数理解析研究所講究録
第 121 巻 1971 年 58-68

Holomorphic Evolution Operator について

東大（理）増田久弥

§1. はしがき

この話の目的は、holomorphic evolution operator（以下 H. E. O. と略記）に関する Kato − Tanabe の結果：

(1) Osaka Math. Journal, vol 14, 107-133

(2) Osaka Journal of Math., vol 4, 1−4

の逆を示すことです。最近、私は、拡散方程式

(3) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x)u$$

$(x \in R^n,\ t > 0)$

を、例えば、連続函数空間

$$\mathbb{C}_0 \equiv \{u \mid u(x) \text{ は一様連続且 } |u(x)| \to 0 \ (|x| \to \infty)\}$$

（位相は、maximum norm）

の中で積分する事に興味をもちました。ここで係数は、

次の条件をみたすとします．

(4) 係数は実数値

(5) $a_{jk}(x)$は，一様連続で，一様有界

$$\sum a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq \delta|\xi|^2 \quad (\delta>0,\ x,\xi\in R^n)$$

(6) $a_j(x)$，$a(x)$は，連続で，一様有界

$$a(x) \leq 0.$$

さて，この時

$$\mathcal{D}(A_p)=\{u \mid u\in C_0,\ u\in W^{2,p}_{loc}(R^n),\ \mathcal{A}u\in C_0\}$$

$$A_p u = \mathcal{A}u$$

$\left(\mathcal{A}u = \sum a_{jk}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum a_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + au\right.$ なる形式的な作用素)

と，C_0の中の作用素を定めますと，

命題 1　$p>n$に対して，

(i) A_pは，pに独立なC_0の中の閉作用素

(ii) $A(=A_p)$は解析的半群T_tを生成し，T_tは$\mathrm{Re}\,t>0$なる複素半平面全体に，tに関し解析的に延長されえる。

係数が，tによる場合はどうでしょうか？ 係数が，各tに対して，上の(4)－(6)をみたす外に，tに関し

(xについては一様に) Hölder 連続 と仮定すれば、

命題2 各 t に対して、A と同様にして、$A(t)$ を定めるならば、($A(t)$ は形式的に、

$$A(t)u = \sum a_{jk}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum a_j(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x,t)u$$

で与えられる) $A(t)$ は C_0 で evolution operator $U(t,s)$ を生成する

(7) $U(t,r) = U(t,s)U(s,r)$ $(s < r < t)$

(8) $U(t,t) = I$ (identity operator)

(9) $U(t,s)$ は、$0 \leqq s \leqq t$ につき強連続.

(10) $\dfrac{\partial}{\partial t}U(t,s) = A(t)U(t,s)$ $(0 < s < t)$

(11) $\dfrac{\partial}{\partial s}U(t,s)x = -U(t,s)A(s)x$ $(x \in D(A(s)))$.

ここで、$D(A(t))$ は、t につき変化する ことに注意する必要があります。上の係数に関する条件よりも、もっと弱く t につき (xにつき一様に)連続 のみで上の命題2がでるか、私にはわかりませんでした。t につき解析的ならばどうでしょうか？ (1)及び(2) の結果を適用して

$U(t,s)$ は実軸の近傍で, t と s ($|\arg(t-s)| < \text{const.}$) につき, 正則である ── ことが示されます。そのような $U(t,s)$ を H.E.O. と名づけます。

§2. 結果

定理 1. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Δ を $[0,T)$ の複素凸近傍. X を複素 Banach 空間. $S_\delta = \{(s,t) \mid s,t \in \Delta, |\arg(t-s)| < \delta\}$.
$\{U(t,s)\}$ を, $(s,t) \in S_\theta$ で定義された X の中の有界作用素の族で次の条件をみたすとする。

(1−1) $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$
$U(t,t) = I$
$((r,s),(s,t) \in S_\theta)$

(1−2) 任意の ε に対して,
$U(t,s)$ は $S_{\theta-\varepsilon}$ の中一様有界で $S_{\theta-\varepsilon}$ の中で, $s=t$ で連続

(1−3) $U(t,s)$ は, $(s,t) \in S_\theta$ につき正則.

この時,

$$D(A(t)) = \left\{x \;\middle|\; \lim_{h\downarrow 0} \frac{U(t+h,t)-I}{h} x = \text{有在} (\equiv y)\right\}$$

$$A(t)x = y \quad \left(\equiv \lim_{h\to 0}\, [U(t+h,t) - I]x/h\right)$$

と定めると，

(1-a) $A(t)$ は稠密に定義された閉作用素

任意のコンパクト集合 K（Δの中）と任意の $\varepsilon > 0$

に対して，λ_0, M が存在して

(1-b)

$$\Sigma\left(\lambda_0; -\frac{\pi}{2}-\theta+\varepsilon, \frac{\pi}{2}+\theta-\varepsilon\right) (\equiv \Sigma) \subset \rho(A(t))$$

（t は K のある近傍の中）

(1-c) $\|(z-A(t))^{-1}\| \leq M/|z| \quad \begin{pmatrix} t\in K \\ z\in\Sigma \end{pmatrix}$

(1-d) $(z-A(t))^{-1}$ は，各 z を固定した時に，t につき正則 $(t\in K)$.

が成立する。

この逆は，H. Komatsu（東大理学部紀要，'61）にはじまり，Kato-Tanabe は，(1) (2) の中で，次の如く与えた。

<u>定理2</u> (Kato-Tanabe) $\{A(t)\}$ を，上の (1-a)～(1-d) をみたす X の中の作用素の族とする。この時 Ω_θ 上で定義された X の中の有界作用素の族 $\{U(t,s)\}$ で，(1-1) (1-2) (1-3) 及び

$$(1\text{-}4)\quad \frac{\partial}{\partial t} U(t,s) = A(t)\, U(t,s) \qquad (s,t) \in \Omega_\theta$$

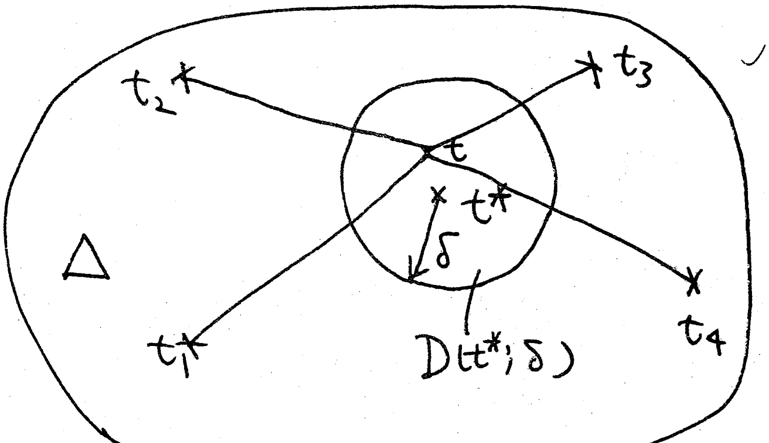
$$(1\text{-}5)\quad \frac{\partial}{\partial s} U(t,s)\, x = - U(t,s)\, A(s)\, x \qquad (s,t) \in \Omega_\theta \ , \ x \in D(A(s))$$

をみたすものが存在する。

§3 定理1の証明

任意の $t^* \in \Delta$ を固定する。十分小さい $\eta > 0$ をとると、次の如き $\delta > 0$ と $t_1, \dots, t_4 \in \Delta$ が存在する;

$$\theta - 2\eta < \arg(t - t_1) < \theta - \eta$$
$$\theta - 2\eta < \arg(t_3 - t) < \theta - \eta$$
$$-\theta + \eta < \arg(t - t_2) < -\theta + 2\eta$$
$$-\theta + \eta < \arg(t_4 - t) < -\theta + 2\eta$$
$$(\forall t \in D(t^*;\delta) \equiv \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - t^*| \le \delta \})$$



$$V(t,t_1;z) \equiv \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)}\, U(t,s)\, ds$$

（積分路は線分 $[t_1,t]$）

と定めると，これは次の性質をもつ。

(i) $V(t,t_1;z)$ は $t\in D(t^*;\delta)$ につき正則

(ii) $\|V(t,t_1;z)\| \leq \mathrm{Const.}/|z|$

$\left(t\in D(t^*;\frac{\delta}{2}),\ -\frac{\pi}{2}-\theta+3\eta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}-\theta-3\eta\right)$

(iii) $\|V_t(t,t_1;z)\| \leq \mathrm{Const.}/|z|$

（(ii) と同じ t, z に対して）

(iv) $\lambda V(t,t_1;\lambda) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} I$ (strongly)

（λ は実数）

(v) 任意の $x\in X$ に対して，$V(t,t_1;z)x \in D(A(t))$

(vi) $(z-A(t))V(t,t_1;z) = I - V_t(t,t_1;z)$.

以下，順次証明する。

$J_\varepsilon \equiv \int_{t_1}^{t-\varepsilon} e^{-z(t-s)}\, U(t,s)\, ds$ は (1-3) によって正則。$\varepsilon\downarrow 0$ の時，この積分は，t につき一様に，(1-2) より，

$J \equiv \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)}\, U(t,s)\, ds$

に収束する。よって J は正則である。

$$\| V(t, t_1 ; z) \| \leq \int_{t_1}^{t} e^{-\mathrm{Re}[z(t-s)]} \| U(t,s) \| ds$$
$$\leq \mathrm{Const.} / |z| \cos(\theta' + \theta'')$$

$(\theta' = \arg z. \quad \theta'' = \arg(t - t_1))$
よって、(ii) を得る。 $V(t, t_1; z)$ は正則より

$$V(t, t_1; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t^* - \zeta| = \delta} \frac{V(\zeta, t_1; z)}{\zeta - t} d\zeta$$

とかかれる。よって、

$$V_t(t, t_1; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t^* - \zeta| = \delta} \frac{V(\zeta, t_1; z)}{(\zeta - t)^2} d\zeta$$

であるから、

$$\| V_t(t, t_1; z) \| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t^* - \zeta| = \delta} \frac{\| V(\zeta, t_1; z) \|}{(\zeta - t)^2} d\zeta$$
$$\leq \mathrm{Const.} \| V(\zeta, t_1; z) \|$$
$$\leq \mathrm{Const.} / |z| \qquad [\text{(ii) より}]$$

を得る。 (iv) を示す。

$$\lambda V(t, t_1; z) = \lambda \int_{t_1}^{t} e^{-\lambda(t-s)} U(t,s) ds$$
$$= \int_{0}^{\lambda(t-t_1)} e^{-s} U(t, t - \tfrac{s}{\lambda}) ds$$
$$\xrightarrow[\text{(強)}]{} \int_{0}^{\infty} e^{-s} ds \; U(t,t)$$

$$= I \qquad (\lambda \to \infty)$$

ここで、仮定 (1-1)(1-2) を用いた。容易な計算より

$$V(t+h, t_1; z) - V(t, t_1; z)$$

$$= \int_{t_1}^{t+h} e^{-z(t+h-s)} U(t+h, s)\, ds - \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)} U(t, s)\, ds$$

$$= \int_{t}^{t+h} e^{-z(t+h-s)} U(t+h, s)\, ds + \int_{t_1}^{t} [e^{-z(t+h-s)} - e^{-z(t-s)}] U(t+h, s)\, ds + \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)} [U(t+h, s) - U(t, s)]\, ds$$

$$\equiv J_1 + J_2 + J_3 .$$

左辺は、(ハ)によって正則より、両辺を h で割り $h \downarrow 0$ ととることによって、

$$\text{左辺} \xrightarrow[(強)]{} V_t(t, t_1; z) \qquad (h \downarrow 0)$$

容易に、

$$\frac{1}{h} J_1 \to I \qquad (h \downarrow 0)$$

$$\frac{1}{h} J_2 \to -z \int_{t_1}^{t} e^{-z(t-s)} U(t, s)\, ds$$

$$= -z\, V(t, t_1; z)$$

ところで，仮定 (1−1) によって

$$J_3 = [U(t+h,t) - I]\ V(t, t_1; z)$$

を得る．故に

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h,t)-I}{h} V(t, t_1; z) = \text{存在}$$

且

$$V_t(t, t_1; z) = I - zV(t, t_1; z) + A(t)V(t, t_1; z)$$

をみたす。これは (v), (vi) の成立を示す。

同様に，

$$W(t_3, t; z) \equiv \int_t^{t_3} e^{-z(s-t)}\, U(s,t)\, ds$$

と定義すると，この W は，(i) (ii) — (v) の外に，

(vi)′ 任意の $x \in D(A(t))$ に対して，

$$W(t_3, t; z)(z - A(t))x = x + W_t(t_3, t; z)x$$

をみたす。

さて，λ_0 を十分大きくとって，

$$\| V_t(t, t_1; z) \| < \frac{1}{2}$$

$$\| W_t(t_3, t_1; z) \| < \frac{1}{2}$$

が，$|z| \geq \lambda_0$ に対し成立するとする。((iii) による)。

次に,

$$B(t,t_1;z) = V(t,t_1;z)\,(I - V_t(t,t_1;z))^{-1}$$

とおくと, (i) — (iv) によって

(12) $B(t,t_1;z)$ は, $t \in D(t^*, \frac{\delta}{2})$ に対し正則.

(13) $\|B(t,t_1;z)\| \leq 2\,\|V(t,t_1;z)\|$

$$\leq \mathrm{Const.}/|z|$$

$$\left(z \in \Sigma(\lambda_0; -\frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta, \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta)\right)$$

(14) $(z - A(t))\,B(t,t_1;z) = I$

(iv) と (v) によって $D(A(t))$ は X の中稠密且又 (vi) を考慮すれば, $B(t,t_1;z) = (z - A(t))^{-1}$ 且

(イ) $\Sigma(\lambda_0; -\frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta, \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta) \subset \rho(A(t))$

(ロ) $\|(z - A(t))^{-1}\| \leq \mathrm{Const.}/|z|$

$$\left(z \in \Sigma(\lambda_0; -\frac{\pi}{2} - \theta + 3\eta, \frac{\pi}{2} - \theta - 3\eta)\right)$$

(ハ) $(z - A(t))^{-1}$ は, $t \in D(t^*, \frac{\delta}{2})$ で t につき正則

が示される。同様に, t_1, t_3 の代わりに, t_2, t_4 を用い, t^* が Δ の任意の元, η は任意に小さい数, コンパクト集合 K $(\subset \Delta)$ は $D(t^*_j, \delta_j)$ の有限個でおおわれる事を考慮すれば, 求めるべき結論をえる。

(終り)