in \mathbb{D}'_a(E)$ とおくと $\mathbb{Q}\in L(\mathbb{D}'_a(E))$ で $\lambda(\lambda^2-\mathbb{A})^{-1}=\mathbb{Q}$ をみたす。又 $Q(\lambda)=\int_0^a e^{-\lambda t}S(t)\,dt$ とおけば、$\mathbb{Q}$ の E 上の表現である。

〈十分性〉 $S(t)x = Y(t)x + \frac{t^2}{2!}Y(t)Ax + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} e^{t\lambda}\frac{1}{\lambda^4}Q(\lambda)A^2x\,d\lambda$

$x\in D(A^2)$, $t\le a$, $\mu>0$ とおき、E 全体に拡張し次に $\{S(t) : 0\le t\le \frac{a}{2}\}$ が cosine property をもつことを示す。その後 これを R^1 全体に拡張すればよい。

21

第2章

この章ではBanach空間におけるcosine functionのいくつかの性質を考察する。

§1 generatorの摂動

以下EをBanach空間，$R=(-\infty,\infty)$

$L(E)=\{A: E\to E \text{ 有界}\}$，$L^{+}(E)=\{A: E\supset \mathcal{D}(A)\to E \text{ 線型}\}$

とする。Sを型ωのcosine function (i.e. $\exists M$ s.t. $\|S(t)\|\leqq Me^{\omega|t|}$) とし、$A$をそのgeneratorとする。この時$A$の分数巾を $\hat{A}_{\alpha}=e^{\alpha\pi i}(\omega^2+1-A)^{\alpha}$ で定義すると

<u>命題</u>　$T(t)x=\int_0^t S(s)x\,ds$，$0<\varepsilon<1/2$ の時

$\hat{A}_{1/2-\varepsilon}T(t)\in L(E)$，$t$に関して強連続

<u>定義</u>　$\hat{A}_{1/2}T(t)\in L(E)$，$t$に関して強連続の時

cosine function Sはregularであるという。

Hilbert空間あるいは$L^p(X)$ $(1<p<\infty)$の中のcosine functionはすべてregularであることが知られている。
(Fattorini [2])

さて次の補題からgeneratorに有界作用素を加えてもgeneratorであることがわかる。

<u>補題</u>　A　cosine function Sのgenerator

$B\in L(E)$ ならば

$A+B$もcosine functionのgenerator，そして

その cosine function を S_{A+B} と書くと

$$S_{A+B}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) \quad (\text{収束は } R \text{ 上 } \|\ \|_{L(E)} \text{ で広義一様})$$

但し $S_0(t)=S(t)$, $S_{n+1}(t)x=\int_0^t S_n(t-s)BT(s)x\,ds \quad (n\geqq 0)$

$$T(t)x=\int_0^t S(s)x\,ds$$

上の補題と第1章で述べた Trotter−Kato 型の収束定理が成立することから Miyadera [5] と全く同様にして次の定理を証明できる。

<u>定理</u> A cosine function S の generator

$$T(t)x=\int_0^t S(s)x\,ds$$

$$B_n\in L(E) \quad n=1,2,\cdots \quad {}^\forall x\in\mathfrak{D}(A) \text{ に対し } B_n x\longrightarrow Bx$$

$${}^\exists \lambda_0>0 \text{ s.t } \quad \gamma_{\lambda_0}\overset{def}{=}\sup_{\|x\|\leqq 1}\ \sup_{n\geqq 1}\int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}\|B_n T(t)x\|\,dt<\infty$$

この時 $\delta_0=(\lim_{\lambda\to\infty}\gamma_\lambda)^{-1}\in(0,\infty]$ とおくと

$|\delta|<\delta_0$ で $A+\delta B$ は cosine function の generator である。

この定理のいくつかの系を述べよう。

<u>系1</u> A cosine function の generator の時

(i) B closable $\mathfrak{D}(B)\supset\mathfrak{D}(\hat{A}_{1/2-\varepsilon})$ $(0<\varepsilon<1/2)$ ならば

$A+B$ は cosine function の generator

(ii) B non-negative $\mathfrak{D}(B)\supset\mathfrak{D}(A)$, ${}^\forall 0<\varepsilon<1/2$ ならば

$A+B^{1/2-\varepsilon}$ は cosine function の generator

系１の証明中からAが regular cosine function の generator の時は(i)で$\varepsilon=0$としてもよい。従ってとくに Hilbert 空間においては次のことがいえる。

<u>系２</u>　H Hilbert 空間

$L: H \to H$ 自己共役，$\geqq 0$ の時

(i) B closable，$\mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(L^{1/2})$ ならば

$-L+B$ は cosine function の generator である。

(ii) B maximal accretive，$\mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(L)$ ならば

$-L+B^{\alpha}$ $(0<\alpha\leqq 1/2)$ および $-L+B^{*\beta}$ $(0<\beta<1/2)$ は cosine function の generator である。

<u>例</u>　Ω：$\mathbb{R}^n$の有界領域　$\partial\Omega$ なめらか　　p integer $\geqq 1$

$$A=(-1)^{p+1}\Delta^{p} \qquad \mathfrak{D}(A)=\mathcal{H}^{(\Omega)}_{2p}\cap \mathring{\mathcal{H}}_{p}(\Omega)$$

$$B=\sum_{|\gamma|\leqq p} b_\gamma D^\gamma \qquad b_\gamma \in L^\infty(\Omega)$$

$A+B$ は $H=L^2(\Omega)$ の中の cosine function の generator。

<u>系３</u>　A：cosine function S の generator

$$T(t)x=\int_0^t S(s)x\,ds$$

B：$\mathfrak{D}(B)\supset\mathfrak{D}(A)$，$^{\exists}\lambda\in\rho(A)$　$B(\lambda-A)^{-1}\in L(E)$

$$\int_0^1 \|BS(t)x\|dt \leqq K\|x\|_{\mathfrak{D}(\hat{A}_{1/2-\varepsilon})}=K\|\hat{A}_{1/2-\varepsilon}x\| \qquad {}^{\forall}x\in\mathfrak{D}(A)$$

$$\int_0^1 \|BT(t)y\|dt \leqq K\|y\| \qquad {}^{\forall}y\in\mathfrak{D}(A)$$

この時　ある$\delta_0\in(0,\infty]$があって$|\delta|<\delta_0$で$A+\delta B$は

cosine function の generator となる。とくに A regular の時 $\varepsilon=0$ にできる。

§2 近似

考える問題は次のようなものである。

cosine function S とその generator A が与えられた時

次の性質を持つ $\{A_n\}\subset L(E)$ を見出だすこと。

(i) $A_n x \longrightarrow Ax \quad (n\to\infty) \qquad \text{for } {}^\forall x\in \mathcal{D}(A)$

(ii) $S_{A_n}(t)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^{2p}}{(2p)!}A_n^p \longrightarrow S(t)$ 　Rで広義一様に強収束

即ち $\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}=A_n u \\ u(0)=x \quad u'(0)=y \end{cases} \qquad (x\in E)$

の解 $U_n(t)$ が $S(t)x$ に広義一様に収束する。(${}^\forall x$について)

つまり半群の理論における Yosida 近似 (i.e A が半群の generator の時は $A_n=nA(n-A)^{-1}$) に相当するものが得られるかという問題である。この問題は現在のところ私達にはわからない。しかし少くとも次のことはいえそうである。

$\{A_n\}$, $\{B_n\}\subset L(E)$ を適当に求めて次のようにできる。

(i) $A_n x\to Ax$, $B_n x\to 0 \qquad \text{for } \forall x\in\mathcal{D}(A)$

(ii) $\begin{cases} \left(\dfrac{d}{dt}-B_n\right)^2 u=A_n u \\ u(0)=x \quad u'(0)=y \end{cases} \qquad x,y\in E$

の解を $u_n(t;x,y)$ とすると $t\geqq 0$ で広義一様に $n\to\infty$ の時

$$u_n(t;x,y) \longrightarrow S(t)x+\int_0^t S(s)y\,ds$$

注意. $S(t)$ contraction の時 $\|u_n(t;x;0)\|\leqq\|x\|$ $(t\geqq 0)$

§3 2階の方程式

A を cosine function の generator とする時 Sova[8]は $C\in L(E)$ ならば $\frac{d^2u}{dt^2}=C\frac{du}{dt}+Au$ に対する Cauchy 問題が R で一様に適切であることを示した。従って §1 で述べたことから B closable $\mathfrak{D}(B)\supset\mathfrak{D}(\hat{A}_{1/2-\varepsilon})$ $(0<\varepsilon<1/2)$ の時 $\frac{d^2u}{dt^2}=C\frac{du}{dt}+(B+A)u$ に対する Cauchy 問題は R で一様に適切である。ここでは B, C が t による場合を考える。以下 $\mathfrak{D}(\hat{A}_\alpha)$ と書くと $\|x\|_{\mathfrak{D}(\hat{A}_\alpha)}=\|\hat{A}_\alpha x\|$ ($\hat{A}_\alpha$ invertible) によって Banach 空間の構造が入っているものとみなす。

定理 $0<\varepsilon<1/2$

A cosine function の generator

$B(t)$ closable, $\mathfrak{D}(B(t))\supset\mathfrak{D}(\hat{A}_{1/2-\varepsilon})$

$[0,T]\ni t$ に関して $\mathfrak{D}(\hat{A}_{1/2-\varepsilon})$ 上で強連続

〃 $\mathfrak{D}(A)$ 上で強連続微分可能

$C(t)\in L(E)$ $[0,T]\ni t$ に関して 強連続

〃 $\mathfrak{D}(\hat{A}_{1/2-\varepsilon})$ 上で強連続微分可能

$f\in C^1([0,T],E)$

この時　$x \in \mathfrak{D}(A)$，$y \in \mathfrak{D}(\hat{A}_{1/2+\varepsilon})$ に対して

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = C(t)\dfrac{du}{dt} + (B(t)+A)u + f(t) \\ u(0)=x, \quad u'(0)=y \end{cases}$$

は　$u \in C^2([0,T],E) \cap C^1([0,T], \mathfrak{D}(\hat{A}_{1/2-\varepsilon})) \cap C([0,T], \mathfrak{D}(A))$

なる解を一意的に持ち

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{D}(A) & \times & \mathfrak{D}(\hat{A}_{1/2+\varepsilon}) & \times & C^1([0,T],E) & \longrightarrow & C^2([0,T],E) \\ (x & , & y & , & f) & \mapsto & u \end{array}$$

は連続である。

注意　A regular cosine function の generator の時

定理で $\varepsilon=0$ にできる。

文献

[1] H.O. Fattorini, Ordinary differential equations in linear topological spaces, I, J. Differential Equations 5 (1969), 72-105.

[2] H.O. Fattorini, Ordinary differential equations in linear topological spaces, II, J. Differential Equations 6 (1969), 50-70.

[3] M. Hasegawa, A note on the convergence of semi-groups of operators, Proc. Japan Acad. 40 (1964), 262-266.

[4] T. Kōmura, Semigroups of operators in locally convex spaces, J. Functional Analysis 2 (1968), 258–296.

[5] I. Miyadera, On perturbation theory for semi-groups of operators, Tôhoku Math. Jour. 18 (1966), 299–310.

[6] S. Ôharu, On the convergence of semi-groups of operators, Proc. Japan Acad. 42 (1966), 880–884.

[7] M. Sova, Cosine operator functions, Rozprawy Matematyczne XLIX (1966), 3–46.

[8] M. Sova, Problème de Cauchy pour équations hyperboliques opérationnelles à coefficients constants non-bornés, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968) 67–100.

[9] H. F. Trotter, Approximation of semi-groups of operators, Pacific J. Math. 8 (1958), 887–919.

[10] K. Yosida, On holomorphic Markov Processes, Proc. Japan Acad. 42 (1966), P.313–317.