

局所推定と関数学習を用いた
未知非線形系の学習同定

九州大学工学部 熊丸 耕介

§ 1, 緒 言

近年、線形系の同定と並んで非線形系同定問題が各方面より盛んに研究されているが、その多くは、非線形系を必要な定義域にわたつて系状態のある関数列（たとえば多項式など）により比較的少ない項数で展開近似できるとして、その展開係数を推定するという方法をとっている。この場合、系状態と展開係数とから成る合成ベクトルに関して一般に非線形のダイナミックスが得られるので、非線形系の同定は、最小自乗法や準線形化法、確率近似法、補助変数法などに基づく非線形系状態推定法を利用する *Parametric Identification*

に帰着される。しかし広い定義域にわたつて十分に未知非線形系を低次展開近似できる場合はまれにしかなく、一般の非線形系の展開近似には高次非線形項を含んだ多くの展開項数を必要とする。従つて、一般的な非線形系の同定をこの方法

で行なうとすれば，多次元高次非線形合成系の推定を考えなければならなくなり，推定計算に多くの演算時間を要し，また推定結果の収束を保証する先験推定値の設定が厳しくなるなどの難点が生じる場合が少なくない。一方，非線形系を状態遷移に応じてその推定値に関してテーラー展開すれば，状態推定値近傍の局部的領域では任意の非線形系でも二次の項までで十分近似できる。そこで本論文では，局部的二次近似推定による Nonparametric な未知非線形系の，学習同定法について考察する。すなわち，正規分布付加雑音のもとで（非）線形観測される非線形離散値系において，系の遷移特性が低次元パラメータ表示できない完全未知非線形であるとき，これを各段毎に状態推定値の近傍で二次の項までテーラー展開する。この場合，二次テーラー展開係数は各段状態推定値の未知関数となっており，いずれも未知量である。いま，ある系状態に対してそれと隣接する状態へ何んらかの方法で系を遷移させ得るとすれば，これらの二次テーラー展開係数に微分を差分で近似することにより線形遷移方程式を対応させ，系状態とこの展開係数とから成る合成状態ベクトルに関する二次非線形の遷移方程式が構成される。合成状態の推定を二次近似法フィルタ⁶⁾により求め，この推定結果をデータ処理的に非線形系同定に利用すれば，著者が先に考察したカルマン

・フィルタによる関数学習法⁷⁾が適用でき、系同定問題を、二次非線形合成系の状態推定と、線形状態推定に基づく未知関数学習との問題に帰着させることができる。この方法によれば、従来法において生じ得る高次非線形系状態推定の必要を避けることができ、演算時間が著しく短縮化されることが判つた。なお、二次近似法フィルタについては、Athans が連続非線形系を離散的観測する場合に対して導出しているが¹⁾、この推定アルゴリズムには、状態推定と推定誤差分散についての連立非線形微分方程式を解かねばならない煩しさが残されていた。本論文では、これを離散値系に適用できるように修正変形して得た整然とした前向き計算法による離散値形二次近似法フィルタを付録に示し⁶⁾、これによる合成状態の推定アルゴリズムを導く。また、ある段までの合成状態の推定結果とそれを利用して得た未知非線形系の学習同定結果とに基づいて、系の学習効果を最もあげうる探索点を決定し、そこへ系を遷移させて、学習同定を行なつて行く方法について述べる。初め合成状態の推定を求めておき、系同定はその推定結果をデータ処理的に関数学習に利用して行なう前者の方法を

Static Identification とみるならば、後者のそれは Dynamic

Identification と考えられる。本論文では、以上二つの未知非線形系の学習同定アルゴリズムを示し、例題として種々の未

知非線形帰還要素をもつ一次系を考え，計算機シミュレーション結果を示す。また本論文に示す例と同じ設定条件のもとで従来の Parameter Estimation による系同定を行なった場合，本法による系同定の方が著るしく少ない演算時間で済むことを一例をあげて示す。

§ 2, 問題の設定

本論文では，説明の便宜上一次系を考える。多次元系に対しては，以下の解法を拡張して適用する。

つぎの差分方程式で与えられる非線形系を考える。

$$x_{k+1} = f(x_k) + u_k + w_k \quad (1)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (2)$$

ここで

x_k ; 状態値， y_k ; 状態観測値， u_k ; 既知入力
(同定入力)， w_k ; 白色正規分布雑音 (平均値零，
分散 $\sigma_{w_k}^2$)， v_k ; 白色正規分布雑音 (平均値零，
分散 $\sigma_{v_k}^2$)，

$f(x_k)$ は低次元のパラメータでは近似表示されない一般的な未知非線形遷移特性であるとし， $h(x_k)$ は既知の非線形または線形の状態観測関数である。また， $f(x_k)$ ， $h(x_k)$ は共に x_k に関して少なくとも 2 階まで微分可能な連続関数とする。

本論文の目的は，(1),(2)式で記述される非線形系に対して，状態観測値情報 $y^k = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_k\}$ ， $k=0, 1, 2, \dots$ により未知非線形特性 $f(x)$ の学習同定を行なうことである。

§ 3，問題の解法

3.1 テーラー展開法による合成系の構成

いま， $\hat{x}_{k/k}$ を y^k に基づく x_k の最適推定値（平均自乗誤差最小のいみで）として， $\hat{x}_{k/k}$ に関して $f(x_k)$ を二次の項までテーラー展開すれば，(1)式より

$$x_{k+1} = f(\hat{x}_{k/k}) + f_x(\hat{x}_{k/k})(x_k - \hat{x}_{k/k}) + \frac{1}{2} f_{xx}(\hat{x}_{k/k})(x_k - \hat{x}_{k/k})^2 + u_k + w_k + \xi_k^1 \quad (3)$$

ここで， $f_x(\hat{x}_{k/k})$ ， $f_{xx}(\hat{x}_{k/k})$ は $\hat{x}_{k/k}$ に対する $f(x)$ の一次，二次の微分係数で， $f(x)$ が当初は未知関数であるという問題の設定から， $f(\hat{x}_{k/k})$ と共にいずれも未知量である。 ξ_k^1 は $O[(x_k - \hat{x}_{k/k})^3]$ で推定値 $\hat{x}_{k/k}$ が x_k に十分近い値であれば無視できる項である。

隣接した二点間の系状態の遷移に対しては， $|\hat{x}_{k+1/k+1} - \hat{x}_{k/k}|$ は適当に小さな値とみることが出来るから，状態変数に関する $f(x)$ の微分を差分式で近似して未知の二次テーラー展開係数 $f(\hat{x}_{k/k})$ ， $f_x(\hat{x}_{k/k})$ に対してつぎの遷移式を対応させる。

$$f(\hat{x}_{k+1/k+1}) = f(\hat{x}_{k/k}) + f_x(\hat{x}_{k/k})(\hat{x}_{k+1/k+1} - \hat{x}_{k/k}) + \xi_k^2 \quad (4)$$

$$f_x(\hat{x}_{k+1/k+1}) = f_x(\hat{x}_{k/k}) + f_{xx}(\hat{x}_{k/k})(\hat{x}_{k+1/k+1} - \hat{x}_{k/k}) + \xi_k^3 \quad (5)$$

ここで， ξ_k^2 ， ξ_k^3 は $f_x(\hat{x}_{k/k})$ ， $f_{xx}(\hat{x}_{k/k})$ に対する遷移式 (4)，(5) 式を成立させるためのランダム変数である。また， $f_{xx}(\hat{x}_{k/k})$ に対してはつぎの遷移式を対応させる。

$$f_{xx}(\hat{x}_{k+1/k+1}) = f_{xx}(\hat{x}_{k/k}) + \xi_k^4 \quad (6)$$

これは， $f_{xx}(\hat{x}_{k/k})$ の遷移がランダム変数 ξ_k^4 の付加的重畳により表わされるとした式である。

ランダム変数 $\xi_k^2 \sim \xi_k^4$ の値は， $\hat{x}_{k/k}$ ， $|\hat{x}_{k+1/k+1} - \hat{x}_{k/k}|$ ， $f(x)$ の形，あるいは付加雑音の分散 $\sigma_{w_k}^2$ ， $\sigma_{v_k}^2$ などにより決まるものであるが，その値の正確な決定は， $f(x)$ を未知関数とした問題の設定からして不可能である。そこで本論文では，次節で述べる二次テーラー展開係数の推定に際しては，これらのランダム変数を前に導入した ξ_k^1 と共に， w_k ， v_k とは独立で互いに相関のないつぎのような白色正規分布変数とする。

$$\xi_k = (\xi_k^1 \quad \xi_k^2 \quad \xi_k^3 \quad \xi_k^4)'$$

$$E(\xi_k) = 0, \quad E(\xi_k \xi_l') = \sum_{\#} \delta_{kl}$$

$$\text{diag } \sum_{\#} \xi_k = (\sigma_{\xi_k^1}^2 \quad \sigma_{\xi_k^2}^2 \quad \sigma_{\xi_k^3}^2 \quad \sigma_{\xi_k^4}^2)$$

分散 $\sum_{\#} \xi_k$ の具体的与え方については次節で述べる。

かくして，合成状態ベクトル X_k を

$$X_k \hat{=} (x_k \ f(\hat{x}_{k/k}) \ f_x(\hat{x}_{k/k}) \ f_{xx}(\hat{x}_{k/k}))' \quad (7)$$

と定義すれば，つぎのような二次の非線形合成系が (3) ~ (6)

式より構成される。

$$X_{k+1} = F(X_k, \hat{x}_{k+1/k+1}^1, \hat{x}_{k/k}^1) + Gu_k + W_k \quad (8)$$

$$y_k = H(X_k) + v_k \quad (9)$$

ここで， $X_k = (X_k^1 \ X_k^2 \ X_k^3 \ X_k^4)'$

$$\begin{aligned} & F(X_k, \hat{x}_{k+1/k+1}^1, \hat{x}_{k/k}^1) \\ &= \left[\begin{array}{l} X_k^2 + X_k^3(X_k^1 - \hat{x}_{k/k}^1) + \frac{1}{2} X_k^4(X_k^1 - \hat{x}_{k/k}^1)^2 \\ X_k^2 + X_k^3(\hat{x}_{k+1/k+1}^1 - \hat{x}_{k/k}^1) \\ X_k^3 + X_k^4(\hat{x}_{k+1/k+1}^1 - \hat{x}_{k/k}^1) \\ X_k^4 \end{array} \right] \\ &= (F^1(X_k) \ F^2(X_k, \hat{x}_{k+1/k+1}^1, \hat{x}_{k/k}^1) \ F^3(X_k, \hat{x}_{k+1/k+1}^1, \hat{x}_{k/k}^1) \\ & \quad F^4(X_k))' \end{aligned}$$

$$H(X_k) = h(X_k^1), \quad G = (1 \ 0 \ 0 \ 0)'$$

$$W_k = (w_k + \xi_k^1 \ \xi_k^2 \ \xi_k^3 \ \xi_k^4)'$$

： 平均値零，分散 \sum_{w_k} の白色正規分布雑音，

$$\sum_{w_k} = \left[\begin{array}{cccc} \sigma_{w_k}^2 + \sigma_{\xi_k^1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\xi_k^2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\xi_k^3}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\xi_k^4}^2 \end{array} \right]$$

合成系 (8)，(9) に，付録に示す離散値形二次近似法フィル

タを適用すれば，合成状態ベクトルを逐次推定することができる。ただしこの場合，合成系の遷移式に一段先の状態推定値が含まれているので，推定計算においてこのことに注意して以下のアルゴリズムを導く。

3.2 合成状態ベクトルの推定アルゴリズム

いま， k 段の合成状態予測値 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}$ およびその誤差分散行列 $\mathbf{C}_{k/k-1}$ が得られているとする。付録 (7)，(8) 式よりフィルタゲイン行列 \mathbf{K}_k は，

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{C}_{k/k-1} \mathbf{H}'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \left[\mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \mathbf{C}_{k/k-1} \mathbf{H}'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) + \sigma_{vk}^2 + \mathbf{I}_k \right]^{-1} \quad (10)$$

$$\mathbf{I}_k = \frac{1}{2} \text{tr} \left[\mathbf{H}_{\mathbf{xx}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \mathbf{C}_{k/k-1} \mathbf{H}_{\mathbf{xx}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \mathbf{C}_{k/k-1} \right] \quad (11)$$

$$\text{ここで， } \mathbf{H}'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) = \left(h'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^1) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right) \quad (12)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{xx}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) = \begin{bmatrix} h_{\mathbf{xx}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

k 段の状態観測値 y_k を得れば，推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k}$ およびその誤差分散行列 $\mathbf{C}_{k/k}$ は付録 (5)，(6)，(9) 式より，

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k \left(y_k - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\mathbf{H}_{\mathbf{xx}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \mathbf{C}_{k/k-1} \right] \right) \quad (14)$$

$$\mathbf{C}_{k/k} = \mathbf{C}_{k/k-1} - \mathbf{C}_{k/k-1} \mathbf{H}'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \left[\mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \mathbf{C}_{k/k-1} \mathbf{H}'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) + \sigma_{vk}^2 + \mathbf{I}_k \right]^{-1} \mathbf{H}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}) \mathbf{C}_{k/k-1} \quad (15)$$

つぎに，(k+1) 段の合成状態予測値 $\hat{X}_{k+1/k}^{\Delta 1}$ およびその誤差分散行列 $C_{k+1/k}$ を求めることが必要であるが，合成系の遷移式に一段先の状態推定値 $\hat{X}_{k+1/k+1}^{\Delta 1}$ が含まれているので，付録 (3) (4), (10), (11) 式をそのままには使えない。しかしその遷移式は，オ 1 成分には $\hat{X}_{k+1/k+1}^{\Delta 1}$ を含まず，且つ観測方程式は，

$H(X_k) = h(X_k^1)$ であるから， $\hat{X}_{k+1/k}$ を求める前にまずそのオ 1 成分 $\hat{X}_{k+1/k}^{\Delta 1}$ のみを計算し， y_{k+1} を使つて $\hat{X}_{k+1/k+1}^{\Delta 1}$ を以下のように求めることができる。まず，付録 (3), (4) 式より

$$\hat{X}_{k+1/k}^{\Delta 1} = F^1(\hat{X}_{k/k}) + u_k + \frac{1}{2} \text{tr} \left[F_{xx}^1(\hat{X}_{k/k}) C_{k/k} \right] \quad (16)$$

また，(k+1) 段のフィルタゲイン K_{k+1} のオ (1,1) 成分は，(12), (13) 式を考慮すれば $C_{k+1/k}$ のオ (1,1) 成分と $\hat{X}_{k+1/k}^{\Delta 1}$ のみから計算できる。すなわち付録 (7), (8) 式より，

$$K_{k+1}^{1,1} = C_{k+1/k}^{1,1} h_x(\hat{X}_{k+1/k}^{\Delta 1}) / (h_x(\hat{X}_{k+1/k}^{\Delta 1}) C_{k+1/k}^{1,1} h_x(\hat{X}_{k+1/k}^{\Delta 1}) + \sigma_{vk+1}^2 + \vartheta_{k+1}) \quad (17)$$

$$\vartheta_{k+1} = \frac{1}{2} h_{xx}(\hat{X}_{k+1/k}^{\Delta 1}) C_{k+1/k}^{1,1} h_{xx}(\hat{X}_{k+1/k}^{\Delta 1}) C_{k+1/k}^{1,1} \quad (18)$$

さらに， $C_{k+1/k}^{1,1}$ は付録 (10), (11) 式より， $F^1(X_k)$ の $\hat{X}_{k/k}$ に対する一次，二次の微分係数を使つて以下のように求まる。

$$C_{k+1/k}^{1,1} = F_x^1(\hat{X}_{k/k}) C_{k/k} F_x^1(\hat{X}_{k/k}) + \sigma_{wk}^2 + \sigma_{\epsilon_k}^2 + D_k^{1,1} \quad (19)$$

$$(D_k)^{1,1} = \frac{1}{2} \text{tr} \left[F_{xx}^1(\hat{X}_{k/k}) C_{k/k} F_{xx}^1(\hat{X}_{k/k}) C_{k/k} \right] \quad (20)$$

ただし， $\sigma_{wk}^2 + \sigma_{\epsilon_k}^2$ は \sum_{wk} のオ (1,1) 成分である。

$\hat{\varepsilon}_k^2$ は、前節で導入したテーラー展開近似補正のためのランダム変数 ε_k^1 の分散であるが、 $\varepsilon_k^1 = 0 \left[(x_k - \hat{x}_{k/k})^3 \right]$ であるからその値は、推定値が真値に近い仮定のもとで小さな正值にあればよい（例題では $\hat{\sigma}_{\varepsilon_k^2} = 0$ とした）。

(k+1) 段の観測値 y_{k+1} を得て付録 (5), (6) 式より

$$\hat{x}_{k+1/k+1}^1 = \hat{x}_{k+1/k}^1 + K_{k+1}^{1,1} \left[y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}^1) - \frac{1}{2} h_{xx}(\hat{x}_{k+1/k}^1) c_{k+1/k}^{1,1} \right] \quad (21)$$

この $\hat{x}_{k+1/k+1}^1$ が得られた後、合成状態の予測計算ができて、付録 (3), (4) 式より

$$\hat{x}_{k+1/k} = F(\hat{x}_{k/k}, \hat{x}_{k+1/k+1}^1, \hat{x}_{k/k}^1) + G \left[u_k + \frac{1}{2} \text{tr} \left[F_{xx}^1(\hat{x}_{k/k}) c_{k/k} \right] \right] \quad (22)$$

付録 (10), (11) 式より

$$C_{k+1/k} = F_x(\hat{x}_{k/k}, \hat{x}_{k+1/k+1}^1, \hat{x}_{k/k}^1) C_{k/k} F_x'(\hat{x}_{k/k}, \hat{x}_{k+1/k+1}^1, \hat{x}_{k/k}^1) + \sum w_k + D_k \quad (23)$$

$$(D_k)^{i,j} = \frac{1}{2} \text{tr} \left[F_{xx}^i(\hat{x}_{k/k}, \hat{x}_{k+1/k+1}^1, \hat{x}_{k/k}^1) C_{k/k} F_{xx}^j(\hat{x}_{k/k}, \hat{x}_{k+1/k+1}^1, \hat{x}_{k/k}^1) C_{k/k} \right] \quad (24)$$

ただし、 $i, j = 1, 4$ の場合は、(24) 式中の F_{xx}^i, F_{xx}^j の引数は $\hat{x}_{k/k}$ のみである。また、 $\text{diag} \sum w_k = (\hat{\sigma}_{wR}^2 + \hat{\sigma}_{\varepsilon_k^1}^2, \hat{\sigma}_{\varepsilon_k^2}^2, \hat{\sigma}_{\varepsilon_k^3}^2, \hat{\sigma}_{\varepsilon_k^4}^2)$ である。 $\hat{\sigma}_{\varepsilon_k^2}^2 \sim \hat{\sigma}_{\varepsilon_k^4}^2$ は、前節で二次テーラー展開係数に遷移式をもたせる際に導入した近似補正のためのランダム変数 $\varepsilon_k^2 \sim \varepsilon_k^4$ の分散であるが、それらの値は具体

的には，付加雑音 w_k, v_k の分散と comparable な値に置く。 $f(x)$ が未知関数である以上，これらの値の正確な評価は困難で，前節で述べたようにこれらの分散値が状態推定値に関係しておりまた状態推定値は w_k, v_k の分散に関係していることに基づいて，上述の選択基準を考えた。

以下 (10) ~ (24) 式の計算手順を繰返し行えば， $\hat{x}_{0/-1}, c_{0/-1}$ を先験値として逐次合成状態推定値を求めることができる。なおこの推定アルゴリズムは，系 (1) が多次元である場合にも拡張できる。

3.3 未知非線形系の学習同定

前節で求めた合成状態推定値 $\hat{x}_{k/k}$ に対して

$$\hat{x}_{k/k} = x_k - \tilde{x}_{k/k} \quad (25)$$

$\tilde{x}_{k/k}$: 推定誤差 (平均値零，分散 $c_{k/k}$)

$\tilde{x}_{k/k}$ は，二次近似法フィルタにより得た合成状態ベクトルの推定に対する誤差であるから，不偏推定条件と正規分布の仮定より，平均値零，分散 $c_{k/k}$ の正規分布変数となる。

(25) 式より

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k/k}^2 &= x_k^2 - \tilde{x}_{k/k}^2 = f(\hat{x}_{k/k}^1) - \tilde{x}_{k/k}^2 \\ \hat{x}_{k/k}^3 &= x_k^3 - \tilde{x}_{k/k}^3 = f_x(\hat{x}_{k/k}^1) - \tilde{x}_{k/k}^3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \hat{x}_{k/k}^2 \\ \hat{x}_{k/k}^3 \end{aligned}} \right\}$$

$$\hat{X}_{k/k}^4 = X_k^4 - \tilde{X}_{k/k}^4 = f_{xx}(\hat{X}_{k/k}^1) - \tilde{X}_{k/k}^4 \quad (26)$$

つぎの諸量を定義する。

$$\theta_k \triangleq \hat{X}_{k/k}^1 \quad ; \text{系状態の推定値} \quad (27)$$

$$Z_k \triangleq \left(\hat{X}_{k/k}^2 \quad \hat{X}_{k/k}^3 \quad \hat{X}_{k/k}^4 \right)' \quad ; \text{二次テーラー展開係数の推定値} \quad (28)$$

$$\mathcal{E}_k = - \left(\tilde{X}_{k/k}^2 \quad \tilde{X}_{k/k}^3 \quad \tilde{X}_{k/k}^4 \right)' \quad (29)$$

(26) 式より

$$z_i = \mathcal{F}(\theta_i) + \mathcal{E}_i \quad (30)$$

を得る。ここで， $(\theta_i, z_i) \in \{ \hat{X}_{k/k}^1 \}$; 合成状態推定値集合から選ばれる値。

$\mathcal{F}(\theta_i) = (f(\theta_i) \quad f_x(\theta_i) \quad f_{xx}(\theta_i))'$; 未知関数ベクトルの θ_i に対する値。 \mathcal{E}_i は平均値零，分散 $\sum_{\mathcal{E}_i}$ の白色正規分布変数で， $\sum_{\mathcal{E}_i}$ は (29) 式より $c_{i/i}$ の初めの一行一列を除いて得られる分散行列となる。

(30) 式は未知関数 $\mathcal{F}(\theta)$ を正規分布付加雑音 \mathcal{E} のもとでサンプルした関係式とみることができる。従つて未知非線形系の学習同定は，(30) 式に対して入出力サンプル値 (θ_i, z_i) により $\mathcal{F}(\theta)$ を学習する未知関数学習問題に帰着され，サンプル値情報に前節で求めた合成状態の推定結果が利用できる。

関数学習法として，Aizerman のポテンシャル関数を利用した確率近似法があるが，これによれば，学習解の収束がき

わめて遅く十分な学習結果を得るには多くのサンプル回数と情報を必要とする。これを解消するため著者は先に、カルマン・フィルタによる未知関数学習法⁷⁾を定案した。ただしこのとき、サンプル外乱は正規分布変数であることが必要であった。本題の場合、 ε_i は正規分布変数であることより、この関数学習法が直接適用される。

すなわち、未知非線形特性 $f(\theta)$ を既知の独立関数系

$\{\varphi_i(\theta)\}$ で有限項展開近似する。

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(\theta) \quad (31)$$

つぎの諸量を定義する。

$$\alpha = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_N)'$$

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\theta) & \varphi_2(\theta) & \dots & \varphi_N(\theta) \\ \varphi_{\theta 1}(\theta) & \varphi_{\theta 2}(\theta) & \dots & \varphi_{\theta N}(\theta) \\ \varphi_{\theta\theta 1}(\theta) & \varphi_{\theta\theta 2}(\theta) & \dots & \varphi_{\theta\theta N}(\theta) \end{bmatrix}$$

(30), (31) 式より、展開係数 α に対するつぎの線形遷移、観測方程式を得る。

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i = \alpha \quad (\text{一定}) \quad (32)$$

$$z_i = M(\theta_i) \alpha_i + \varepsilon_i \quad (33)$$

ただし、 $\varphi_{\theta i}(\theta)$, $\varphi_{\theta\theta i}(\theta)$ は θ に関する $\varphi_i(\theta)$ の一次、二次の微分係数である。

従つて α の推定にカルマン・フィルタが適用され、

$$\hat{\alpha}_{i/i} = \hat{\alpha}_{i-1/i-1} + \Delta_i [z_i - M(\theta_i) \hat{\alpha}_{i-1/i-1}] \quad (34)$$

$$\Delta_i = P_{i-1/i-1} M(\theta_i)' [M(\theta_i) P_{i-1/i-1} M'(\theta_i) + \Sigma_{\xi_i}]^{-1} \quad (35)$$

$$P_{i/i} = P_{i-1/i-1} - P_{i-1/i-1} M'(\theta_i) [M(\theta_i) P_{i-1/i-1} M(\theta_i)' + \Sigma_{\xi_i}]^{-1} M(\theta_i) P_{i-1/i-1} \quad (36)$$

$i=0,1,\dots$ ただし

$\hat{\alpha}_{i/i}$; $z^i = \{z_0, z_1, \dots, z_i\}$ に基づく α_i の推定値 , $P_{i/i}$

: 推定誤差分散行列 , Δ_i ; フィルタゲイン行列 .

$\hat{\alpha}_{-1/-1}, P_{-1/-1}$ は先験的に与える。よつて、未知非線形特性の学習同定結果は、 $\hat{f}^{(1)}(x) = M(x) \hat{\alpha}_{i/i}$ のオ一成分として得られる。未知非線形特性 $f(x)$ は低次パラメータ表示されない一般的な未知関数であるから、独立関数系で有限項展開近似する場合、かなり多くの展開項数 N を必要とする。従つて α は一般的に多次元ベクトルとなるが、この推定は線形推定であるので簡単な繰返しアルゴリズムですみ、当初より (31) 式の形で未知非線形系を展開して、系状態と共に多次元高次非線形推定問題として系同定を行なう従来の Parameter

Estimation による手法に比べて、演算時間が少なくすむ。また展開関数系は独立関数系に選んでいるから、多くの状態推定値 $\theta_i \in \{\hat{x}_{k/k}\}$ に対して $M(\theta_i) \neq M(\theta_j)$, $\theta_i \neq \theta_j$ が言え ($M(\theta)$ は θ の一価関数となるとは限らない), α の推定が非可観測状態に陥いる危険性は殆んどない。以上の系同定

は，あらかじめ合成状態の推定を求めておき，これを未知特性学習のための入出力サンプル値情報として利用し，線形状態推定法に基づいて，未知非線形系の展開係数の静的推定を行なったもので，この意味から，Static Identification とみることができる。

3.4 最適探索点への遷移を伴う系同定

Dynamic Identification

前節で述べた関数学習アルゴリズムで，展開係数 α に対する観測行列 $M(\theta)$ は独立関数系により構成された θ の既知関数である。一方，関数学習度の指標として展開係数推定の誤分散行列を考えることができ，これは $M(\theta)$ の（すなわち θ の）既知関数となつている。従つて θ をある閉領域 $\Omega(\theta)$ から選ばれるサンプル入力とすれば，推定誤分散最小化の評価基準のもとで，最も関数学習の効果をあげうる最適探索入力サンプル θ^* を決定することができる。この最適サンプル学習法の概念を合成状態推定過程に導入して，何段かの合成状態推定の後に上述したいみで最適な探索点を決定しそこへ系を遷移させて，再び合成状態推定とその結果による系の学習同定とを並行して行なつていく，いわば dynamic な系同定法を考えることができる。

以下この同定アルゴリズムについて述べる。

s 回の合成状態ベクトルの推定に対し一回の割合で、最適探索点の決定とそこへ系を遷移させるための入力合成を行なう場合を考える。まず先験値 $\hat{x}_{0/-1}$, $c_{0/-1}$ より出発して s 回の状態推定が (10) ~ (24) 式に従って行なわれ、推定値情報 $\{ (\hat{x}_{i/i}, c_{i/i}) ; i=0,1,2,\dots,s-1 \}$ を得る。これを利用して未知非線形特性の学習を、(34) ~ (36) 式に従って行なえば、学習結果として $\hat{x}_{s-1/s-1}$, $\hat{f}^{(s-1)}(x)$ およびその学習精度の指標となる $P_{s-1/s-1}$ を得る。つぎに、最適探索点 θ_s^* およびそこをねらつて系を遷移させるための入力 u_{s-1}^* を以下のように決定する。

$$\text{Min}_{\theta = \theta_s^* \in \Omega(\theta)} \text{tr} \left[P_{s-1/s-1} - P_{s-1/s-1} M'(\theta) \left[M(\theta) P_{s-1/s-1} M'(\theta) + \sum_{\xi s-1} \right]^{-1} M(\theta) P_{s-1/s-1} \right] \quad (37)$$

$$u_{s-1}^* = \theta_s^* - F^{-1}(\hat{x}_{s-1/s-1}) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[F_{xx}^{-1}(\hat{x}_{s-1/s-1}) c_{s-1/s-1} \right] \quad (38)$$

この u_{s-1}^* により系状態は、(37) 式で求めた最適探索点 θ_s^* の近傍 $x_s = f(x_{s-1}) + u_{s-1}^* + w_{s-1}$ へ遷移する。

$f(x_{s-1})$ を $\hat{x}_{s-1/s-1}^1$ で二次テーラ-展開して、 $E(x_s / y^{s-1})$ を計算すれば、(38) 式より $E(x_s / y^{s-1}) = \theta_s^*$

となる。新しく遷移した x_s に対する合成状態 $X_s = (x_s, f(\hat{x}_{s/s}), f_x(\hat{x}_{s/s}), f_{xx}(\hat{x}_{s/s}))'$ の予測値およびその誤差

分散行列を次式で与える。

$$\hat{X}_{s/s-1} = F(\hat{X}_{s-1/s-1}, \theta_s^*, \hat{X}_{s-1/s-1}^1) + G \left[u_{s-1}^* + \frac{1}{2} \text{tr} \left[F_{XX}^1(\hat{X}_{s-1/s-1}) C_{s-1/s-1} \right] \right] \quad (39)$$

$$C_{s/s-1} = F_X(\hat{X}_{s-1/s-1}, \theta_s^*, \hat{X}_{s-1/s-1}^1) C_{s-1/s-1} F_X'(\hat{X}_{s-1/s-1}, \theta_s^*, \hat{X}_{s-1/s-1}^1) + \sum w_{s-1} + D_{s-1} \quad (40)$$

$$(D_{s-1})^{i,j} = \frac{1}{2} \text{tr} \left[F_{XX}^i(\hat{X}_{s-1/s-1}, \theta_s^*, \hat{X}_{s-1/s-1}^1) C_{s-1/s-1} F_{XX}^j(\hat{X}_{s-1/s-1}, \theta_s^*, \hat{X}_{s-1/s-1}^1) C_{s-1/s-1} \right] \quad (41)$$

X_s の推定計算に際して、この $\hat{X}_{s/s-1}, C_{s/s-1}$ を先験値として用いて、 $k = s, \dots, (2s-1)$ まで合成状態推定と未知特性の学習とを並行して実行する。以下この手順を繰返す。なお状態推定値情報 $\{\hat{X}_{i/i}, C_{i/i}\}$ の中、初めの s' 段 ($< s$) までは推定結果がよくないと考えられるので、特性学習には利用しない。以上の系同定手順をブロック線図で Fig. 1 に示す。

§ 4 ・ 例 題

Fig.2 に示すような、未知非線形帰還要素をもつ一次系の同定を考える。

$$\dot{x} = g(x) + u + w \quad (42), \quad y = h(x) + v \quad (43)$$

いま、系状態がゆるやかに変化している仮定のもとで離散化すれば、サンプル周期を T として、

$$x_{k+1} = x_k + g(x_k)T + u_k + w_k = f(x_k) + u_k + w_k \quad (44)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (45)$$

系状態がゆるやかに変化しているという条件を満足させるための計算機シミュレーション上の便宜的入力 u_k を、

$$u_k = \delta_k + x_k - f(x_k) \quad (\delta_k \text{ は適当に小さな数値}) \text{ とする。}$$

3章で述べた方法で学習結果 $\hat{f}(x)$ を得れば、 $\hat{g}(x)$ は、
 $\hat{g}(x) = (\hat{f}(x) - x) / T$ なる関係を使つて求められる。

$g(x)$ が飽和形，多項式形，正弦波形，指数形の場合に対して，Static Identification の結果を Fig. 3 ~ 8 に示す。また展開係数 α を従来法の Parametric Identification により推定した時の所要演算時間と推定結果を，本法の，Static Identification による場合と設定条件を同じにして $g(x)$ が飽和形に対して求め，Table 1 に示す。さらに，Dynamic Identification による $g(x)$ の学習同定結果を飽和形に対して Fig. 9, Table 2 に示す。

設定条件

$$\hat{x}_{0/-1} = (x_0 - 0.2 \quad 0 \quad 0 \quad 0)'$$

$$C_{0/-1} = (x_0 - \hat{x}_{0/-1})(x_0 - \hat{x}_{0/-1})' : \text{この先験分散の設定によ}$$

れば，推定の収束性がよいことが他の計算例から経験的に知られている⁹⁾。

$\{\varphi_i(\theta)\}$: 三角関数列， $N=61$ (sin, cos について30

倍高調波を含む)。

$$\hat{\mathcal{A}}_{-1/-1} = \mathbf{0}, \quad \text{diag } P_{-1/-1} = (100, 10, 10, \dots, 10)$$

$$z_i = (\hat{x}_{i/i}^2, \hat{x}_{i/i}^3)'$$

$h(x)$: 指数形の場合 $h(x) = x^2 + x$ 他の場合 $h(x) = x$

§ 5 . 検 討

本法を非線形系同定に適用する場合，合成系の状態推定に際しては，系状態の変化が十分ゆるやかであることが必要である。これは，未知系の二次までのテーラー展開係数

$f(\hat{x}_{k/k})$, $f_x(\hat{x}_{k/k})$, $f_{xx}(\hat{x}_{k/k})$ の遷移式を線形差分近似により導入したことで必要となつた条件である。しかし，本論文では系への入力の存在を考慮しており，また合成系の構成とその状態推定の目的が，未知非線形特性の学習のために必要なだけの十分なサンプル情報を系の定義域にわたつて集めることにあるので，この合成状態推定に際しての系状態のゆるやかな変化が，初めから終りまでの時間的単調なゆるやかな系変化を意味するものではない。入力 u_k のアクティブな操作により，系状態の空間的遷移はかなり多様な形もとり得るものである。例題では簡単のため，系状態の時間的単調なゆるやかな変化と共に合成状態の推定を行なつていく場合を考えているが (Static Identification の場合)，この様な具体的対

象としては，ある連続運転中のプロセスを操業中の観測データにより同定する目的でこれをサンプル化した系が考えられる。

非線形系の未知二次テーラー展開係数に遷移式を対応させるために導入したランダム変数 ξ_k は，合成系の推定に際し本論文では便宜的に平均値零，分散 Σ_{ξ_k} の白色正規分布変数と仮定し， Σ_{ξ_k} は w_k, v_k の分散を目安にしてほぼそれと comparable な値を選んだ。この選定基準は， ξ_k が系状態の推定値に関係しこれが雑音 w_k, v_k の分散と関係あることから，種々の例題に対する計算結果より経験的に得たものである。計算例によれば， Σ_{ξ_k} を極端に小さくあるいは大きく選ばない限り，比較的広い設定範囲に対して系同定結果は敏感に影響を受けないことを知った。

Fig. 4, 5 に示す結果より判るように， $g(\hat{x})$ の推定に比べて $g_x(\hat{x})$ のそれは余りよくない。その原因は， $f(\hat{x})$ の遷移式より $f_x(\hat{x})$ のそれに確率的不確定性がより多く含まれているためと思われる。特に $f_{xx}(\hat{x})$ についてはこのことが顕著である。合成状態の推定に際して，局部的二次近似推定を反復して数回行ないその平均値をとるなど， $f_x(\hat{x})$ (すなわち $g_x(\hat{x})$ の) 推定改良策も考えられるが，これに関しては目下検討中である。本例では特性学習において， $f(\hat{x})$ の推

定値 $\{\hat{X}_{i/i}^2\}$ の他に $f_x(\hat{x})$ のそれ $\{\hat{X}_{i/i}^3\}$ も利用したが、

$f_x(\hat{x})$ の推定結果が良好でなくてもその推定誤差分散がより大きくなっている故、これをカルマン・フィルタに利用した場合 \mathcal{A} の推定結果に余り悪影響は与えない。むしろ、 $\{\hat{X}_{i/i}^2\}$ のみを特性学習に利用した場合よりも僅かながら良好な系同定結果が得られることが、一計算例より判つた。また、局部的二次近似ではなく線形近似を用いた場合には、前述した遷移式に対する不確定性が $f(\hat{x})$ の推定にまで及ぶことになり、二次近似の必要は欠かせないものである。

Table 1 より判るように、本法を従来の Parametric

Identification と比較した場合、著しく演算時間が短縮縮されている。これは、従来法では直接 \mathcal{A} の多次元高次非線形推定により系同定を行なうのに対し、本法では高々二次の非線形合成系の推定結果を使つて、 \mathcal{A} の線形推定により系同定を行なうためであり、ここに本法の特徴と有利性が認められる。勿論、当初より系が低次元のパラメータで表示されているような場合は、従来法を適用した方が得策であるが、一般的非線形系の同定を考える場合この可能性は少ないと思われる。

Dynamic Identification においては、本例では系の定義域をあらかじめ 0.3 きざみに細分割してその中から最適探

索点を数値解析的に決定した。この決定は全部で20回行ない、その近傍に系を遷移させ各々10回の合成状態推定を行ない、初めの3回までの推定結果は特性学習に利用せず残りの情報で学習同定を行なった。その結果、Fig. 9, Table 2に示すように、特性学習過程において、学習が比較的遅れている所を見つけてそこへ系を遷移させその近傍で重点的に合成状態推定と特性学習を行なうより機能的学習同定がなされている(例えば、Table 2より $i=100$, $\theta_i^* = 8.3$, 一方 Fig. 9より、最も特性学習の遅れている所 $x=8.3$)。

本論文で考察した局部的二次近似推定による系同定法を多次元系に適用する場合、合成系の次元数は著しく増加するが(二次元系で最高 x_k は 14×1 ベクトルとなる)、合成状態の推定は可能である。しかし未知特性の学習計算においては、一般の多変数未知関数学習問題で遭遇するのと同様な困難性は避けられない。従つて、工学的適用に際しては、合成状態推定結果を未知特性に対して与えられている先験的知識と共に積極的に利用して、あるパターン認識的手法がとられるべきであろう。

なお付録に示した離散値形二次近似法フィルタには、正規性の仮定など理論的に不備な点が含まれており、より一般的な非線形系の状態推定を考える場合には、正規性からのずれ

の考慮や，観測値の非線形項も利用した一般非線形フィルタの構成など今後さらに深く考察すべきである。

本論文の諸計算は，九州大学大型計算機センター（FACOM 230-60）の利用によるものである。

§ 6 . 結 論

本論文で考察した未知非線形系の学習同定法は，従来一般的に考えられてきた Parameter Estimation による手法とはかなりその立場を異にするものである。すなわち，本法では，関数学習という立場から系同定を行なつたもので，未知非線形系の局部的二次近似推定と，未知系を独立関数列により有限項展開近似したときの展開係数の線形推定とにより系の学習同定を行なつた結果多次元高次非線形パラメータ推定を避けることができた。本論文では，一次系について考察したが，一次の未知非線形系同定問題でも工学的には種々の形で直面する問題であり，ここで示した同定結果からも本法が実用に供し得る一同定方法ではないかと思われる。

おわりに，常日頃御指導頂いている九州大学工学部，辻節三教授に深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) M.Athans, R.P.Wishner and A.Bertolini : " Suboptimal State Estimation for Continuous-Time Nonlinear Systems from Noisy Measurements ". JACC, 364/382(1968)
- 2) R.E.Kalman : " A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems ". ASME Trans Journal of Basic Eng. ,35(1960)
- 3) H.Cox : " On the Estimation of State Variables and Parameters for Noisy Dynamic Systems ". IEEE Trans Automatic Control, AC-9, 5, 5/12(1964)
- 4) M.A.Aizerman, E.M.Braverman and L.I.Rozoner : " The Method of Potential Function for the Problem of Restoring the Characteristics of a Function Converter from Randomly Observed Points ". Avtomatika i Telemekhanika, 25, 12(1964)
- 5) S.Tsuji and K.Kumamaru : " System Identifications by a Non-linear Filter ". Japan-U.S. Seminar on Learning Process in Control Systems, 39/44(1970)
- 6) 辻 節三 , 熊丸 耕介 : 非線形系状態推定法による系同定 , 制御過程論 (II) , 45/98 , 京都大学数理解析研究所 (1970)
- 7) 熊丸 耕介 : カルマン・フィルタによる未知関数学習法

とその応用について，九大工学集報，43，4，

483/490 (1970)

8) 熊丸耕介：未知非線形系の学習同定，才13回自動制御連合講演会，No 119 (1970)

9) 辻節三，高田等：先験分散の最適設定値について
九大工学集報，42，5，747/753 (1969)

付 録

1. 離散値形二次近似法フィルタ

つぎの n 次元遷移および m 次元観測方程式により記述される非線形離散値系を考える。

$$X_{k+1} = f(X_k) + W_k \quad (1)$$

$$y_k = h(X_k) + V_k \quad (2)$$

ここで， W_k ， V_k は平均値零，分散 Q_k ， R_k の正規分布雑音である。

「定 義」

(1) $\hat{X}_{k/k}$; y^k に基づく X_k の最適推定値

(2) $\hat{X}_{k+1/k}$; y^k に基づく X_{k+1} の予測値

$$(3) \quad C_{k/k} = E \{ (X_k - \hat{X}_{k/k})(X_k - \hat{X}_{k/k})' / y^k \}$$

$$(4) \quad C_{k+1/k} = E \{ (X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k})(X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k})' / y^k \}$$

$E (\cdot / y^k)$ は y^k に基づく条件付期待値記号。

非線形関数 $f(X_k), h(X_{k+1})$ を少なくとも二階微分可能な連続関数として, それぞれ $\hat{X}_{k/k}, \hat{X}_{k+1/k}$ の近傍で二次の項までテーラー展開し, 不偏推定値条件:

$$E \{ (X_k - \hat{X}_{k/k}) / y^k \} = 0, \quad E \{ (X_{k+1} - \hat{X}_{k+1/k}) / y^k \} = 0$$

および, 推定誤差, 予測誤差が近似的に正規分布であるという仮定とにより, 推定誤差分散最小化の評価のもとで, つぎの離散値形二次近似法フィルタを得る。

$$\hat{X}_{k+1/k} = f(\hat{X}_{k/k}) + \mathcal{M}(\hat{X}_{k/k}) \quad (3)$$

$$\mathcal{M}(\hat{X}_{k/k}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Phi_i \operatorname{tr} \left[F_{xx}^i(\hat{X}_{k/k}) C_{k/k} \right] \quad (4)$$

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k} + K_{k+1} \left[y_{k+1} - h(\hat{X}_{k+1/k}) - \mathcal{N}(\hat{X}_{k+1/k}) \right] \quad (5)$$

$$\mathcal{N}(\hat{X}_{k+1/k}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \Psi_i \operatorname{tr} \left[h_{xx}^i(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} \right] \quad (6)$$

$$K_{k+1} = C_{k+1/k} h_x'(\hat{X}_{k+1/k}) \left[h_x(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} h_x'(\hat{X}_{k+1/k}) + R_{k+1} + L_{k+1} \right]^{-1} \quad (7)$$

$$(L_{k+1})^{i,j} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[h_{xx}^i(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} h_{xx}^j(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} \right] \quad (8)$$

$i, j = 1, 2, \dots, m$

$$C_{k+1/k+1} = C_{k+1/k} - C_{k+1/k} h_x'(\hat{X}_{k+1/k}) \left[h_x(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} h_x'(\hat{X}_{k+1/k}) + R_{k+1} + L_{k+1} \right]^{-1} h_x(\hat{X}_{k+1/k}) C_{k+1/k} \quad (9)$$

$$C_{k+1/k} = f_x(\hat{X}_{k/k})C_{k/k}f_x'(\hat{X}_{k/k}) + Q_k + D_k \quad (10)$$

$$(D_k)^{i,j} = \frac{1}{2} \text{tr} \left[f_{xx}^i(\hat{X}_{k/k})C_{k/k}f_{xx}^j(\hat{X}_{k/k})C_{k/k} \right] \quad (11)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$

ただし, $f_x(\hat{X}_{k/k}), h_x(\hat{X}_{k+1/k})$ は $f(x), h(x)$ の Jacobian

行列, $f_{xx}^i(\hat{X}_{k/k}), h_{xx}^j(\hat{X}_{k+1/k})$ は Hessian 行列で, $\varphi_i,$

ψ_i はそれぞれ, $n \times 1, m \times 1$ の基底ベクトルである。

先験情報として $\hat{x}_{0/-1}, C_{0/-1}$ を与えれば, (1)~(11)式により逐次的に推定値 $\hat{x}_{k/k}; k = 0, 1, 2, \dots$ を求めることができる。

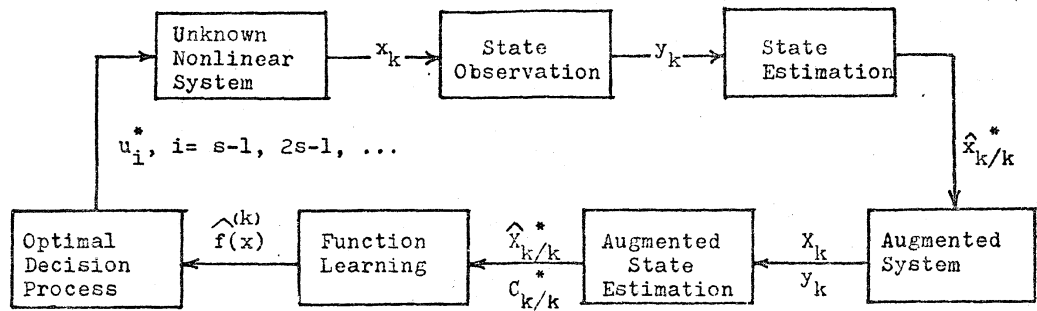


Fig. 1 Block diagram of the learning-identification process

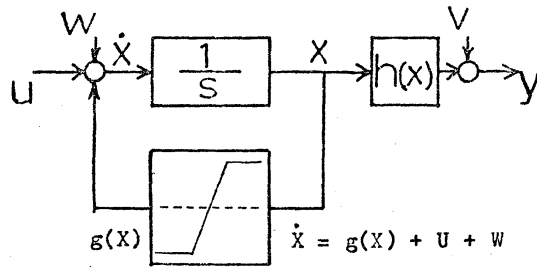


Fig. 2

Block diagram of an unknown nonlinear system

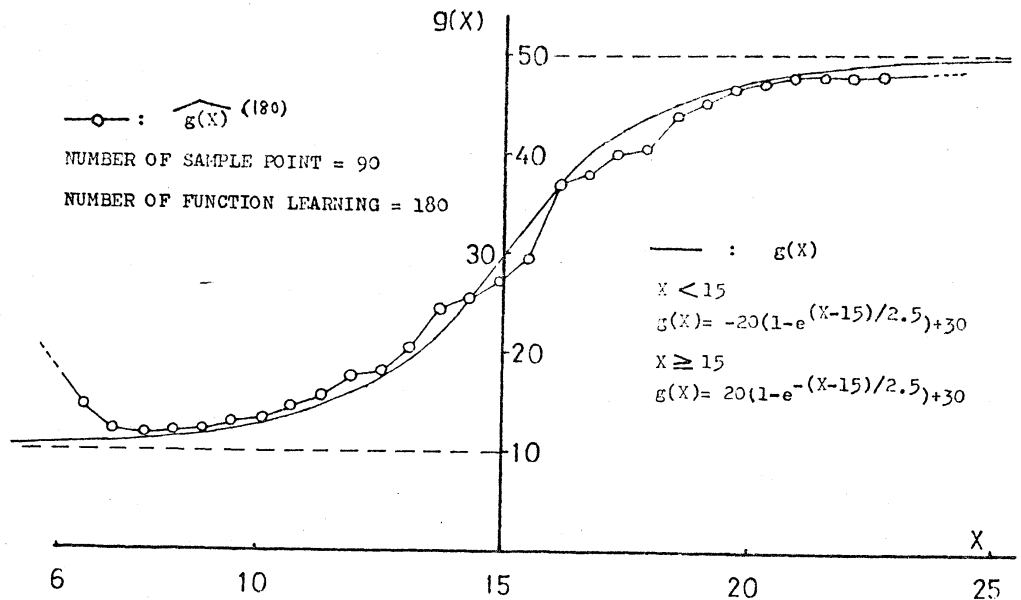


Fig. 3 Learned curve of a saturation function

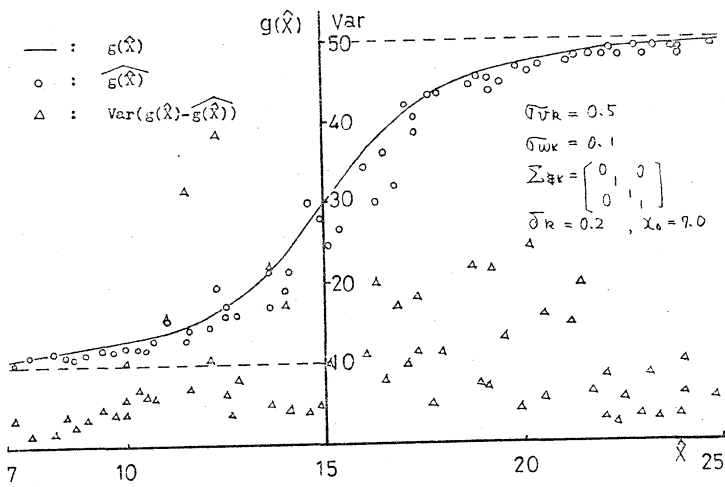


Fig. 4
Estimate of $g(x)$ and
its error variance

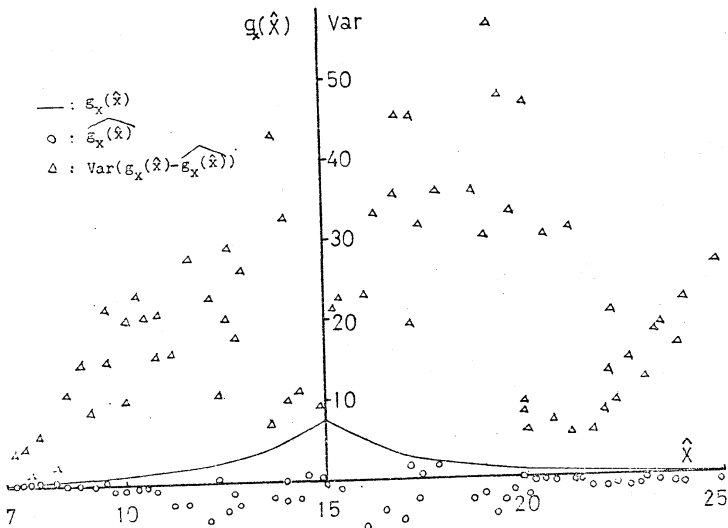


Fig. 5
Estimate of $g_x(x)$ and
its error variance

Calculation time	within 5 minutes	30 minutes
Identification by this method	No. of estimation stage = 90 No. of function learning = 180 $\text{tr}(P_{180/180}) = 37.82$	/
Identification by parameter estimation	No. of estimation stage = 11 $\text{tr}(P_{11/11}) = 661.5$	

Table 1 Comparison of two identification methods
 $\text{tr}(P_{-1/-1}) = 700$

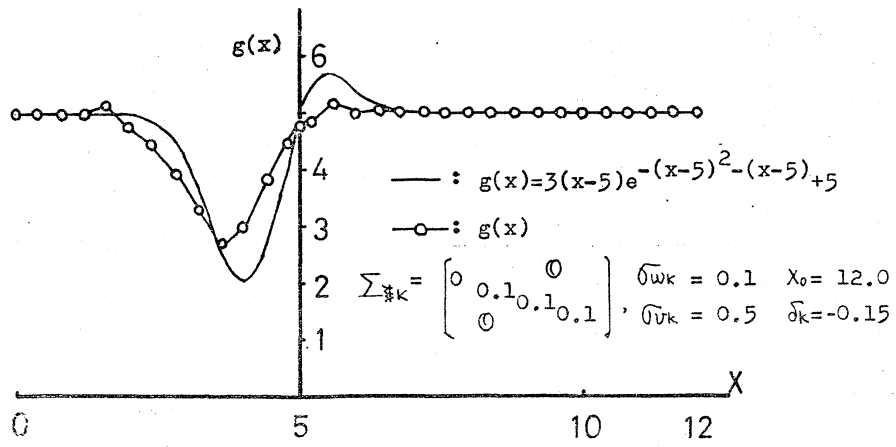


Fig. 6

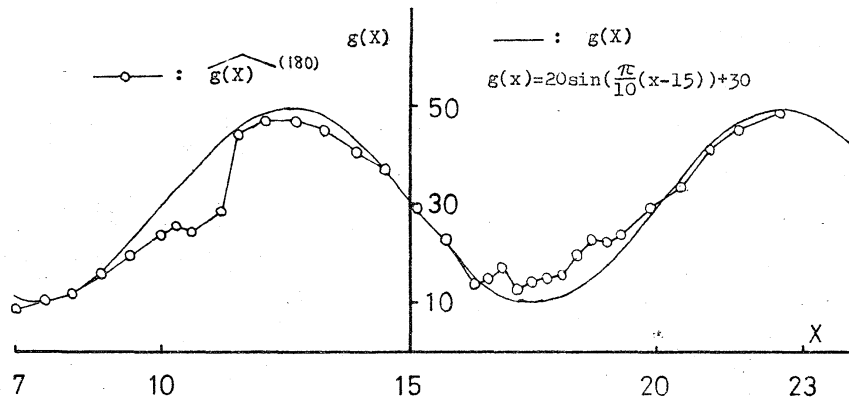


Fig. 7

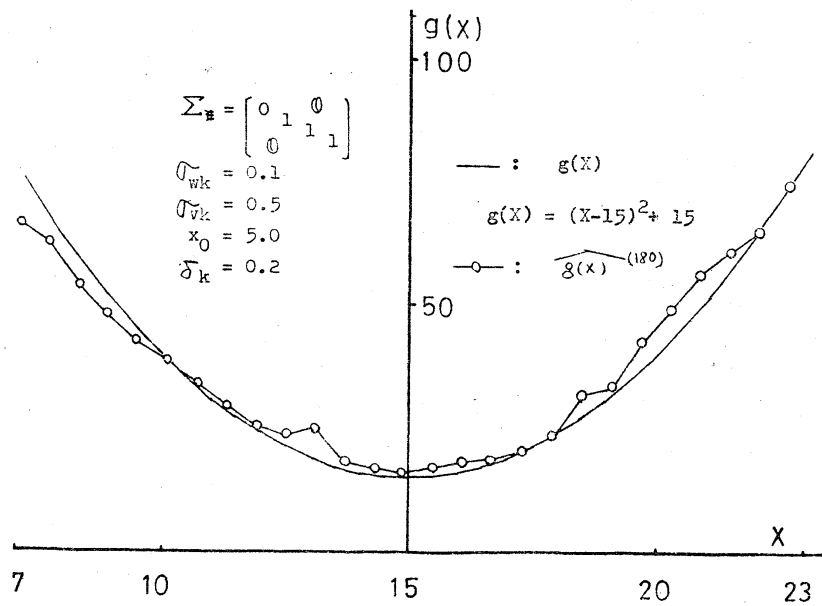


Fig. 8

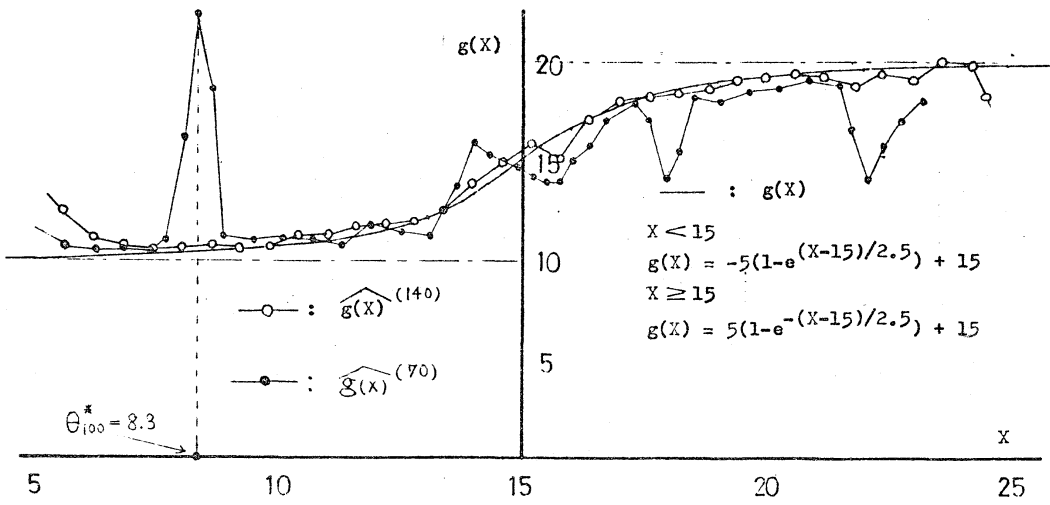


Fig. 9 Dynamic identification result of a saturation function

decision stage, i	10	20	...	90	100	110	...	180	190
e_i^*	5.60	24.80	...	9.20	8.30	13.70	...	19.70	11.90
x_i	5.78	24.64	...	9.32	8.14	13.94	...	19.47	12.34
u_{i-1}^*	-10.13	-19.89	...	-10.52	-10.32	-13.27	...	-19.16	-11.73

Table 2 Optimal searching points and inputs