

推定理論による非線形連立方程式の解法

九大理 伊藤久美子

非線形連立方程式の解法には、古くはニュートン法があり、近年それを改良したダビドン法等がある。このダビドン法(4)は、共役方向上の極値探索すなわちある指定された修正ベクトル上の最小値を求めるために探索点が広範囲に分布せずに確実に解の方向に向い、また n 変数の二次形式であれば、初期値にかかわらず繰り返し試行回数が n 回で収束するという性質があるために、一般の非線形関数に対する数値例が示すように、初期値に関係なく少ない試行回数で収束し、その確実性の裏がすぐれていると思われる。また藤原(2)は、非線形連立方程式を微分方程式と評価の問題におおして、その微分方程式の解曲線にそって評価を調べ、解曲線全体とその曲線上の評価を知った上で有界領域内のすべての解を求める大域的な数値解法を試みている。この方法は、その数値例が示すように解曲線がU字型の曲折曲線のようなかなり複雑な曲線であっても初期値によらずすべての解が求められる裏がすぐれていると思われる。このように上の二つの論文には、初期値に依存することなく解が着実に求まるという利点はあるが、共役方向上の極値探索や解曲線上の

評価に対する探索のために可成りの計算量を必要とし計算時間の莫に問題があると思われる。

本論文は、少なへ繰り返し試行で短時間に解に収束させることを目的として、非線形系推定問題 (1) に用いられる非線形フィルタの理論を導入して、上記のものとは別の大域的数値解法を試みた。すなわちニュートン法のように、探索莫における接線をとることにより関数とその線形近似式のづれが探索莫においてのみ零であるようにするのではなく、先験情報を利用して、探索莫から真値にわたる範囲で、その近似誤差に比較的大きな確率的重みを与えた。そしてその非線形関数との二乗誤差の確率平均を最小とするように大域的に線形近似し、これをニュートン法のように逐次的に反復して解を求める方法を適用した。

この推定理論による方法 (本論文の数値解法をそのように呼ぶ) で解いた二つの計算例では収束の莫がかなりすぐれた結果がえられた。

1. 推定値 \hat{x}_* とその分散 \hat{C} の導出

ベクトル値関数 $f(x) \in C^2$, $f' = (f_1, f_2)$, $x' = (x_1, x_2)$ が与えられたと互連立方程式

$$(1) \quad f(x) = 0$$

を満足する x を求める問題について考察する。まずこの

未知の解 x の予測値の確率分布が与えられたとする (この確率分布についてはのちに述べる)。その与えられた分布を正規分布

$$(2) \quad N(\bar{x}_*, C)$$

であるとする (図1参照)。ただし \bar{x}_* は平均値, C は (2 × 2) の分散共分散行列である。またここでは \bar{x}_* を最適予測値, C を最適予測値の分散と呼ぶことにする。

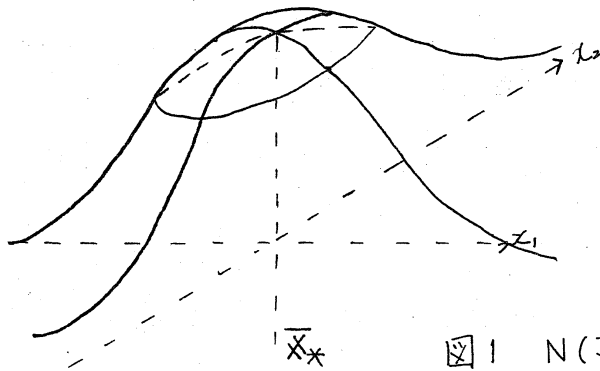


図1 $N(\bar{x}_*, C)$

今、ある実現値 x に対する $f(x)$ の値を y とおき、 y を観測値と呼ぶことにする。そしてこの観測値から上述の解 x の予測値の確率分布を逐次修正し、解 x に収束させる方法について述べよう。すなわち状態空間 R^2 の (図2参照) 離散 stochastic process を考え、時刻1の確率分布 $N(\bar{x}_*, C)$ が与えられているとして、つぎに観測値 y が0となる (状態が \bar{x}_* となる) 条件の基での時刻2の条件付確率分布を推定してみたい。その条件付確率分布の期待値

を最適推定値, 分散共分散行列を最適推定値の分散と呼ぶことにする。

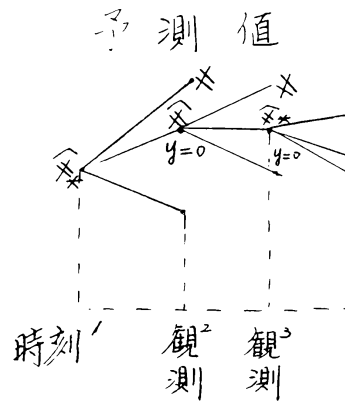


図 2 離散的なストカスティックプロセス

今, $f(x)$ を最適予測値 \bar{x}_x の近傍で二次の項までテイラー展開したとすれば

$$(3) \quad f(x) \cong f(\bar{x}_x) + f'_x(\bar{x}_x)(x - \bar{x}_x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \psi_i (x - \bar{x}_x)^i + f''_{xx}(\bar{x}_x)(x - \bar{x}_x)^2 + \nu$$

とか、ことが出来る。ただし

$$(4) \quad (f'_x(\bar{x}_x))^{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \Big|_{x=\bar{x}_x}$$

$$(f''_{xx}(\bar{x}_x))^{ik} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k}$$

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$i = 1, 2$$

$$j = 1, 2$$

$$k = 1, 2$$

である。(3) 式の右辺の ν は三次以上の項をまとめたもので、二次の項まで $f(x)$ を近似することによる誤差に相当する。この ν のついでに、理論的には知ることが出来るが

、 $f(x)$ を二次の項までのテーラー展開で近似して解を求める立場より考えれば、この y は未知であり、ある実現値 x に対して種々の値になる可能性をもっている。このような観点から、 y を確率変数とみなし、平均値 0 の正規分布 $N(0, V)$ に従うと仮定する。

つぎに予測値の分布 $N(\bar{x}_x, C)$ が与えられたとき解 x の最適推定値 \hat{x}_x を観測値 y によって求める方法について述べる。

いま、 $f(x)$ の逆関数が存在するとすれば、

$$(5) \quad x = f^{-1}(y)$$

とかけるから、目的は $f^{-1}(0)$ を求めることにある。そこで $f^{-1}(y)$ をつぎのような式

$$(6) \quad \hat{x}(y) = \bar{x}_x + K[y - f(\bar{x}_x)] + D$$

で近似し、 $\hat{x}(y)$ とかくことにする。ただし K は (2×2) の y の一次係数、 D は(3)式の二次項の補正項と考える。いま

(6)式に(3)式を代入すれば

$$(7) \quad \hat{x} = \bar{x}_x + K[f_x(\bar{x}_x)(x - \bar{x}_x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \psi_i(x - \bar{x}_x) f_{x_i}^2(x - \bar{x}_x) + \sqrt{V}] + D$$

となる。この式において、与えられた解 x の予測値 \hat{x} の確率分布を用いて、 \hat{x} の x からのずれについて

$$(8) \quad E(\hat{x} - x) = 0$$

$$(9) \quad E((\hat{x} - x)^2) = \min.$$

をみたすように K 、 D を定める。すなわち、(7)式より \hat{x}

は x の関数であり、さらに (5) 式 x の近似であるから、任意の予測値 x に対し、重み (確率分布) 付 x と \hat{x} が近いことが望ましい。これは確率的に (8), (9) 式で表わされる。文献 (1) の結果を書けば結局 (8) 式より

$$(10) \quad D_x = -K_x \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \psi_i^2 \text{tr} [f_{xx}^{(i)}(\bar{x}_*) C] \right)$$

となり、(9) 式により、

$$(11) \quad \left. \frac{\partial E \{ (\hat{x} - x)^2 \}}{\partial K} \right|_{K=K_*} = 0$$

となる K^* を決定すれば

$$(12) \quad K^* = C f_x(\bar{x}_*) [f_x(\bar{x}_*) C f_x(\bar{x}_*) + V + L]^{-1}$$

となる。ただし L は

$$(13) \quad (L)^{ij} = \frac{1}{2} \text{tr} [f_{xx}^{(i)}(\bar{x}_*) C f_{xx}^{(j)}(\bar{x}_*) C]$$

なる行列である。従ってこの K^* , D_x により逆関数 $f(x)$ の近似式 (6) は定まり、

$$(14) \quad \hat{x}(y) = \bar{x}_* + K_* [y - f(\bar{x}_*)] + D_x$$

とかけるので (14) 式の y に、解の観測値 y を代入すれば、この観測値に対する最適推定値 \hat{x}_* が定まり、

$$(15) \quad \hat{x}_* = \bar{x}_* - K_* f(\bar{x}_*) + D_x$$

と書くことができる。この最適推定値 \hat{x}_* を最適予測値としま。さらに今と同じ過程をくり返すことにより、解 x に収

束することが期待される。その場合問題となるのは分散共分散行列（以後単に分散と呼ぶ） C 、 \hat{C} の決定である。文献(1)では、最適予測値の分散 C が与えられたとき、観測値 y とは無関係に最適推定値の分散 \hat{C} を推定する方法が述べられている。分散 \hat{C} は、線形近似式 $\hat{x}(y)$ と逆関数 $f^{-1}(y)$ の差の行列積

$$(16) \quad (f^{-1}(y) - \hat{x}(y))(f^{-1}(y) - \hat{x}(y))'$$

の観測値 y に対する平均

$$(17) \quad \hat{C} = E((f^{-1}(y) - \hat{x}(y))(f^{-1}(y) - \hat{x}(y))')$$

で与えられている。(17)式の $f^{-1}(y)$ の y には $f(x)$ を、 $\hat{x}(y)$ の y には(3)式のテイラー展開を代入すれば

$$(18) \quad \hat{C} = E((x - \hat{x})(x - \hat{x})')$$

となる。ただし(18)式の平均は x の予測値の確率分布に対するものである。すなわちこの分散 \hat{C} は \hat{x}_* には無関係に最適予測値 \hat{x}_* とその分散 C に対して

$$(19) \quad \hat{C} = C - C f_{\hat{x}}(\hat{x}_*) [f_{\hat{x}}(\hat{x}_*)' C f_{\hat{x}}(\hat{x}_*) + V + L]^{-1} f_{\hat{x}}(\hat{x}_*) C$$

と表わされる。また2回目以後の分散も $C = \hat{C}$ 、 $\hat{x}_* = \hat{x}_*$ とおいてつぎつぎに逐次的に求められる。しかレこの文献(1)の分散 \hat{C} は、(18)式よりわかるように最適予測値 \hat{x}_* に最大の重みをおいて定めた分散であって、最適推定値 \hat{x}_* を中心にして解の予測値のばらつきを考えた分散ではないので、こ

のような大域的な逆関数の線形近似式 ((14)式) を、すなわちその定数 k_* , D_* を定めるのにはこの分散が不適当であるように思われる。後の計算結果でも文献 (1) の方法の収束性が悪いことが示されている。また文献 (1) の場合には最初の最適予測値の分散 C の設定法に対しては具体的に示されていない。そこで分散の推定に対してもつぎのような一方法を試みた。(14)式により ($y=0$ とおいて) 解を推定する場合に、最適推定値 \bar{x}_* の分散 C として小さな値を設定した場合には、前にも述べた通り、 $\hat{x}(y)$ は、 $x = \bar{x}_*$ の近傍すなわち $y_* (=f(\bar{x}_*))$ の近傍に大きな重みをつけた逆関数 $f^{-1}(y)$ の近似になり、逆に C として大きな値を設定した場合には y のより広い範囲に重みを分散させた場合の逆関数 $f^{-1}(y)$ の近似になる。したがって、(14)式により、 $f(x) = 0$ となる真の解 x_0 を求める立場からすれば、 $f^{-1}(y)$ の近似に対して分散 C を設定する場合に、 x_0 は未知ではあるが、最適予測値 \bar{x}_* から真の解 $x = x_0$ まで比較的大きな重みが考慮されていることが望ましいと思われる。ゆえに仮りに真の解 x_0 がわかったとすれば、最適予測値 \bar{x}_* の分散 C としては

$$(20) \quad C = (x_0 - \bar{x}_*)(x_0 - \bar{x}_*)'$$

とおくのが適当であると思われる。しかし x_0 はもちろん未知であるので、まず最適予測値の分散 C は、最適予測値 \bar{x}_* に基づいた簡単な実験により解 x_0 を予測してその予測値を (20) 式の x_0 の代りに用いて定める。つぎに \hat{x}_* に対する分散 \hat{C} も同様に \hat{x}_* に基づく実験により解を予測してその値を (20) 式の x_0 の代りにして計算する。この場合、この \hat{C} は、文献 (1) の場合とは異なり、 \hat{x}_* と x_0 だけから定まり前の最適予測値の分散 C には無関係である。

後述する数値例において、このように定めた分散を用いた場合には、解の収束性がすぐれていることが示されている。

((註)1) ニュートン法においては、関数 $f(x)$ の一次の項までのテイラー展開を用いるが、ここでは (3) 式の二次項の補正項を用いているのでニュートン法の改良の意味も含んでいると思われる。また分散 $C \rightarrow 0$, $V=0$ のときには、 $D \rightarrow 0$, $L \rightarrow 0$ となるので、(12) 式より

$$K \rightarrow f_{x_*}^{-1}(\bar{x}_*)$$

となり、(15) 式は

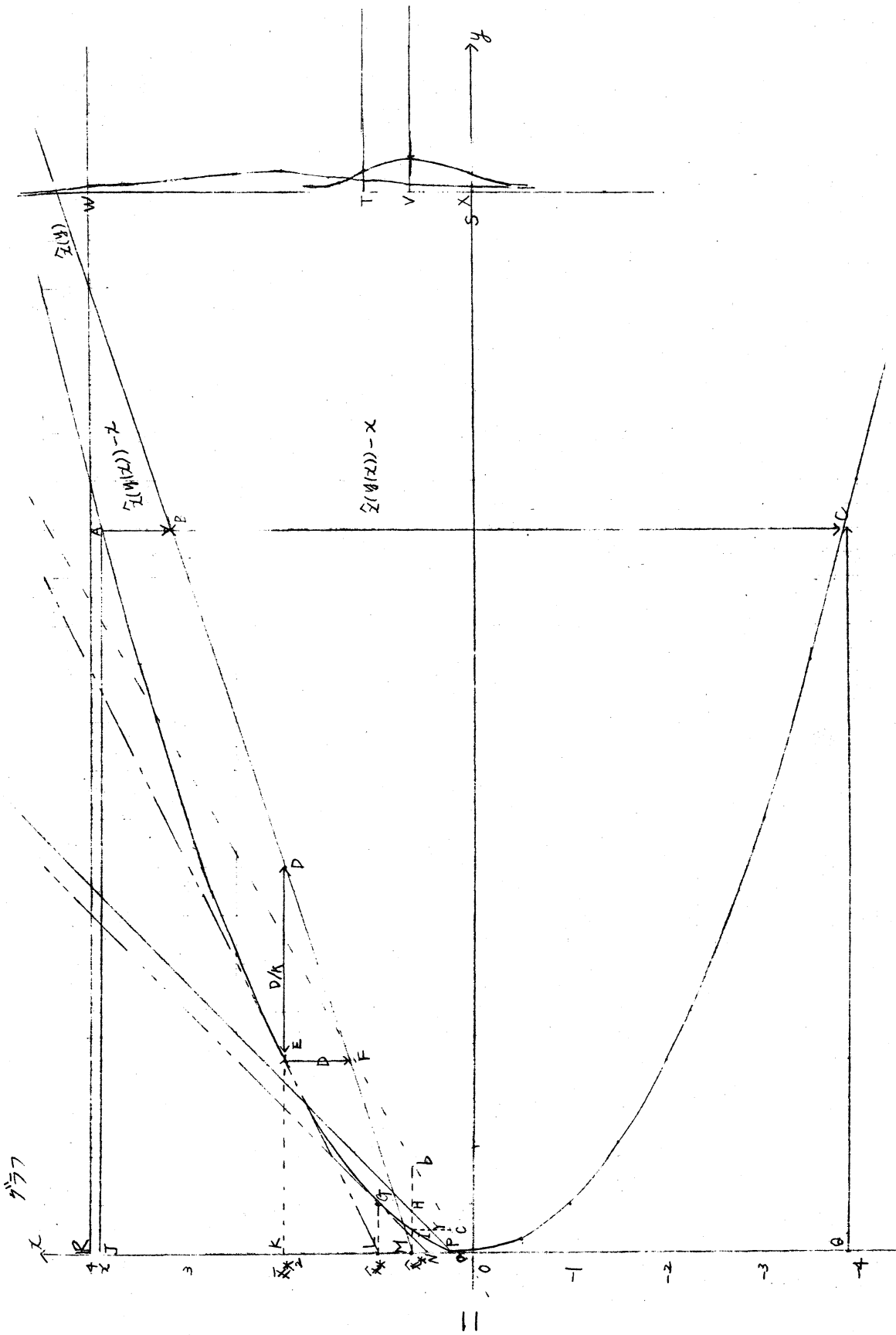
$$(21) \quad \hat{x} \rightarrow \bar{x}_* - f_{x_*}^{-1}(\bar{x}_*) f(\bar{x}_*)$$

となる。(21) 式より、ニュートン法に近づくことがわかる。

((註)2) (3) 式の二次の項を考慮しない次元フィルタの場合には、 $V=0$ ならば $L=D=0$ となり、ニュートン法と

一致する。上述のことを関数 $y=x$ の $y=0$ とする解を求める問題を例にとりて計算するとつぎの表、グラフのようになる。

推定理論による方法	回	最適予測値系		分布		線形近似		分散の求め方
		グラフの記号	グラフの記号	グラフの記号	グラフの記号			
推定理論による方法	1	2	K	N(2,4)	SW	$\hat{x}=2+\frac{1}{2}(y-8)$	MFDB	ここは真の解 $x_0=0$ と (20)式に代入して求めた。
	2	$\frac{2}{3}$	M	$N(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$	XVT	$\hat{x}=\frac{2}{3}+0.5(y-\frac{8}{3})$	PYH	
	3	$\frac{2}{9}$	P					
文献(1)の方法	1	2	K	N(2,4)		$\hat{x}=2+\frac{1}{2}(y-8)$	MFDB	上と同じ 1回目の分散 $C=4$ を(19)式に代入して求めた。
	2	$\frac{2}{3}$	M	$N(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$		$\hat{x}=\frac{2}{3}+0.5(y-\frac{8}{3})$	acb	
	3	0.13	0					
ニュートン法	1	2	K			$x=\frac{1}{4}(y-4)+2$	LE	
	2	1	L			$x=(y-1)+1$	GTN	
	3	0.5	N					



註3) 逆関数 $x = \sqrt{y}$ (COA) の予測値 $x = 2$ における線形近似式 $\hat{x}(y) = 2 + k(y - 4 + \frac{D}{k})$ (MFD) の定数 k , D/k を求めよう。まず D/k は, (8) 式すなわち $\hat{x} - x$ (CB, AB) の x に対する確率平均が 0 となることより, $D/k = -4$ (ED) と求められ, またその逆もいえるので, (8) 式をみたす線形近似式 $\hat{x}(y)$ はグラフの点 D を通り, 逆に点 D を通るすべての直線は (8) 式をみたす。つぎにこの線形近似式 $\hat{x}(y)$ のこの配 k は, 点 D を通る直線の中で (9) 式をみたす, すなわち $(\hat{x} - x)^2$ の確率平均が最小であるものとして定まり, $k = 1/6$ となる。ただし \hat{x} は (7) 式で定義されたものである。このようにして定められた線形近似式 $\hat{x}(y) = 2 + \frac{1}{6}(y - 8)$ は, 予測値 $x = 2$ の分散 C が 4 であることより, $x = 2$ から真の解 $x = 0$ までと $x = 2$ から $x = 4$ までの範囲が比較的にかまな重みを考慮した逆関数 $x = \sqrt{y}$ (COA) の線形近似式であるので, その範囲での近似の度合いがよくなる。グラフでもそのことが示されている。

註4) 分散を考慮した推定理論による方法 (本論文の方法) や文献 (1) の方法においては, 最適予測値 $x = 2$ から $x = 0$ までの範囲を考慮して大域的な線形近似を行うので, 分散を考慮しない最適予測値 $x = 2$ 附近だけの局所的な線形近似 (接線) を行うニュートン法に比べると, 表よりわかるように

2回目, 3回目の最適予測値は, はるかにニュートン法のそれより, 解に近いものになっている。つぎに推定理論による方法と文献(1)の方法を比べると, 表の3回目の最適予測値は文献(1)の方がより解に近いので, 文献(1)の方法の方がすぐれているようにも思われるが, レカレ推定論による方法と文献(1)の方法の2回目の線形近似(PYH, acb)を比べると, 推定値 $\hat{x}_* = \frac{2}{3}$ から解 $x=0$ までの範囲では, 推定論による方法の方が線形近似の度合いがよい。それでこの例だけからではどちらの方法がよいともいえない。

2. 計算方法

ここでは前節において述べた推定値 \hat{x}_* とその分散 \hat{c} を用いて実際に計算する場合の手順をのべる。(1)式における解は (x_1, x_2) 平面における曲線

$$(21) \quad f_1(x) = 0$$

$$(22) \quad f_2(x) = 0$$

の交点 x であらわされる (図3参照)。

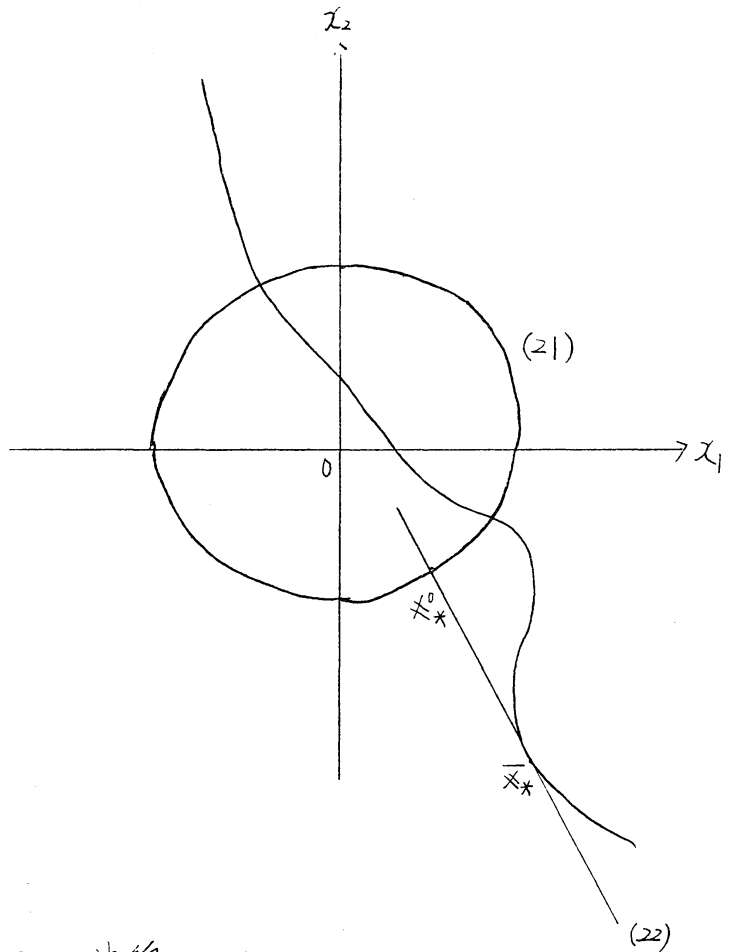


図3. 曲線 (21), (22)

まず最適予測値 \bar{x}_* としては (27) 式の曲線上の点をとる。つぎに (22) 式の \bar{x}_* における接線方向を求め、その接線上の点で (21) 式を 0 にする点 \bar{x}_*^0 をニュートン法で求める。そして分散 C を

$$(23) \quad C = (\bar{x}_* - \bar{x}_*^0)(\bar{x}_* - \bar{x}_*^0)'$$

にとり、この分散および \bar{x}_* を用いて 1 節の (15) 式より最適推定値 \hat{x}_* を求め、さらに α -成分が \hat{x}_* に固定し、 α -成分

についての方程式

$$(24) \quad f_1(x_1^*, x_2) = 0$$

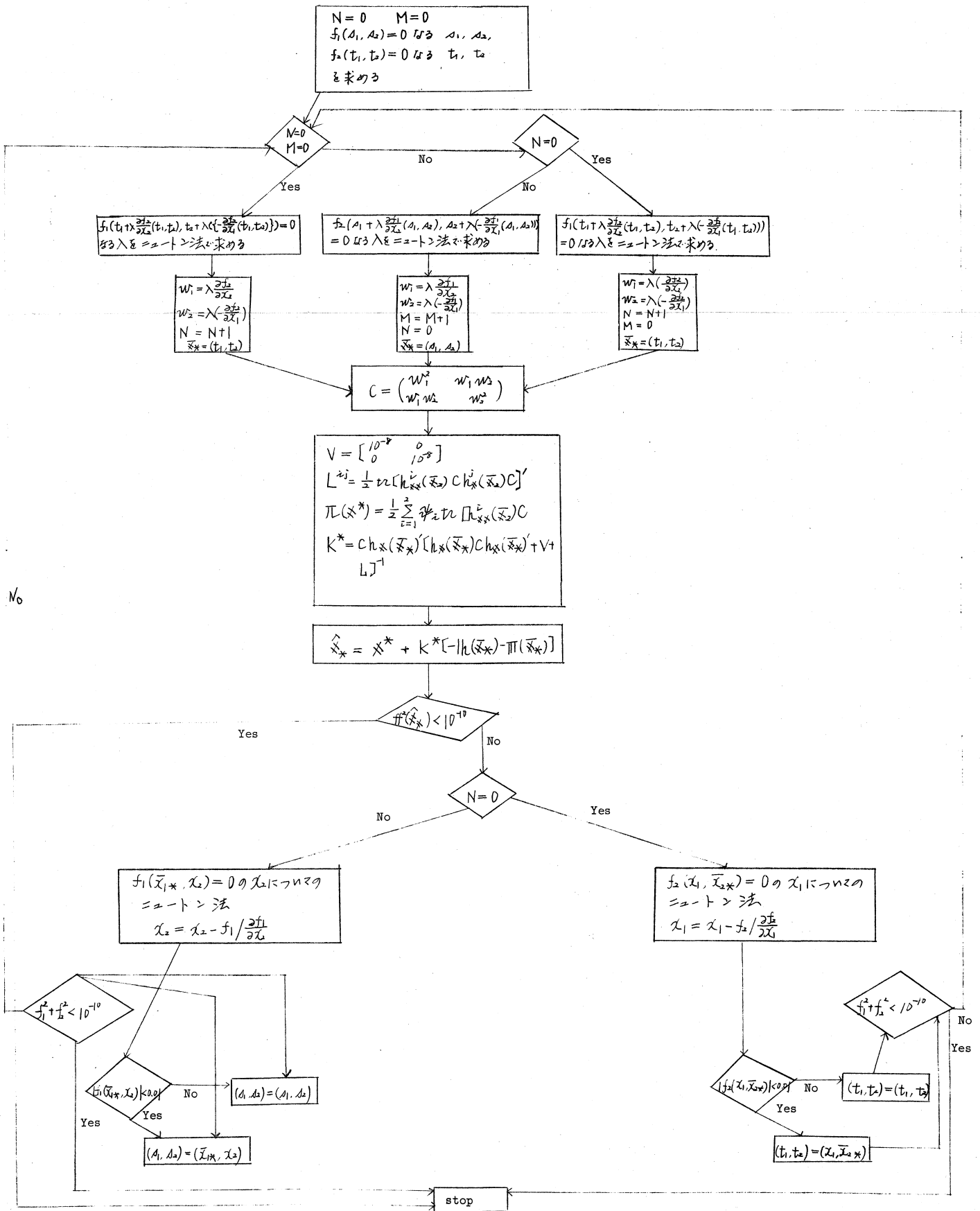
の解をニュートン法で求め、 \hat{x}_* を (21) 式の曲線上に載せる。
これが一回の操作を終る。つぎに (21) 式上の \hat{x}_* を \bar{x}_* とし、 f_1 関数と f_2 関数を入れかえて、まったく同様の操作を行う。これをくりかえして、(1) 式の解が求まることが期待される。(Flow chart 1 参照)。

註 5) つぎの計算例において、上の方法を「推定理論による方法 1」と呼ぶ。また \hat{x}_* を (21) 式の曲線上にのせるために別の方法を用いる、すなわち (24) 式においてその解を \bar{x}_* における接線上で求める方法を「推定理論による方法 2」と呼ぶ。この 2 つの方法は実際計算の一部分が異なるだけで本質的な理論はまったく同じである。

3. 計算例

つぎにニュートン法、推定理論による方法、文献 (1) の方法を比べて 2 つの計算例を上げよう。

Flow chart 1



例.1.

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

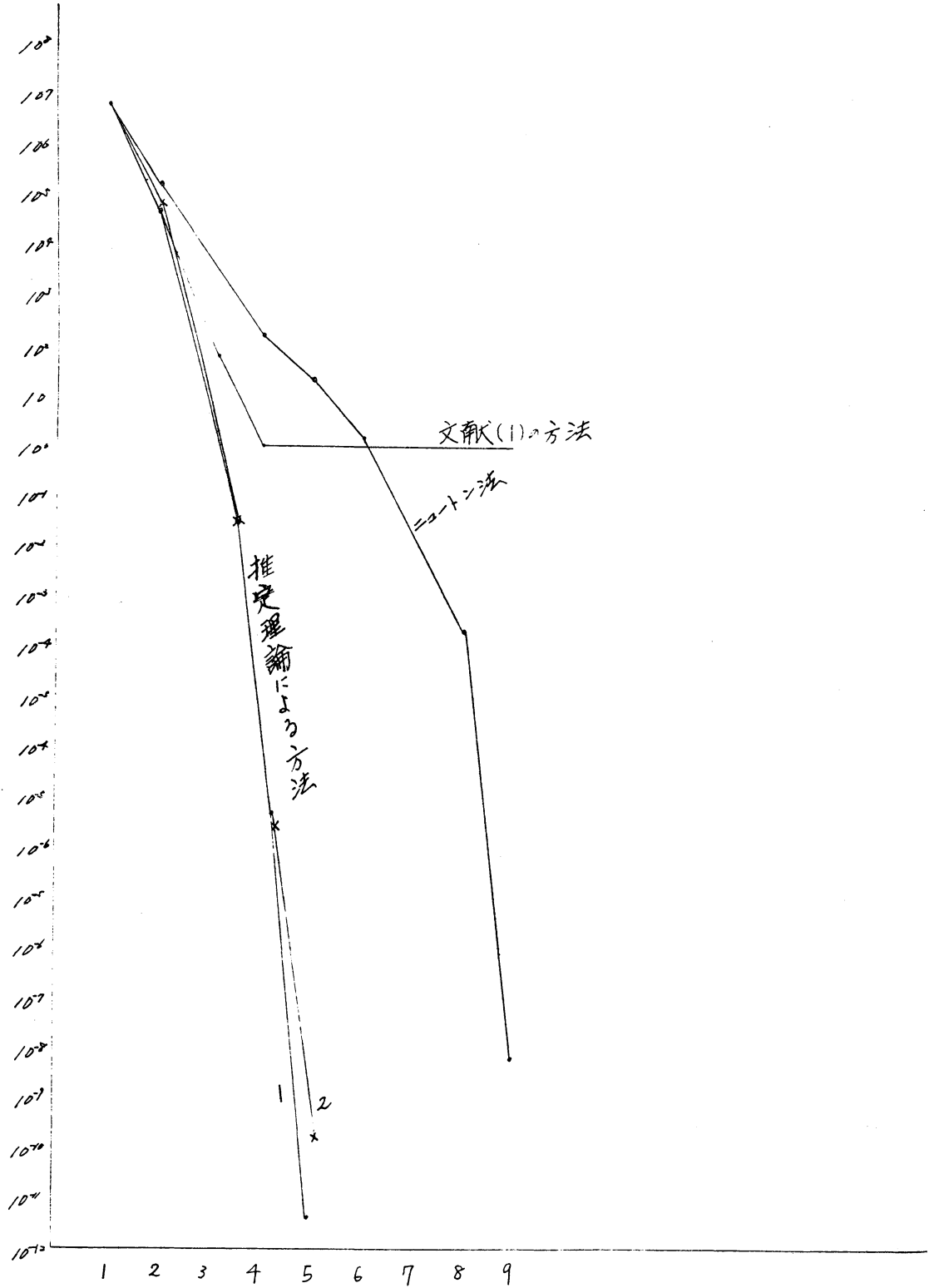
$$y_2 = 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

科目	ニュートン法		推定理論の方法1		推定理論の方法2		文献(1)の方法	
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
1	0.2000 10^2	-0.4000 10^2	0.2000 10^2	-0.4000 10^2	0.2000 10^2	-0.4000 10^2	0.2 10^2	-0.4 10^2
2	0.1001 10^2	-0.2001 10^2	0.6581 10^1	-0.1316 10^2	0.7484 10^1	-0.1497 10^2	0.6581 10^1	-0.1316 10^2
3	0.5012 10^1	-0.1002 10^2	-0.5000 10^1	0.700 10^1	-0.5000 10^1	0.1000 10^1	0.250 10^1	-0.50 10^1
4	0.3526 10^1	-0.5050 10^1	-0.4468	0.8935	-0.4475	0.0752	0.2404 10^{-1}	-0.4807 10^{-1}
5	0.13027 10^1	-0.26257 10^1	-0.4472	0.8944	-0.4472	0.074	0.5636 10^{-2}	-0.1127 10^{-3}
6	0.7251	-0.1456					0.1518 10^{-3}	-0.2625 10^{-3}
7	0.4522	-0.9028					0.3081 10^{-9}	-0.6161 10^{-9}
8	0.4472	-0.8944					0.7202 10^{-12}	-0.1440 10^{-11}
9	0.4472	-0.8944					0.1690 10^{-4}	-0.3363 10^{-4}

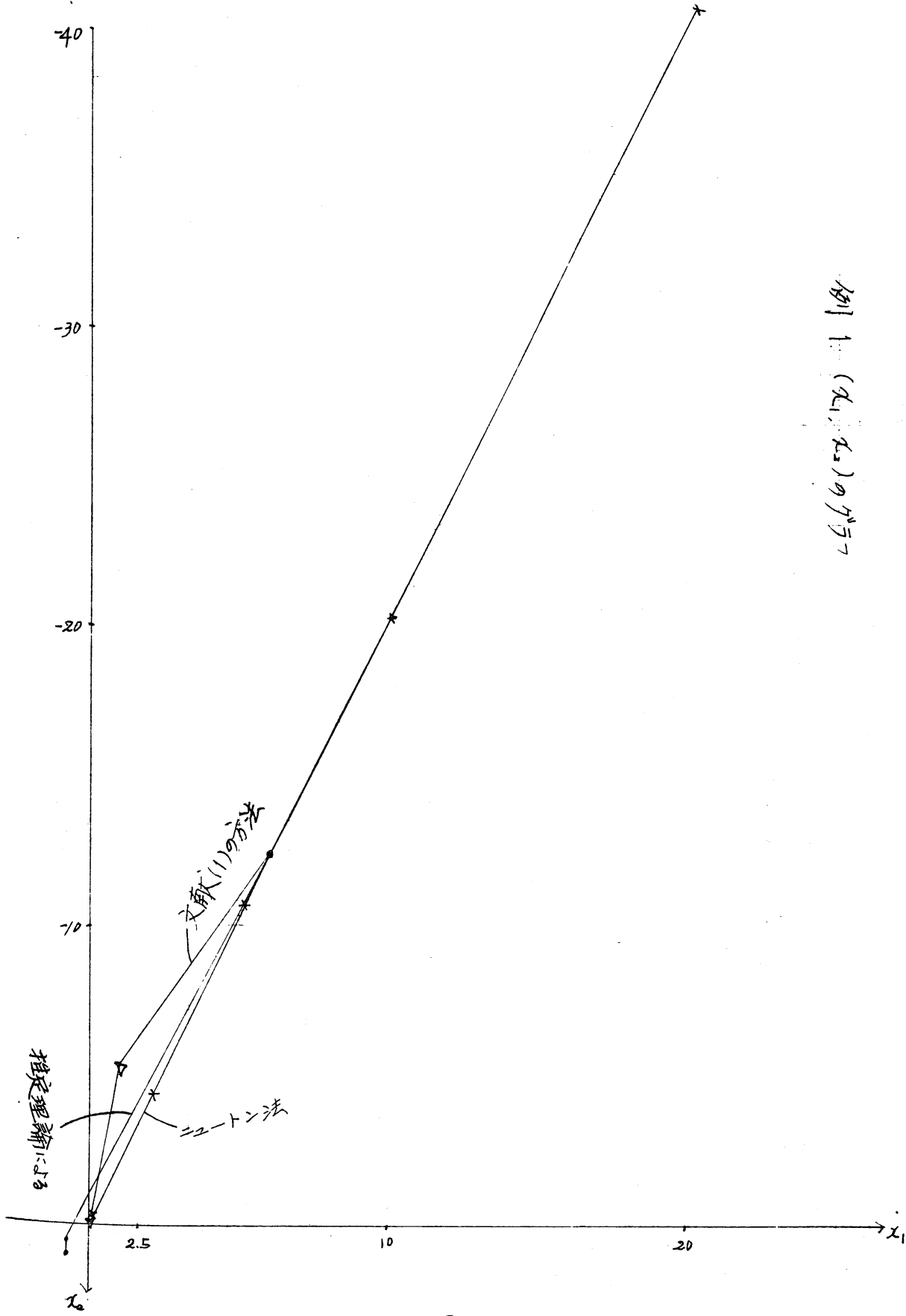
$$H = y_1^2 + y_2 \text{ の値}$$

1	0.39960010 10^7	0.39960010 10^7	0.39960010 10^7	0.39960010 10^7
2	0.2495 10^6	0.4647 10^5	0.7786 10^5	0.4047 10^5
3	0.1553 10^5	0.6250 10^4	0.6250 10^4	0.4644 10^2
4	0.95532 10^3	0.3548 10^3	0.2864 10^5	0.9942
5	0.5624 10^2	0.1919 10^1	0.1298 10^7	0.1 10^1
6	0.2724 10^1			0.1 10^1
7	0.6604 10^{-1}			0.1 10^1
8	0.1725 10^{-3}			0.1 10^1
9	0.1812 10^{-8}			0.1 10^1

例 1. Fグラフ



例 1. (x_1, x_2) の経路



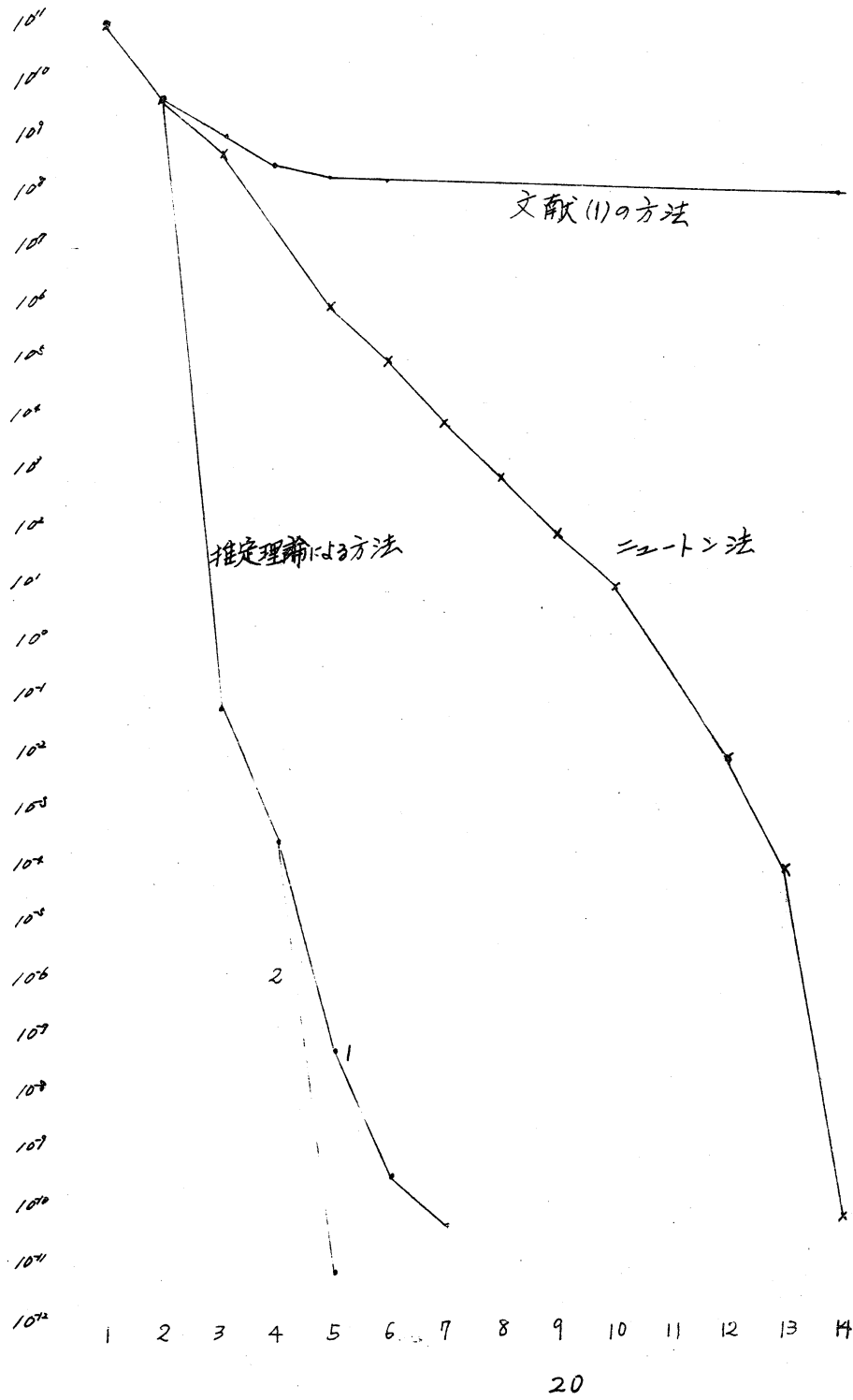
例 2

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0$$

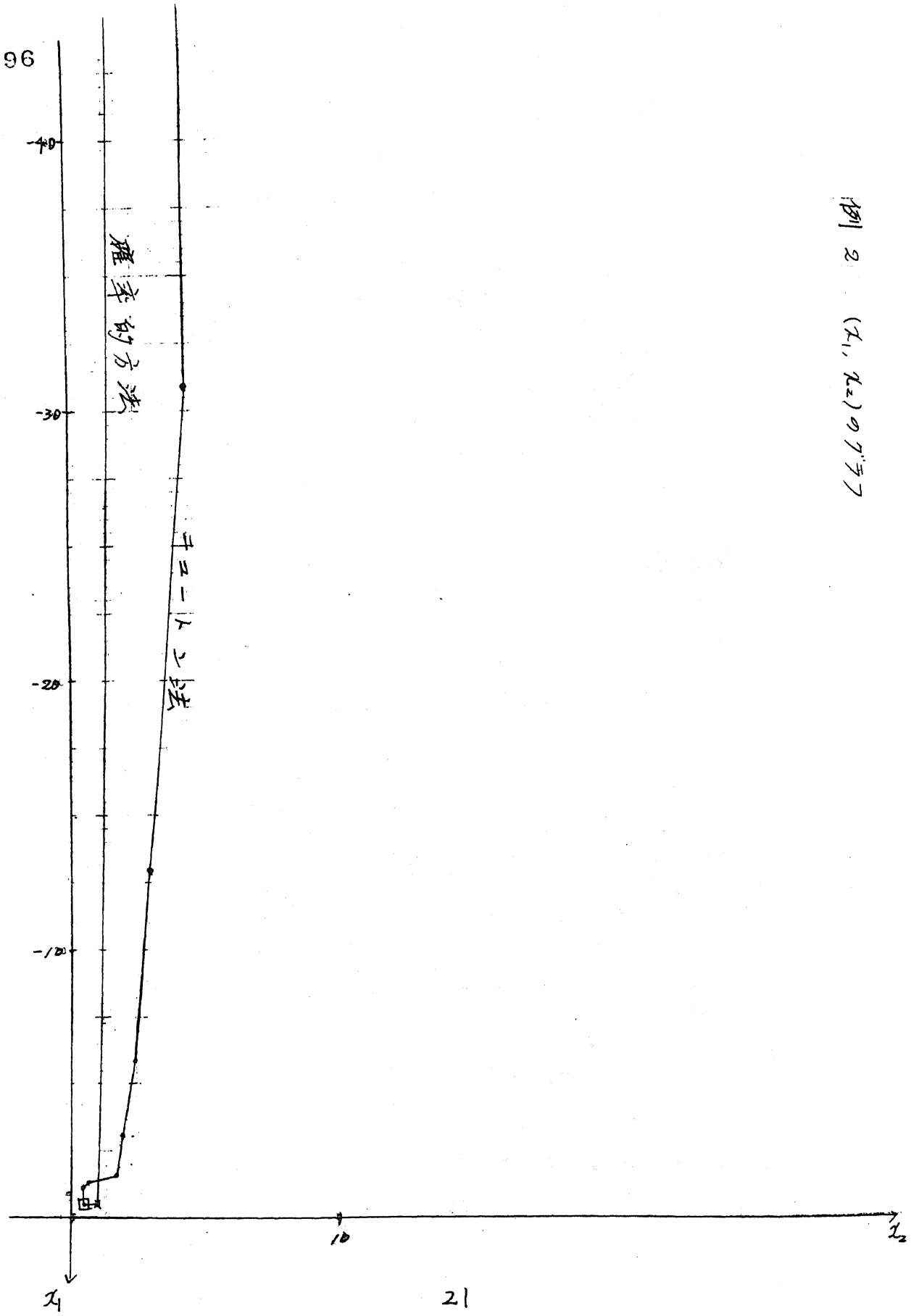
$$y_2 = 2x_1x_2 + x_1^4 = 0$$

回	ニュートン法		推定理論による方法1		推定理論による方法2		文献(1)の方法	
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
1	-0.5×10^3	0.1×10^3	-0.5×10^3	0.1×10^3	-0.5×10^3	0.1×10^3	-0.5×10^3	0.1×10^3
2	-0.2499×10^3	0.8333×10^3	-0.2499×10^3	0.8333×10^3	-0.2499×10^3	0.8333×10^3	-0.2499×10^3	0.8333×10^3
3	-0.1249×10^3	0.4023×10^3	-0.5000	0.1000×10^3	-0.5000	0.1000×10^3	-0.1250×10^3	0.7467×10^3
4	-0.6233×10^2	0.5533×10^2	-0.3929	0.9286×10^2	-0.3929	0.9286×10^2	-0.1125×10^2	0.7372×10^2
5	-0.3102×10^2	0.4459×10^2	-0.3903	0.9207×10^2	-0.39024075	0.9207112	-0.1026×10^2	0.7309×10^2
6	-0.1533×10^2	0.3575×10^2	-0.39023657	0.92070470			-0.9897×10^1	0.7261×10^1
7	-0.7451×10^1	0.2851×10^1	-0.3902445	0.92071018			-0.9462×10^1	0.7222×10^1
8	-0.3475×10^1	0.2257×10^1					-0.9110×10^1	0.7189×10^1
9	-0.1470×10^1	0.1762×10^1					-0.8516×10^1	0.7160×10^1
10	-0.5142×10^0	0.1349×10^1					-0.8565×10^0	0.7134×10^1
11	-0.2484×10^0	0.1148×10^1					-0.8347×10^0	0.7111×10^1
12	-0.3694×10^0	0.9430×10^0					-0.8154×10^0	0.7089×10^1
13	-0.3895×10^0	0.9215×10^0					-0.7982×10^0	0.7067×10^1
14	-0.390244579	0.9207114742					-0.7872×10^0	0.7050×10^1
F の値								
1	$0.62549510 \times 10^{10}$		$0.62544510 \times 10^{10}$		$0.62549510 \times 10^{10}$		0.625495×10^{11}	
2	0.3911×10^{10}		0.3911×10^{10}		0.3911×10^{10}		0.3911×10^{10}	
3	0.2448×10^9		0.6250×10^9		0.6250×10^9		0.2471×10^9	
4	0.1538×10^8		0.4673×10^8		0.4673×10^8		0.1629×10^9	
5	0.7769×10^6		0.1442×10^7		0.7749×10^5		0.1229×10^9	
6	0.6385×10^5		0.3634×10^9				0.9878×10^8	
7	0.4483×10^4		0.1555×10^{10}				0.8291×10^8	
8	0.3664×10^3						0.7158×10^8	
9	0.3808×10^2						0.6306×10^8	
10	0.4871×10^1						0.5643×10^8	
11	0.4982×10^0						0.5110×10^8	
12	0.9499×10^{-2}						0.4674×10^8	
13	0.1157×10^{-4}						0.4209×10^8	
14	0.212337×10^{-9}						0.3999×10^8	

例 2. Fのグラフ



例 2 (x_1, x_2) のグラフ



参 考 文 献

1. Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems
from Discrete Noisy Measurements

M. Athans, R.P. Wishner, A. Bertolini; Preprint of J.A.C.C.1968,364-382.
2. 連立非線型方程式の大域における数値解法とその応用
篠原能材(応用数学研究会 S.45.12.12 東大理で発表のもの)
3. Applied Analysis (1956) pp.10-11 Lanczos
4. 非線形最適化問題
J. Komalík, M. R. Osborne (山本, 小山誠), 培風館, 1970