数理解析研究所講究録
第121巻 1971年 83-100



# On Dirichlet problems for some degenerate elliptic equations

立命大 理工　　中岡 明

## §1. 序

退化した楕円型方程式に対する境界値問題は、数多くの研究がなされているが、その一つの特徴的な困難さは、退化していない場合と比較して、統一的なとり扱いができないことである。例えば、次の二つの方程式を $\mathbb{R}^1_+$ で考えよう。

$$(1.1)\qquad -\rho(x)u'' + u = f(x)$$

$$(1.2)\qquad -(\rho(x)u')' + u = f(x)$$

ここで, $\rho(x)$ は非負で有界, そして $x=0$ のみで $\rho(x)=0$ となるものとする。もしも, $f(x)$ を $L^2(\mathbb{R}^1_+)$ とし, 解を $L^2(\mathbb{R}^1_+)$ の subspace で求めるとすると, (1.2) に対しては, $u(x)$ 及び $\sqrt{\rho(x)}\,u'(x)$ が $L^2(\mathbb{R}^1_+)$ に属するようなものを求めるのが"自然"であろう。そしてこの時, 結果として $(\rho(x)u')' \in L^2(\mathbb{R}^1_+)$ となる。さて, $\rho(x)$ を $x=0$ の近傍で $\sqrt{x}$ に等しい関数とし, $u(x)$ も $x=0$ の近傍で $\sqrt{x}$ に等しく, かつその support が有界な関数とすると

明かに，$u(x)$, $\sqrt{\rho(x)}\,u'(x)$, そして $(\rho(x)u')'$ は $L^2(\mathbb{R}^1_+)$ に属するが，$\rho(x)\,u''(x)$ は $x=0$ の近傍で $x^{-1}$ であるから，$L^2(\mathbb{R}^1_+)$ には属さない。このことは，(1.1) と (1.2) とを同じ関数空間でとり扱うことは適当でないことを suggest している。従って，退化した方程式を考える場合には，その方程式にうまく attach した関数空間を選ぶ必要があろう。

さて，$\Omega$ を $\mathbb{R}^n$ の中の half-space 又は smooth な compact hypersurface で囲まれた領域としよう。我々は主として，$\Omega$ で定義された次のような2階の微分作用素 $A(x,D)$ を考える。即ち $A(x,D)$ は，おのおの十分小なる boundary patch において

$$(1.3)\qquad A(x,D) = -\sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x)\,\partial_j\partial_k + \text{first order operator},$$

と表わされるものとする。ただし，ここで

$$(1.4)\qquad \sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x)\,\xi_j\bar{\xi}_k \geqq c\,|\xi|^2 \qquad \xi=(\xi_0,\cdots,\xi_{n-1})\in\mathbb{C}^n$$

$$(\,c>0,\quad \tilde{a}_{jk} = \overline{\tilde{a}_{kj}}\,)$$

であり，$\partial_0 = \rho(r)\dfrac{\partial}{\partial\nu}^{(*)}$, $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial\tau_j}$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ である。又，$r=r(x)$ は，$x\in\Omega$ から，$\Omega$ の境界 $\Gamma$ への距離である。$\rho$ については，§2 で詳しく述べる。

(*) $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ と $\dfrac{\partial}{\partial\tau_j}$ $(j=1,2,\cdots,n-1)$ は次のようにして定義する。$\forall x_0\in\Gamma$ に対して，$x_0$ を原点として，$\Gamma$ 上に一つの curvi-linear coordinate system $\sigma(\Gamma)$ を考える。ここで，$x_0$ の

十分小さい近傍$V(x_0)$を考えると，$\forall x \in V(x_0)$に対して，唯一の点$y$が$\Gamma$上に存在して，$\overrightarrow{yx}$が，$y$における normal vector に一致する。次に$\Gamma_r = \{x \in V(x_0)\,;\ \cancel{dis(x, \Gamma)}\ |\overrightarrow{yx}| \leq r\}$とおき，$\Gamma_r$には，$\Gamma = \Gamma_0$の coordinate system $\sigma(\Gamma)$によって induce された coordinate system $\sigma(\Gamma_r)$が定義されているものとする。ここで，local coordinate $(\nu, \tau_1 \cdots \tau_{n-1})$を$x \in V(x_0) \cap \Gamma_r$ $(r \geq 0)$に対して次のように定める。

$$(1.5)\begin{cases} \nu = |\overrightarrow{yx}| \\ \tau_j = \text{the } j\text{-th coordinate of } x \text{ through } \sigma(\Gamma_r). \end{cases}$$

従って　$x = (x_1, \cdots, x_n)$として

$$(1.6)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \nu} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial x_k} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \tau_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial \tau_j} \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad (j = 1, 2, \cdots, n-1) \end{cases}$$

である。

我々は，ここで，ある weight をもった Sobolev space において，Dirichlet problem に対する解の存在及び，その時の lower order terms について考察する。

## §2. Half-space $\mathbb{R}^n_+$ における weighted Sobolev spaces.

我々が問題を扱う空間を設定するには，まず$\mathbb{R}^n_+$における

それから考えた方が便利である。そこで $\mathbb{R}^n_+$ における weighted Sobolev spaces を導入しよう。

$\rho(x)$ を次のような real-valued function としよう。

i) $\rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1_+) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}^1_+})$

ii) $0 \leqq \rho(x) \leqq M$ で $\rho(x)$ は $x=0$ のみで $0$ になる。

iii) $c_1 x^\alpha \leqq \rho(x) \leqq c_2 x^\alpha$ かつ $|\rho^{(m)}(x)| \leqq c_m x^{\alpha-m}$ $(m=1,2,\cdots)$ が $x=0$ の近傍で成りたつ。 $(0<\alpha<1)$

iv) $0<\gamma \leqq \rho(x)$ かつ $|\rho^{(m)}(x)| \leqq K_m$ $(m=1,2,\cdots)$ が $x \to \infty$ のとき成りたつ。

さて，$\rho(x)$ を $x<0$ に対しては，$\rho(-x)$ で拡張し，その拡張された関数を $\tilde{\rho}(x)$ であらわす。又，$\phi(x)$ 及び $\tilde{\phi}(x)$ を次の式によって定義する。

$$(2,1) \qquad \phi(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\rho(\xi)}$$

$$(2,2) \qquad \tilde{\phi}(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\tilde{\rho}(\xi)} .$$

定義 2, 1. $\mathbb{R}^n_+ = \{(x,y);\ x>0,\ y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ 上の distribution $u(x,y)$ が $W^m(\mathbb{R}^n_+, \phi)$ に属しているとは

$$(2,3) \qquad \|u\|^2_{m,\phi} = \sum_{j+|k| \leqq m} \int_{\mathbb{R}^n_+} |D_\rho^j D_y^k u|^2 \, d\phi \, dy$$

が有限の場合を云う。ただし，$D_\rho = -i\rho(x)\frac{\partial}{\partial x}$ であり

$D_y^k=(-i)^{|k|}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\right)^{k_{n-1}}$ であり，$m$ は~~正~~非負整数である。

定義 2.2. $\mathbb{R}^n$ 上の distribution $u(x,y)$ が $W^m(\mathbb{R}^n,\tilde{\phi})$ に属しているとは，

$$(2,4)\quad \|u\|_{m,\tilde{\phi}}^2=\sum_{j+|k|\leq m}\int_{\mathbb{R}^n}|D_{\tilde{\rho}}^j D_y^k u|^2 d\tilde{\phi}\,dy$$

が有限の場合を云う。ただし，$D_{\tilde{\rho}}=-i\tilde{\rho}(x)\frac{\partial}{\partial x}$ である。

明らかに，$W^m(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ 及び $W^m(\mathbb{R}^n,\tilde{\phi})$ はノルム (2,3) 及び (2,4) によって Hilbert spaces を作る。又，自然な制限によって $W^m(\mathbb{R}^n,\tilde{\phi})\subset W^m(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ である。

$W^m(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ については，通常の Sobolev space と同様の性質を示すことができる。即ち

命題 2.1 $u(x,y)\in W^m(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ とすると，$D_\rho^j D_y^k u$ $(j+|k|\leq m)$ の trace $D_\rho^j D_y^k u(0,y)=\lim_{x\downarrow 0}D_\rho^j D_y^k u(x,y)$ が $H^{m-j-|k|-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ の中に存在して

$$(2,5)\quad |D_\rho^j D_y^k u(0,\cdot)|_{m-j-|k|-1/2}\leq \text{const}\,\|u\|_{m,\phi}$$

$$(2,6)\quad |D_\rho^j D_y^k u(0,\cdot)|_s\leq \text{const}\left(\varepsilon\|u\|_{m,\phi}+C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi}\right)$$

$$(s<m-j-|k|-1/2,\quad \forall\varepsilon>0)$$

がなりたつ。

命題 2.2. 1) $u(x,y)$ と $D_\rho^m u(x,y)$ が $W^0(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ に属しているとすると，$D_\rho^k u(x,y)$ $(1\leq k\leq m-1)$ も $W^0(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ に属しており

$$(2.7)\quad \|D_\rho^k u\|_{0,\phi} \leq C(k,m)\left(\varepsilon\|D_\rho^m u\|_{0,\phi} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi}\right)$$

が $\forall\varepsilon>0$ に対してなりたつ。

2) もしも，$D_y^k u$ $(|k|\leq m)$ と $D_\rho^m u$ とが $W^0(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ に属しているとすると，$u\in W^m(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ であり，$\forall\varepsilon>0$ に対して

$$(2.8)\quad \sum_{j+|k|<m}\|D_\rho^j D_y^k u\|_{0,\phi} \leq \varepsilon\sum_{j+|k|=m}\|D_\rho^j D_y^k u\|_{0,\phi} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi}$$

がなりたつ。

次の補題は低階の項を扱うのに重要である。

補題 2.1. $u(x,y)\in W^2(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ で $\alpha<1/3$ とする。このとき，$\frac{\partial u}{\partial x}\in W^0(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ であり $\forall\varepsilon>0$ に対して

$$(2.9)\quad \|\partial u/\partial x\|_{0,\phi} \leq \varepsilon\|u\|_{2,\phi} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi}$$

がなりたつ。

Remark もしも $\alpha\geq 1/3$ とすると，$\partial u/\partial x \notin W^0(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ となるような $u(x,y)\in W^2(\mathbb{R}^n_+,\phi)$ がある。例えば，$x=0$ の近傍で，$\phi(x)g(y)$ $(g(y)\in L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ に等しいような関数を考えればよい。

定義 2, 3. $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ の $W^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ での completionを $W_0^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ で表わす。

次の命題は, 命題 2, 1. より明かである。

命題 2, 3. $u(x, y) \in W_0^m(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ とする。このとき, $D_\rho^j D_y^k u \ (j+|k| \leq m-1)$ の trace は全て $0$ である。

さて, $D_\rho$ は $W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ の内積に関して, formally self-adjoint であるが, $-i\frac{\partial}{\partial x}$ のそれは

$$(2, 10) \quad -i\frac{\partial}{\partial x} + (-i)\rho'\rho^{-1}$$

で与えられる。そして $\rho'\rho^{-1}$ は $x=0$ の近傍で $x^{-1}$ の order である。次の補題がなりたつ。

補題 2, 2. もしも $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi) \cap W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ で $\alpha < 1/3$ ならば, $u/x \in W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ であり, $\forall\varepsilon$ に対して

$$(2, 11) \quad \|u/x\|_{0,\phi} \leq \varepsilon\|u\|_{2,\phi} + C(\varepsilon)\|u\|_{0,\phi}$$

がなりたつ。更に, $\alpha \geq 1/3$ なら $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi) \cap W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ で $u/x \notin W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ なるものがある。

補題 2, 3. $u(x, y) \in W^2(\mathbb{R}_+^n, \phi) \cap W_0^1(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ とする。もしも, $\beta < 1-\alpha$ ならば, $x^{-\beta}\frac{\partial u}{\partial y_j} \ (j=1, 2, \cdots, n-1) \in W^0(\mathbb{R}_+^n, \phi)$ であり, $\forall\varepsilon>0$ に対して

(2, 12) $\| x^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial y_j} \|_{0,\phi} \leq \varepsilon \|u\|_{2,\phi} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,\phi}$

がなりたつ。

最後に、一つの関数の族を導入する。

定義 2, 4. $a(x, y) \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ であるとは、$D^j_\rho D^k_y a(x, y)$ $(j + |k| \leq m)$ がすべて連続で有界である時をいう。

Remark. $\mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ は十分に沢山の要素をもっている。実際 $\alpha(x, y) \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+)$ とすれば、$\alpha(\phi(x), y) \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+)$ であるし、$\varphi(x, y) + const \in \mathcal{B}^m(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ $(\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n_+))$ である。

§3. 一般の領域 $\Omega$ における weighted Sobolev spaces.

$\Omega$ を $\mathbb{R}^n$ の中の領域とし、その境界は smooth で compact な hypersurface とする。まず、次の定義から始めよう。

定義 3, 1. $\omega$ を $\Omega$ の境界の近くの十分小さい closed neighbourhood とし、$\omega$ では、$\partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\tau$ が定義されているものとする。$\omega$ 上の関数 $a(x)$ が $\mathcal{B}^m(\omega, \rho)$ に属しているとは、$(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu})^j (\frac{\partial}{\partial\tau})^k a(x)$ $(j + |k| \leq m)$ が全て有界連続である場合を云う。

Remark. $a(x) \in \mathcal{B}^m(\omega, \rho)$ は、例えば、次のようにして作ら

れる。$\alpha(\nu,\tau)\in\mathcal{B}^m(R^n_+,\phi)$ とし, その support は十分小さいとする。$a(x)=\alpha\circ\theta^{-1}(\nu,\tau)$ とおくと $a(x)\in\mathcal{B}^m(\omega,\rho)$ である。ただし $\theta^{-1}$ は, (1.5) で定義された $\theta;\ x\longrightarrow(\nu,\tau)$ の逆変換である。

さて, $\bar{\Omega}$ の finite covering $\{\omega_p\}$ で, 次のようなものをとろう。

1) $\Omega$ の境界 $\Gamma$ に contact ~~する~~ する covering neighborhood (それを $\omega^*_\lambda$ で表わす) については, 十分小なる $\varepsilon>0$ に対して

$$\bigcup_\lambda \omega^*_\lambda \supset \bar{\Omega}_\varepsilon$$

2) inner coverings (それを $\tilde{\omega}_\mu$ で表わす) については,

$$\bigcup_\mu \tilde{\omega}_\mu \subset C\Omega_{\varepsilon/2}$$

ただし, $\Omega_\gamma=\{x\in\bar{\Omega};\ dis(x,\Gamma)<\gamma\}$ である。そして次のような $\bar{\Omega}$ 上の parition of unity $\{\varphi^*_\lambda\}\cup\{\tilde{\varphi}_\mu\}$ をとろう。

1) $supp.\varphi^*_\lambda\subset\omega^*_\lambda$, $supp.\tilde{\varphi}_\mu\subset\tilde{\omega}_\mu$,

ただし, 各 $\omega^*_\lambda$ では $\partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\tau$ が define されているとする。

2) $\sum\varphi^{*2}_\lambda+\sum\tilde{\varphi}^2_\mu=1$, $\varphi^*_\lambda\in\mathcal{B}^\infty(\bar{\omega}^*_\lambda,\rho)$, $\tilde{\varphi}_\mu\in C^\infty_0(\tilde{\omega}_\mu)$.

定義 3.2. $\Omega$ 上の distribution $u(x)$ が $W^m(\Omega,\rho)$ に属しているとは,

$$(3.1)\quad \|u\|^2_{m,\rho,\Omega}=\sum_{j+|k|\le m}\sum_\lambda\int_\Omega\left|\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^k(\varphi^*_\lambda u)\right|^2\frac{dx}{\rho(r)}$$
$$+\sum_{|\ell|\le m}\sum_\mu\int_\Omega\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell(\tilde{\varphi}_\mu u)\right|^2\frac{dx}{\rho(r)}$$

が有限の場合を云う。

Remark, (3, 1) で与えられたノルムは, $\varepsilon$ や単位の分解の選び方に depend するが, 他の選び方をしても, 同等のノルムを与えるので, $\|\cdot\|_{m,\rho,\Omega}$ でもって, 任意に固定された $W^m(\Omega, \rho)$ の topology を表わすことにする。

又, $W_0^m(\Omega, \rho)$ でもって $C_0^\infty(\Omega)$ の $W^m(\Omega, \rho)$ での completion を表わすことにする。明らかに, $W^m(\Omega, \rho)$ 及び $W_0^m(\Omega, \rho)$ は, $\|\ \|_{m,\rho,\Omega}$ によって Hilbert space になる。

(1, 5) で定義された変換を考えることによって, 次の命題や補題が得られる。

命題 3, 1, $\forall u(x) \in W^m(\Omega, \rho)$ に対して $D^\beta u(x)$ $(|\beta| < m)$ は $\Gamma$ への trace $\gamma D^\beta u \in H^{m-|\beta|-1/2}(\Gamma)$ をもち

(3, 2) $$|\gamma D^\beta u|_{m-|\beta|-1/2,\Gamma} \leq \text{const}\, \|u\|_{m,\rho,\Omega}$$

(3, 3) $$|\gamma D^\beta u|_{s,\Gamma} \leq \varepsilon \|u\|_{m,\rho,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,\rho,\Omega}$$
$$(s < m - |\beta| - 1/2, \quad \forall \varepsilon > 0)$$

がなりたつ。

補題 3, 1. $u(x) \in W^2(\Omega, \rho)$ $(\alpha < 1/3)$ とすると, $\partial u/\partial x_j \in W^0(\Omega, \rho)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ であり, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

(3, 4) $$\|\Gamma \partial u/\partial x_j\|_{0,\rho,\Omega} \leq \varepsilon \|u\|_{2,\rho,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|_{0,\rho,\Omega}$$

がなりたつ。

補題 3.2, $u(x) \in W^2(\Omega, \rho) \cap W_0^1(\Omega, \rho)$ $(\alpha < 1/3)$
とすると $u/r(x) \in W^0(\Omega, \rho)$ であり, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

(3.5) $\| u/r \|_{0,\rho,\Omega} \leq \varepsilon \| u \|_{2,\rho,\Omega} + C(\varepsilon) \| u \|_{0,\rho,\Omega}$

がなりたつ。

補題 3.3. $u(x) \in W^2(\Omega, \rho) \cap W_0^1(\Omega, \rho)$ とする。各 $\omega_\lambda^*$ に対して, $\beta < 1 - \alpha$ のとき $\forall \varepsilon > 0$ に対して

(3.6) $\displaystyle\int_{\omega_\lambda^* \cap \Omega} \left| r^{-\beta} \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|^2 \frac{dx}{\rho(r)} \leq \varepsilon \| u \|_{2,\rho,\Omega} + C(\varepsilon) \| u \|_{0,\rho,\Omega}$

がなりたつ。

§4 Dirichlet problems. さて, 次の方程式を考えよう。

$$(4.1) \begin{cases} Au \equiv -\displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u \\ \qquad = f(x) \in W^0(\Omega, \rho) \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

ここで, $A$ は, 各 $\omega_\lambda^*$ において, 次のように表わされるとする。

$$(4.2) \quad A = -\sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \partial_j \partial_k + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{b}_j(x) \partial_j + \tilde{c}_0(x) \frac{\partial}{\partial \nu}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{c}_j(x) r^{-\beta} \partial_j + \tilde{d}_0(x) \frac{1}{r} + d(x)$$

ただし $\displaystyle\sum_{j,k=0}^{n-1} \tilde{a}_{jk}(x) \xi_j \bar{\xi}_k \geqq c|\xi|^2$, $(\beta < 1 - \alpha)$ $(\tilde{a}_{jk} = \overline{\tilde{a}_{kj}})$
であり, 各係数については, $\tilde{a}_{jk} \in \mathcal{B}^3(\omega_\lambda^*, \rho)$, $\tilde{b}_j(x), \tilde{c}_j(x) \in \mathcal{B}^1(\omega_\lambda^*, \rho)$

$(j=0,1,\cdots n-1)$ かつ $\tilde{d}_0(x)$, $\tilde{d}(x)\in\mathcal{B}^0(\omega^*_\lambda,\rho)$ とする。

Dirichlet problem を扱うには，いわゆる Gårding の不等式が重要な働きをするが，そのために次の補題を準備する。

補題 4.1. $u(x)\in W^1_0(\Omega,\rho)$ とし，$\alpha<1/2$ とする。この時 $\forall\varepsilon>0$ に対して

(4.3) $$\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}u\right|\frac{dx}{\rho(r)}\leqq\varepsilon\|u\|^2_{1,\rho,\Omega}+C(\varepsilon)\|u\|^2_{0,\rho,\Omega}$$
$(j=1,2,\cdots,n)$

(4.4) $$\int_\Omega\frac{|u|^2}{r}\frac{dx}{\rho(r)}\leqq\varepsilon\|u\|^2_{1,\rho,\Omega}+C(\varepsilon)\|u\|^2_{0,\rho,\Omega}$$

(4.5) $$\int_{\omega^*_\lambda\cap\Omega}r^{-\beta}\left|\frac{\partial u}{\partial\tau}u\right|\frac{dx}{\rho(r)}\leqq\varepsilon\|u\|^2_{1,\rho,\Omega}+C(\varepsilon)\|u\|^2_{0,\rho,\Omega}$$
$(\beta<1-\alpha)$

がなりたつ。

補題 4.1 を使って，次の命題を示すことができる。

命題 4.1 (Gårding の不等式)　作用素 A の principal part の係数は $C^1(\Omega)$，その他は $C^0(\Omega)$ に属しているものとする。更に (4.2) において，$\tilde{a}_{jk}(x)\in\mathcal{B}^1(\omega^*_\lambda,\rho)$，$\tilde{b}_j(x)$，$\tilde{c}_j(x)$ $\tilde{d}_0(x)$，$\tilde{d}(x)\in\mathcal{B}^0(\omega^*_\lambda,\rho)$ とする。このとき，$\forall u(x)\in W^1_0(\Omega,\rho)$ $(\alpha<1/2)$ に対して，正の定数 C と K があって

(4.6) $$\mathrm{Re}\langle Au,\bar{u}\rangle_{\rho,\Omega}\geqq C\|u\|^2_{1,\rho,\Omega}-K\|u\|^2_{0,\rho,\Omega}$$

がなりたつ。ここで，$\langle\ ,\ \rangle_{\rho,\Omega}$ は $W^0(\Omega,\rho)$ の内積より induce された $W^1_0(\Omega,\rho)'\times W^1_0(\Omega,\rho)$ 上の sesqui-linear form である。又，$\alpha \geqq 1/2$ とすると，(4-6) は一般になりたたない。

定義 4.1　$u(x) \in W_0^1(\Omega, \rho)$ $(\alpha < 1/2)$ が全ての $v(x) \in W_0^1(\Omega, \rho)$ $(\alpha < 1/2)$ に対して

$$(4.7) \quad \langle \overline{A^* v}, u \rangle_{\rho, \Omega} = \langle f, v \rangle_{\rho, \Omega}$$

をみたしているとき，$u(x)$ を (4.1) の weak solution という。ここで $A^*$ は $W^0(\Omega, \rho)$ の内積に関する formal adjoint である。

補題 4.2　$a_{jk}(x) \in \mathcal{B}^3(C\Omega_\delta)$，$b_j(x) \in \mathcal{B}^1(C\Omega_\delta)$ $c(x) \in \mathcal{B}^0(C\Omega_\delta)$ $(\delta > 0)$ とし，各 $\omega_\lambda^*$ に対して，$\tilde{a}_{jk}(x) \in \mathcal{B}^3(\omega_\lambda^*, \rho)$ $\tilde{b}_j(x)$，$\tilde{c}_j(x) \in \mathcal{B}^1(\omega_\lambda^*, \rho)$ かつ $\tilde{d}_0(x)$，$\tilde{d}(x) \in \mathcal{B}^0(\omega_\lambda^*, \rho)$ とすると，$A^*$ の係数は命題 4.1 の仮定をみたす。

以上をまとめると，Lax-Milgram の lemma によって次の定理を得る。

定理 4.1，　A の係数は，補題 4.2 の仮定をみたしているものとする。もし，$\alpha < 1/2$ ならば，$\forall f \in W_0^1(\Omega, \rho)'$ に対して，$\lambda > 0$ を十分大にとれば，

$$\begin{cases} Au + \lambda u = f \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

は unique な weak solution をもつ。

次に $f(x) \in W^0(\Omega, \rho)$ のとき，weak solution $u(x)$ は

$W^2(\Omega, \rho)$に属するか，という問題であるが，これは無条件ではなりたたない。実際補題3.1及び補題3.2からもわかるように $\alpha < 1/3$ の場合には正しい。即ち次の定理がなりたつ。

定理 4.2　もしも $f(x) \in W^0(\Omega, \rho)$ であり，$\alpha < 1/3$ ならば，(4,1)の weak solution $u(x)$ は $W^2(\Omega, \rho)$に属する。

この定理の証明は，大体において，退化していない楕円型方程式の解に対する differentiability を示す手法と同じであるが，若干の注意を要する。詳しくは[4]参照。

次に，$f(x) \in W^s(\Omega, \rho)$ ならば，解 $u(x)$ は $W^{s+2}(\Omega, \rho)$ に属するか，という問題があるが，これも一般には否定される。

次に $\Omega$ が有界領域の場合，Fredholm's alternative theorem がなりたつ。実際次の命題がなりたつからである。

命題 4.2.　$\Omega$ が有界のとき $W_0^1(\Omega, \rho)$ の有界集合は $W^0(\Omega, \rho)$ の precompact set を作る。

§5．高階の方程式に対する Dirichlet problems.　高階の方程式に対する Dirichlet problem も2階の場合と analogous にとり扱うことができる。$A$ を $\Omega$ で定義された $2m$ 階の微分作用素として，$\Omega$ の内部では楕円型とする。そして各 boundary patch で次のように表わされるものとする。

(5, 1) $A = \sum_{|\mu|=2m} \tilde{a}_\mu(x)\partial^\mu$ + lower order operator.

ここで, $\partial = (\rho(r)\partial/\partial\nu,\ \partial/\partial\tau_1, \cdots, \partial/\partial\tau_{n-1})$ であり, 更に

(5, 2) $(-1)^m \mathrm{Re} \sum_{|\mu|=2m} \tilde{a}_\mu(x)\xi^\mu \geqq c|\xi|^{2m}$

を仮定する。

我々の方程式は

$$(5,3)\begin{cases} Au = f \in W^0(\Omega, \rho) \\ \left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j u\Big|_\Gamma = 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, m-1 \end{cases}$$

である。

定義 5, 1. $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^m(\Omega, \rho)$ は, すべての $v(x) \in W^m_0(\Omega, \rho)$ に対して,

(5, 4) $\langle \overline{A^* v}, u \rangle_{\rho,\Omega} = \langle f, v \rangle_{\rho,\Omega}$

がなりたつとき, (5, 3) の weak solution と云う。

補題 5, 1. $B(x, D)$ を $(2m-1)$ 階の作用素とし, $\Gamma$ の近傍 $\omega$ で, 次のように表わされるものとする。

(5, 5) $B(x, D) = \sum_{j+|k|\leqq 2m-1} \tilde{b}_{j,(k)}(x)\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^k +$

$$+ \sum_{i+j+l+|k|\leqq 2m-1} \tilde{c}_{i,j,(k),l}(x)\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^i\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^j r^{-l+1+\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^k$$

$$+ \tilde{d}(x) \qquad (\beta < 1-\alpha).$$

ただし, $\tilde{b}_{j,(k)}(x) \in \mathcal{B}^{3m-j-|k|-1}(\omega, \rho)$, $c_{i,j,(k),l}(x) \in \mathcal{B}^{2m-i-j-|k|-l}(\omega, \rho)$

そして $d(x) \in C^0(\omega)$ かつ $|d(x)| \leq K r^{-2m+1}$ とする。このとき $\alpha < 1/2m$ ならば $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(5,6) \begin{cases} \int_\Omega |Bu \cdot u| \frac{dx}{\rho} \leq \varepsilon \|u\|^2_{m,\rho,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|^2_{0,\rho,\Omega} \\ \int_\Omega |B^* u_j u| \frac{dx}{\rho} \leq \varepsilon \|u\|^2_{m,\rho,\Omega} + C(\varepsilon) \|u\|^2_{0,\rho,\Omega} \end{cases}$$

がなりたつ。ここで $\alpha \geq 1/2m$ とすることは一般にできない。

命題 5,1 $\tilde{a}_\mu(x) \in \mathcal{B}^{3m}(\omega, \rho)$ とし，lower order term は補題 5,1 の条件をみたすものとし，又 $A$ の係数は（簡単のため）$C^{3m}(\Omega)$ に属しているものとする。このとき $\alpha < 1/2m$ ならば，

$$(5,7) \quad Re \langle \overline{A^* u}, u \rangle_{\rho,\Omega} \geq C \|u\|^2_{m,\rho,\Omega} - K \|u\|^2_{0,\rho,\Omega}$$

が，すべて $u(x) \in W^m_0(\Omega, \rho)$ に対して なりたつ。

以上のことをまとめると，次の定理が得られる。

定理 5,1, $A(x, D)$ は 命題 5,1 の条件をみたしているものとする。このとき，$\alpha < 1/2m$ で，$\lambda > 0$ を十分大とすれば，任意の $f \in W^m_0(\Omega, \rho)'$ に対して

$$\begin{cases} Au + \lambda u = f \\ u \in W^m_0(\Omega, \rho) \end{cases}$$

の unique weak solution が存在する。

更に解の differentiability については，次の定理がなりたつ。

定理 5.2. 低階項 $B(x,D)$ は $\Gamma$ の近傍で

$$(5.8)\quad B(x,D)=\sum_{j+|k|\le 2m-1}\tilde{b}_{j,(k)}(x)\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{j}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{k}+$$

$$+\sum_{i+j+|k|+l\le m}\tilde{c}_{i,j,(k),l}(x)\left(\rho(r)\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{i}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{j}r^{-l+1-\beta}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{k}$$

$$+\tilde{d}(x)$$

と表わされるものとし，$|\tilde{d}(x)|\le Kr^{-m}$ とする。このとき $\alpha<\frac{1}{2m+1}$ で $f(x)\in W^{0}(\Omega,\rho)$ ならば，weak solution $u(x)$ は $W^{2m}(\Omega,\rho)$ に属する。ここで，$\alpha\ge\frac{1}{2m+1}$ とは一般にできない。

$\Omega$ が有界の場合には，Fredholm の alternative theorem がなりたつ。

## References


[1] M. S. Baouendi : Sur une class d'operateurs elliptiques dégénérés. Thèse Paris 1966.

[2] S. Mizohata : Theory of Partial Differential Equations. Iwanami Tokyo 1965. (in Japanese)

[3] A, Nakaoka: Boundary value problems for some degenerate elliptic equations of second order with Dirichlet condition. Proc. Japan Acad. vol 46

1970, 248 – 252

[4] A. Nakaoka: On Dirichlet problems for some degenerate elliptic equations. Journal of Math. of Kyoto Univ. vol 10, No 3, 1970 375 ~ 401

[5] L. Nirenberg: Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. vol 8 1955 648 – 674

[6] N. Shimakura: Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. Journal of Math. of Kyoto Univ. vol 9. No. 2, 1969 275 – 335