数理解析研究所講究録
第129巻 1971年 51-80

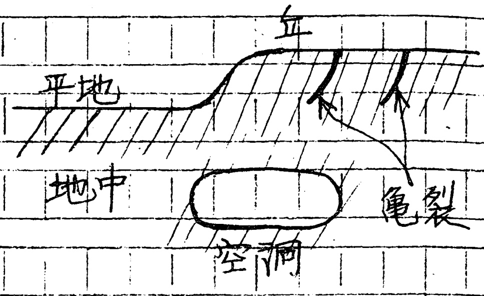
有限要素法による構造解析の数値実験

同和鉱業　渡辺　幸雄
埼玉大　理工　小林　光夫
東大　工　辻　尚史
日科技研　恒川　純吉

目次

はじめに

一方が小高い丘になった場所に鉱山がある。地中から鉱石を取り出したあとには、空洞ができるが、このとき丘の上には幾すじかの亀裂が起ることがある。この亀裂がもし平地の部分にもできて、そこに川でもあると、堤防がきれる等の「公害」を起しかねない。



平地には亀裂が生じないのであろうか。また空洞の大きさがどの程度ならば亀裂が生じるのであろうか？——これが我々に与えられた問題であった。地盤を弾性体と仮定し、力学的条件から偏微分方程式を作り、それを差分近似によって解くという試みがすでになされていたが、境界条件の入れ方に困難があったらしく未解決であった。またいわゆる有限要素法で計算された例も1，2はあったが、その結果を採択してよいかどうか未定であった。

そこで我々は、今までの結果を検証し、さらに信頼性のある結果を得ること，及び上記の問題以外にも応用のきく一般的な解法を得ることを主な目的とし、有限要素法によって解決を試みた。初期の目的のためには、一応十分な結果が得られたので、ここに簡単にまとめておくことにする。

1．有限要素法概観

有限要素法(finite element method)はその数学的芽ばえはかなり古くからあると思われるが、応用面でのdebutは1950年代後半、複雑な航空機の構造解析であったといわれている。現在では構造系の力学解析に限らず、熱伝導問題、電磁気学におけるポテンシャル問題、流体力学におけるポテンシャル問題等あらゆる分野に応用され、その文献も増加の一途をたどっている。

有限要素法の概念は簡単に表現すれば、「連続的な構造形は有限個の要素の集りである」と考えようということである。各要素は節点(node)のみで結ばれていると考えると微分方程式で記述される連続系は有限の代数方程式で記述される離散系で近似されることになり、計算機向きの解法が得られることになる。この方法は今まで多くの技術者に直感的に自然に受け入れられてきたが、数学の立場からみれば連続系を記述する微分方程式をEulerの方程式とする変分問題の直接解法の一種とみなすこともでき、Rayleigh-Ritzの方法と本質的に同等のものと考えられる。

2. 二次元弾性モデル

2.1 応力とひずみ

三次元の等方性弾性体内では、応力成分($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$)とひずみ成分($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$)との間に、広い意味

でのHookeの法則

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z), & \gamma_{yz} = \dfrac{1}{G}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x), & \gamma_{zx} = \dfrac{1}{G}\tau_{zx} \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y), & \gamma_{xy} = \dfrac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases} \tag{2.1}$$

が成立つ。ここにEはYoung率，νはPoisson比，$G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ である。もし、ある1点で主方向の一つがz方向と一致するならば，$\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$，$\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$ である。

さらに条件をつけて次の二つの場合を考える。

1) 平面応力

$\sigma_z=0$ の場合．このとき(2.1)のうち

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y),\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x),\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \tag{2.2}$$

が重要である。

2) 平面ひずみ

$\varepsilon_z=0$ の場合．このとき(2.1)のε_zの式から

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

が得られ，これをε_xの式に代入すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu^2(\sigma_x+\sigma_y)) \\ &= \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

となる。そこで

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad (2.4)$$

とおくと、(2.3)は(2.2)の第1式と同じ形になる。
同様にε_yも(2.2)の第2式と同じ形になり

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'}(\sigma_x - \nu'\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E'}(\sigma_y - \nu'\sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad (2.5)$$

となる。ここで

$$\frac{E'}{2(1+\nu')} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

となることに注意すれば、(2.5)は(2.2)と全く同じ性質の式であることがわかる。以後、式の記述はすべて平面応力の場合に従うことにするが、平面ひずみの問題とさいしては、物質定数E, νをそれぞれE'、ν'でおきかえればよい。
(2.2)は応力について解いた形

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \end{aligned}\right. \qquad (2.6)$$

あるいは

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\sigma = D\,\varepsilon \qquad (2.7)$$

地盤沈下の弾性モデルとしては考えている領域内のすべての点で平面ひずみ状態にあると仮定することになる。地中では地層などにより物質が一様とは考えにくい場合もある。この場合には、独立な物質定数は5つ（$E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G_2$）とればよく[*]、平面応力状態では、(2.7)のDに対応する式は

$$n=\frac{E_1}{E_2},\ m=\frac{G_2}{E_2},\ D=\frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)}\begin{pmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

となる。平面ひずみ状態では

$$D'=\frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}\begin{pmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & (1-\nu_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

と書けるが、ここで

$$\nu_1'=\frac{1}{1-\nu_1},\ \nu_2'=\frac{(1+\nu_1)\nu_2}{1-n\nu_2^2},\ E_2'=\frac{E_2}{1-n\nu_2^2},$$

$$n'=\frac{(1-n\nu_2^2)n}{1-\nu_1^2},\ m'=(1-n\nu_2^2)m \qquad (2.10)$$

とおけば、Dは(2.8)と全く同じ形になる。なお従属な物質定数 $G_1 = \cancel{E_1}\ 2(1+\nu_1)$ は(2.10)の変換に対して不変に

* ZIENKIWICZ : The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill, 1967.

保たれることに注意しておく。

2.2 応力と外力

弾性体内部での応力と外力の関係は釣合の条件式として知られている。二次元の場合には

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \qquad (2.11)$$

である。ここにX，Yは単位面積あたりの外力の成分である。地盤沈下のモデルは

$$X = 0,\ Y = -g \ (\text{重力}) \qquad (2.12)$$

である。

2.3 ひずみと変位

二次元の場合、変位成分を（u，v）と表わすと、ひずみは一般に次式で与えられる

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2.13)$$

逆にひずみの成分ε_x，ε_y，γ_{xy}が与えられたとき、それらが変位u，vから（2.13）の関係によって得られるためには、（2.13）の積分可能条件

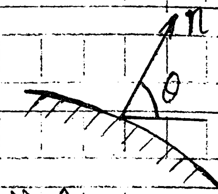
$$R_z = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (2.14)$$

を満たさなければならない。(2.14)は適合条件と呼ばれている。

2.4 境界条件

境界条件は一般に外力で与えられる場合(1)と変位で与えられる場合(2)がある。(1)の場合は、

$$\begin{cases} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta = \overline{X} \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta = \overline{Y} \end{cases} \qquad (2.15)$$



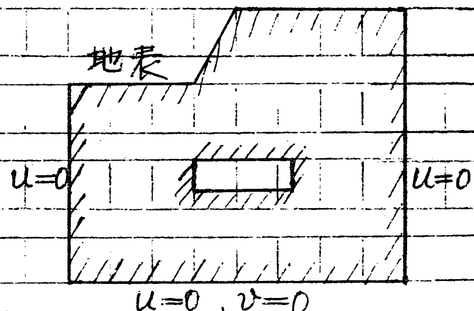
である。ここに$\overline{X}$, $\overline{Y}$は単位長さあたりの外力成分、θは境界における法線がx軸となす角である。

(2)の場合、

$$u = \overline{u}, \quad v = \overline{v} \qquad (2.16)$$

であり、$\overline{u}$, $\overline{v}$が境界における変位である。

我々のモデルの場合、どのような境界をとるか自身にも問題があるが、右図のように空洞から十分離れた場所に境界をとり、変位によって境界条件を与えるのが自然であろう。



[図 2.4.1]

2.5 微分方程式による解法

前節までの基礎方程式群をみると、ひずみ－変位の関係により、ひずみは変位u, vの1階偏微分によって表わされる。

応力とひずみは線形関係にあるから応力もu，vの1階偏微分で表わされる。これを釣合の条件に代入すると(2.11)は結局、変位u，vの連立2階偏微分方程式になっている。境界条件はu，vによって記述できるから、問題はu，vの連立2階偏微分方程式をしかるべき境界条件のもとに解くことになった。ところで一般に解析解を得ることは、至難のわざであるから、どうしても数値解にたよらざるを得ないが、差分近似によって解く場合には物質定数や境界条件が複雑に入り込みプログラム作成が大変である。また各種の定数や条件を変更するさい、手間が多すぎる。等方性物体という仮定および、外力X，YがポテンシャルVから

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (2.17)$$

によって得られる場合(例えば(2.12)では$V = gy$とおけばよい)には、(2.11)は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma_x - V) + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\sigma_y - V) + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad (2.18)$$

となり、これをCauchy-Riemanの方程式とみなせば、ある関数$\chi(x,y)$および$\eta(x,y)$から、応力が

$$\sigma_x - V = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad \sigma_y - V = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

として導けることを示している。ここでτ_{xy}に関する二つの式から

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial y}=0$$

となるから、やはりχおよびηはある関数$F(x,y)$から

$$\chi=\frac{\partial F}{\partial y},\quad \eta=-\frac{\partial F}{\partial x}$$

として導けることがわかる。このFを使って応力を書くと

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+V,\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\ \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+V \qquad (2.19)$$

と表わせる。FをAiryの応力関数と呼ぶ。さて(2.19)と応力－ひずみの関係式からひずみをFで表わし、適合条件の式に代入すると、簡単な計算の後Fは

$$\Delta^2 F+(1-\nu)\Delta V=0,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (2.20)$$

を満たすことがわかる。$\Delta V=0$の場合は、Fは重調和方程式の解である。通常応力によって境界条件が与えられている場合には(2.20)の数値解を求めることが多いようである。

3．有限要素法による例解

3.1 等価変分問題

弾性体の存在領域をR，外力が与えられている境界をΓ，

変位が与えられている境界をΓ'とする。Γ'上で$\delta u = \delta v = 0$であるような任意の変位$\delta u, \delta v$をとると、

$$-\iint_R \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X\right)\delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y\right)\delta v\right] dx\,dy$$
$$+\int_\Gamma \left[(\sigma_x \cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta - \overline{X})\delta u + (\tau_{xy}\cos\theta + \sigma_y \sin\theta - \overline{Y})\delta v\right] ds = 0$$

が成り立つ。ここにdsは境界上を時計回りにとった線素である。上の左辺を部分積分すると

$$\iint_R (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\,dx\,dy - \iint_R (X\delta u + Y\delta v)\,dx\,dy$$
$$-\int_\Gamma (\overline{X}\delta u + \overline{Y}\delta v)\,ds = 0 \qquad (3.1)$$

ここで、

$$\delta\varepsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x},\ \delta\varepsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y},\ \delta\gamma_{xy} = \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y}$$

と書いた。(3.1)は釣合状態において、仮想変位$\delta u, \delta v$による外力のなす仕事と内部における仮想ひずみによる仕事との関係を示したいわゆる「仮想仕事の原理」である。

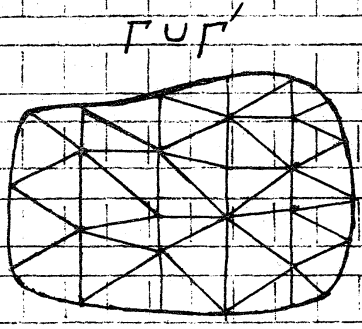
ところで、次の積分

$$J = \iint_R \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy - \iint_R (Xu + Yv)\,dx\,dy$$
$$-\int_\Gamma (\overline{X}u + \overline{Y}v)\,ds \qquad (3.2)$$

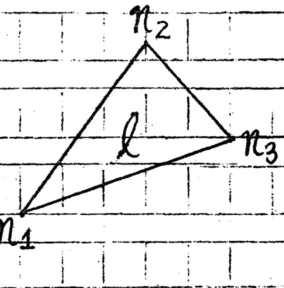
を考えると、(3.1)はJをu, vの汎関数と考えたときの第

1変分が0に等しいことを示している。すなわち、応力ーひずみの関係，ひずみー変位の関係，および変位による境界条件を付帯条件とし、Jを minimum にするという変分問題と先に述べた連立偏微分方程式系とは等価な問題とみることができる。次にこの変分問題を直接数値的に解く一方法として有限要素法を formulate しよう。

3.2 連立代数方程式系への変換



領域Rを微小三角形要素によって右図のように近似する。ある要素l内でひずみが一定であると仮定すると、(2.13)により要素内での変位関数u, vはx, yの一次式で表わされる。これを次の様におく



$$\begin{cases} u=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y \\ v=\beta_1+\beta_2 x+\beta_3 y \end{cases} \qquad (3.3)$$

要素lの三つの節点n_1, n_2, n_3において変位がそれぞれ(u_i, v_i) $i=1,2,3$の値をとるとすれば

$$\left.\begin{aligned} u_i&=\alpha_1+\alpha_2 x_i+\alpha_3 y_i \\ v_i&=\beta_1+\beta_2 x_i+\beta_3 y_i \end{aligned}\right\} \quad i=1,2,3 \qquad (3.4)$$

と書ける。ここに(x_i, y_i)は節点n_iの座標である。(3.4)を行列で書けば

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

を得る。ここに

$$2\Delta=\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{pmatrix}=2\times(\text{三角形の面積})$$

$a_1=x_2y_3-x_3y_2$, $b_1=y_2-y_3$, $c_1=x_3-x_2$ などである。

(3.6)で表わされた係数α_iを使えば要素l内での変位関数uは次の様になる。

$$u=(1\ x\ y)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2\Delta}(1\ x\ y)\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$$

vについても同様である。このu, vを用いれば、ひずみは

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}=(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}=\alpha_2=\dfrac{1}{2\Delta}(b_1\ b_2\ b_3)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}\\[2ex] \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}=(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\beta_3=\dfrac{1}{2\Delta}(c_1\ c_2\ c_3)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}\\[2ex] \gamma_{xy}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}+(0\ 1\ 0)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=\alpha_3+\beta_2\end{cases} \tag{3.7}$$

$$=\frac{1}{2\Delta}(c_1\ c_2\ c_3)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}+\frac{1}{2\Delta}(b_1\ b_2\ b_3)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

と表わされる。

$$B=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{pmatrix},\quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

とおいて(3.7)を

$$\varepsilon=Bu \tag{3.8}$$

と書くと見通しがよい。応力とひずみの関係より $\sigma=D\varepsilon$ が成立つから、結局応力成分も各節点の変位によって

$$\sigma=DBu \tag{3.9}$$

と書ける。(3.9)は要素内で応力が一定であることを意味している。さて積分Jを要素ごとの積分の有限和で近似し、これをminimigeすることにしよう。領域Rを構成する要素の数をLとし

$$\begin{cases} J\approx\tilde{J}\equiv\sum_{l=1}^{L}J_l \\ J_l=\iint_l\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy \\ \quad-\iint_l(X_u+Y_v)\,dx\,dy-\int(\overline{X}u+\overline{Y}v)\,ds \end{cases} \tag{3, 10}$$

とおく。ここに J_l の右辺の第1項および第2項の積分は要素 l 内で行なう。第3項は要素 l が境界 Γ に接しているだけその接線上で積分を行ない、領域内部の大部分の要素については0となる。我々のモデルでは第3項はない。以後簡単のため第3項を無視して考える。第1項は簡単に積分されて

$$\iint_l\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy=\iint_l\frac{1}{2}\varepsilon^T\sigma\,dx\,dy=\frac{1}{2}\Delta u^TB^TDBu$$

外力 X の局所的な変化は微小であろうから、ここでは要素 l 内で $X=$(一定)と仮定する。このとき

$$\iint_l Xu\,dxdy = X\iint_l (1\ x\ y)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} dxdy$$

となる。x, y の原点移動に関して、上の積分は不変であるから、今、要素 l の重心に原点をとったとすると

$$\iint_l x\,dxdy = \iint_l y\,dxdy = 0$$

となる。このとき、$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{2}{3}\Delta$ である。ゆえに

$$\iint_l Xu\,dxdy = X\Delta\alpha_1 = \frac{1}{2}X(a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\Delta X(u_1+u_2+u_3)$$

Y についても要素内で、$Y=$(一定)と仮定すれば同様の式を得るから、結局

$$\iint_l (Xu+Yv)\,dxdy = \frac{1}{3}\Delta\left[X(u_1+u_2+u_3)+Y(v_1+v_2+v_3)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\Delta(X\ Y\ X\ Y\ X\ Y)\,\boldsymbol{u}$$

を得る。以上より

$$J_l = \Delta\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^T B^T D B \boldsymbol{u} - \frac{1}{3}(X\ Y\ X\ Y\ X\ Y)\,\boldsymbol{u}\right] \qquad (3.11)$$

節点の総数を N とし節点 n における変位を u_n, v_n とすれば $\tilde{J} = \sum_{l=1}^{L} J_l$ は u_n, v_n, $n=1,2,\cdots,N$ の二次式となる。u_n, v_n, $n=1,2,\cdots N$ を動かして $\tilde{J}$ を minimize するため $\tilde{J}$ を u_n, v_n で偏微分し 0 とおくと

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial u_n} = 0,\ \frac{\partial \tilde{J}}{\partial v_n} = 0,\ n=1,2,\cdots,N \qquad (3.12)$$

という2N個の未知数u_n, v_n, $n=1,2,\cdots,N$に関する2N元連立一次方程式を得る。従って、これを解けば数値解が得られることになる。(3.12)の具体的な形 —— 係数行列と右辺を求めるには次のようにすればよい。

$$\mathbb{U}=(u_1\ v_1\ u_2\ v_2\ \cdots\ u_N\ v_N)^T$$

とおくと

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbb{U}}=\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\partial J_\ell}{\partial \mathbb{U}}=\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\partial J_\ell}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \mathbb{U}}$$

$$=\sum_{\ell=1}^{L}(u^T K_\ell-f_\ell^T)\frac{\partial u}{\partial \mathbb{U}}=0 \qquad (3.13)$$

ここに

$$K_\ell=\Delta B^T D B,\ f=\frac{\Delta}{3}(X\ Y\ X\ Y\ X\ Y)^T \qquad (3.14)$$

と書いた。(3.13)の$\partial u/\partial \mathbb{U}$は6×2Nの定数行列で、その$in$($(i+1)(n+1)$)要素は$u$の中の$u_i$($v_i$)と$\mathbb{U}$の中の$u_n$($v_n$)が一致していれば1、そうでなければ0である。したがって、次のようにもかける。

$$K\mathbb{U}=\mathbb{F} \qquad (3.15)$$

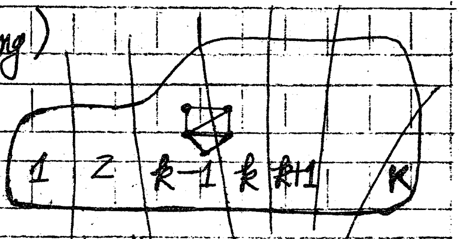
$$K=\sum_{\ell=1}^{L}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbb{U}}\right)^T K_\ell\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbb{U}}\right),\ \mathbb{F}=\sum_{\ell=1}^{L}\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbb{U}}\right)^T f_\ell \qquad (3.16)$$

(3.16)は係数行列および右辺の形式的な表現でもあるが、実際の算法も示している。すなわち、はじめ係数行列および右辺はすべて0にしておいてから、各要素ごとにK_ℓおよびf_ℓ

を計算し、それらを、要素を構成している節点の番号に対応する係数行列および右辺の値に加えてゆけばよい。

3.3 連立一次方程式の解法

(3.15)は$2N$元の方程式であるが、領域の分割を細かくすればするほどNは増加し、1万元とか2万元程度の方程式さえたやすく現われる。こうなると係数行列の記憶場所および計算時間の二点で困難を生じる。そこで系の特性にしたがって係数行列の特性を生かした工夫が必要となる。領域を節点を通らない曲線でK分割(partitioning)し、番号kの小領域は番号$k+1$あるいは$k-1$以外の小領域とは接しないようにする。



このようにすると、小領域kに含まれる節点は$k+1$あるいは$k-1$の小領域に含まれる節点以外とは関係をもたない。したがって(3.15)は次のように表現される。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & & 0 \\ B_1^T & A_2 & B_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & B_{K-2}^T & A_{K-1} & B_{K-1} \\ & & & B_{K-1} & A_K \end{pmatrix}}_{\equiv\, \mathbb{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{U}_1 \\ \mathbb{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{U}_{K-1} \\ \mathbb{U}_K \end{pmatrix}}_{\equiv\, \mathbb{U}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{F}_1 \\ \mathbb{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{F}_{K-1} \\ \mathbb{F}_K \end{pmatrix}}_{\equiv\, \mathbb{F}} \qquad (3.17)$$

N_kを小領域kに含まれる節点の数とすると、A_kは$2N_k \times 2N_k$の正方行列、B_kは$2N_k \times 2N_{k+1}$の行列である。

このような分割をすると係数行列K全体を記憶する必要がないので記憶場所の節約になる。また次に示すように計算も楽になる。(3.17)はいわゆる3項行列であるからよく知られているように次の分解が可能である。

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & & \\ B_1^T & A_2 & B_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & B_{K-1}^T & A_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ B_1^T & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B_{K-1}^T & C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & D_1 & & \\ & I & D_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & I \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

ここに C_k, D_k は漸化式.

$$\begin{cases} C_1 = A_1 \\ D_k = C_k^{-1} B_k \\ C_{k+1} = A_{k+1} - B_k^T D_k \qquad k = 1, 2, \cdots, K-1 \end{cases} \tag{3.19}$$

によって計算すればよい。(3.18)の分解ができれば、(3.17)は次の二つの連立方程式と同値である。

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ B_1^T & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B_{K-1}^T & C_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_K \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & D_1 & & \\ & I & D_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_K \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

(3.19)は次の漸化式により解ける。

$$\mathbb{g}_1 = \mathbb{C}_1^{-1}\mathbb{F}_1, \quad \mathbb{g}_k = \mathbb{C}_k^{-1}(\mathbb{F}_k - \mathbb{B}_{k-1}^T \mathbb{g}_{k-1}) \qquad (3.21)$$

$$k = 1, 2, \cdots, K$$

$$\mathbb{U}_K = \mathbb{g}_K, \quad \mathbb{U}_k = \mathbb{g}_k - \mathbb{D}_k \mathbb{U}_{k+1} \qquad (3.22)$$

$$k = K-1, K-2, \cdots, 1$$

計算の手順は次のように2段になる。

前進過程：(3.19)，(3.21)により$\mathbb{A}_k$，$\mathbb{B}_k$，$\mathbb{F}_k$からkを1づつ進めながら$\mathbb{D}_k$および$\mathbb{g}_k$を作り出してゆく。$\mathbb{D}_k$，$\mathbb{g}_k$の計算は係数行列が$\mathbb{C}_k$であり，右辺がそれぞれ$\mathbb{B}_k$，$\mathbb{F}_k - \mathbb{B}_{k-1}^T \mathbb{g}_{k-1}$という連立方程式を解くことになる。

後進過程：$\mathbb{D}_k$，$\mathbb{g}_k$から(3.22)により，解$\mathbb{U}_k$を$k=K$，$K-1$，… の順に計算してゆく。

以上の算法によればコアの中にすべての$\mathbb{A}_k \mathbb{B}_k \mathbb{F}_k$を記憶しておかなくてもよい。また一度に逆転できる行列の元数が少なくとも全体としては多次元の行列を逆転できることになる。なお，$\mathbb{U}$の中で境界条件により既知のものがある場合，その項は方程式(3.15)の右辺にまわし，行列の元数をへらすようにすることが必要である。

3.4 三角形要素の作成と領域分割の自動化

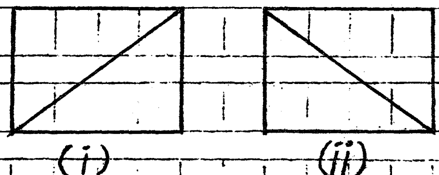
有限要素法における三角形要素を手作業で適当に作成して

行くことは、大きな作業量となる上、そのデータに落ちがないかどうかのチェックが大変である。また、前述のように連立一次方程式を解きやすくするための分割線を入れることも容易ではない。我々は、三角形要素の作成と領域の分割を規則的に自動的に作る機能をプログラムに追加した。入力データとしては次のものがあればよい。

（1）境界は多角形で近似し、その各頂点の座標を与える。またその各辺には境界条件を与えておく。中の穴のあいた図形に対しては、その境界も与えればよい。

（2）分割の細かさを座標の範囲で示す。そこで重要なところを細かく分割することが可能である。

このような工夫によって、きざみの細かさを自在に変更できるので、3.5で示す数値例の計算には非常に便利である。なお、長方形の要素を三角形にわける方法には、斜線の向きのきめ方によって2種類考えられるが、この向きの選択も、入力データ中のパラメータの指定によって容易に変更できる。（図3.4.1）



(i)　(ii)

［図3.4.1］　長方形を三角形要素に分割する二つの方法

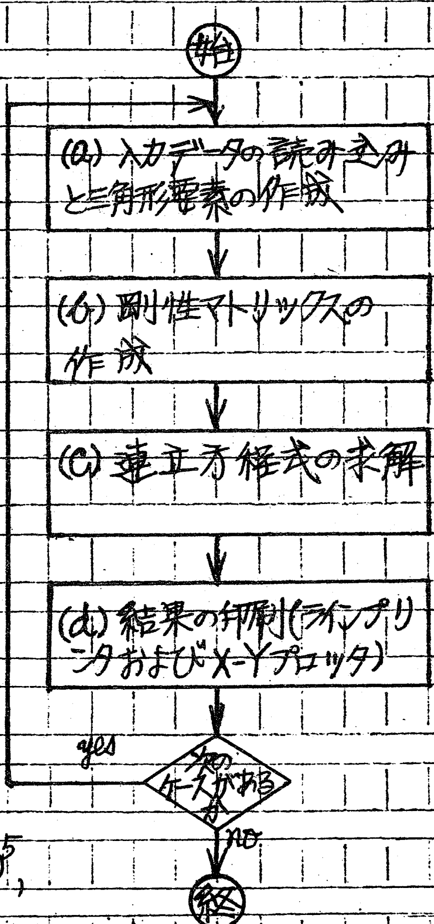
3.5 数値例

以上の考え方を用いてFORTRANによるプログラムを作成した。プログラムの構成は右図のようになっている。

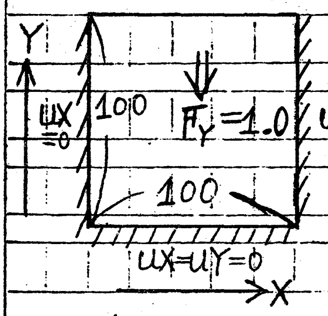
このプログラムを用いて、いくつかの数値例を計算した。ここで紹介するものは、主として誤差の解析に関係する数値例である。

(A)

例題は解析的に解を求められる簡単な例(図3.5.2に示す)を用いた。弾性定数は等方性で一様であると仮定し、$E_1=E_2=10^5$, $\nu_1=\nu_2=0.25$ とした。真の値は次式で求められる。



[図3.5.1]



[図3.5.2]

$$UX=0$$

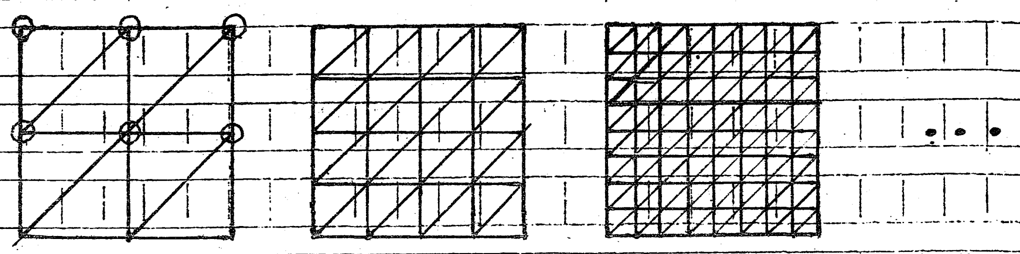
$$UY=\frac{1-\nu-2\nu^2}{2(1-\nu)E}(y^2-2yh)$$

ここにhは領域の厚さ(100)である。

なお、$y=50$ のとき、$UY=-0.03125$.

$y=100$ のとき $UY=+0.041667$ である。次のケースで計算を行った。

ケースA1　ケースA2　ケースA3　ケースA4



（分割数2）　（分割数4）　（分割数8）　（分割数16）

［図3.5.3］

計算結果の中で、各ケースに共通な6点（図3.5.3 のケースA1 の○印の点）に着目し、（計算値－真値）を求めて表3.5.1および図3.5.4に示した。この結果より、分割数をnとするとき、誤差は$1/n^2$にほぼ比例することがわかる。そこで、n分割の場合の変位の値をu_{2n}とすれば、外挿公式

$$u=\frac{1}{3}(4u_{2n}-u_n)$$

によって良い近似値が得られそうである。その計算結果も表3.5.1，図3.5.4に示した。この結果u_n, u_{2n}が求められれば外挿公式を用いて、u_{4n}あるいは、それ以上の精度が得られる。参考迄に各ケースの計算時間を表3.5.2，図3.5.5に示しておくが、計算時間の点で外挿公式を使用することが有利であることがわかる。なお本計算はTOSBAC 3400．モデル41で計算したものであり，演算時間はCPU時間（problem mode

[A]

座標 \ 変位 \ ケース	(0,50)	(0,100)	(50,50)	(50,50)	(50,100)	(50,100)	(100,50)	(100,100)
	uY	uY	uX	uY	uX	uY	uY	uY
①	.001593	.003739	-.000518	-.000105	.000350	.000111	-.001332	-.003959
②	.000456	.001374	-.000162	.000007	.000204	.000032	-.000427	-.001513
③	.000113	.000452	-.000045	.000000	.000067	.000006	-.000112	-.000497
④	.000028	.000140	-.000012	.000000	.000017	.000001	-.000028	-.000152
$\frac{1}{2}$(① + ①^{s})	.000106	-.000110	.000000	-.000105	.000000	.000111	.000106	-.000110
$\frac{1}{2}$(② + ②^{s})	.000015	-.000070	.000000	.000007	.000000	.000032	.000015	-.000070
$\frac{1}{2}$(③ + ③^{s})	.000001	-.000023	.000000	0	.000000	.000006	.000001	-.000023
$\frac{1}{2}$(④ + ④^{s})	.000000	-.000006	.000000	0	.000000	.000001	.000000	-.000006
$\frac{1}{3}$(4×② − ①)	.000077	.000586	-.000043	.000044	.000155	.000006	-.000109	-.000698
$\frac{1}{3}$(4×③ − ②)	-.000001	.000145	-.000006	-.000002	.000021	-.000003	-.000007	-.000158
$\frac{1}{3}$(4×④ − ③)	-.000000	.000036	-.000001	.000000	.000000	-.000001	.000000	-.000037

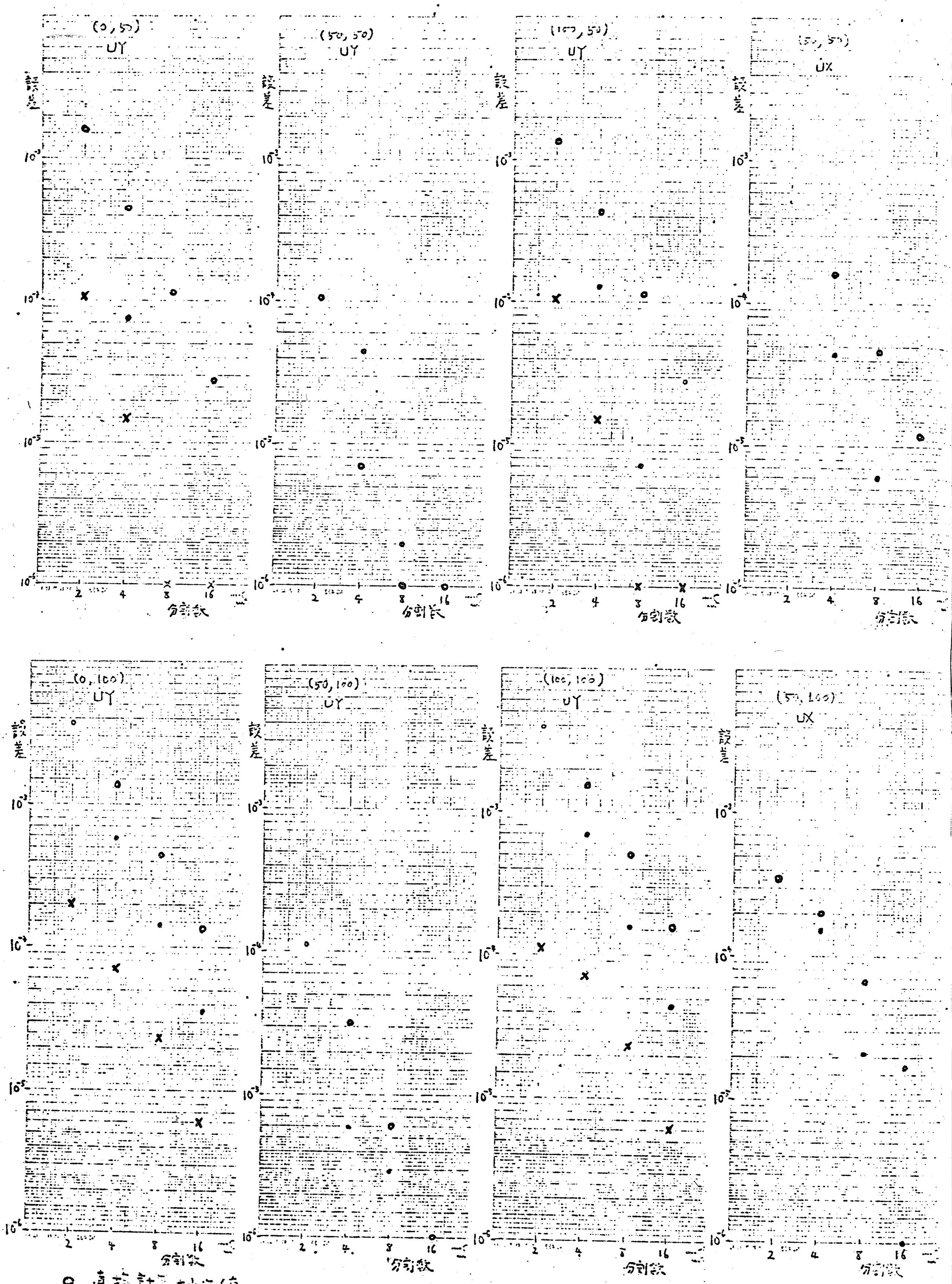
[B]

座標 \ 変位 \ ケース	(0,50)	(0,100)	(50,50)	(50,50)	(50,100)	(50,100)	(100,50)	(100,100)
	uY	uY	uX	uY	uX	uY	uY	uY
①	.001062	.002611	-.000443	.000065	.000565	.000757	-.001272	-.003732
②	-.000845	-.002710	.000319	-.000197	.000032	-.000605	.001315	.003448
③	-.001718	.000860	-.000171	-.000453	-.000058	.000352	.002116	-.001000
④	.001745	-.000682	.000089	.000515	.000959	-.000431	-.002350	.000974
$\frac{1}{2}$(① + ②)	.000109	-.000050	-.000062	-.000066	.000299	.000076	.000022	-.000142
$\frac{1}{2}$(③ + ④)	.000014	.000089	-.000041	.000031	.000451	-.000040	-.000117	-.000013

[C]

座標 \ 変位 \ ケース	(0,50)	(0,100)	(60,55)	(60,55)	(50,100)	(50,100)	(100,50)	(100,100)
	uY	uY	uX	uY	uX	uY	uY	uY
①	.002345	.004097	-.000341	-.000737	.000558	-.000506	-.001722	-.003086
②	.000553	.001421	-.000087	-.000255	.000251	-.000143	-.000457	-.001430
③	.000123	.000462	-.000021	-.000102	.000076	-.000008	-.000113	-.000500
$\frac{1}{3}$(4×② − ①)	-.000044	.000529	.000004	-.000094	.000149	-.000022	-.000035	-.000878
$\frac{1}{3}$(4×③ − ②)	-.000020	.000142	.000001	-.000051	.000018	.000037	.000002	-.000190

表 2.5.1 計算結果の一部



○ 直接計算された値
● 外挿値
X 平均値

図 3.5.4 分割数と誤差の関係

分割数	単位 \ プログラム	(a)	(b)	(c)	(d)	合計
2	CPU	1.30	1.72	0.16	2.20	5.38
	I/O	5.86	4.94	4.22	9.10	24.12
	合計	7.16	6.66	4.38	11.30	29.50
4	CPU	2.08	3.22	1.44	7.84	14.58
	I/O	10.12	10.28	7.92	22.66	50.98
	合計	12.20	13.50	9.36	30.50	65.56
8	CPU	4.30	9.36	19.24	29.40	62.30
	I/O	23.30	30.54	20.86	67.70	142.40
	合計	27.60	39.90	40.10	97.10	204.70
16	CPU	13.02	39.98	278.54	115.44	446.98
	I/O	87.20	70.28	96.92	195.62	450.02
	合計	100.22	110.26	375.46	311.60	897.00

プログラム (a) 入力データ処理
プログラム (b) 剛性マトリックスの作成
プログラム (c) 連立方程式の求解
プログラム (d) 結果の印刷

表 3.5.2 計算時間（単位 秒）

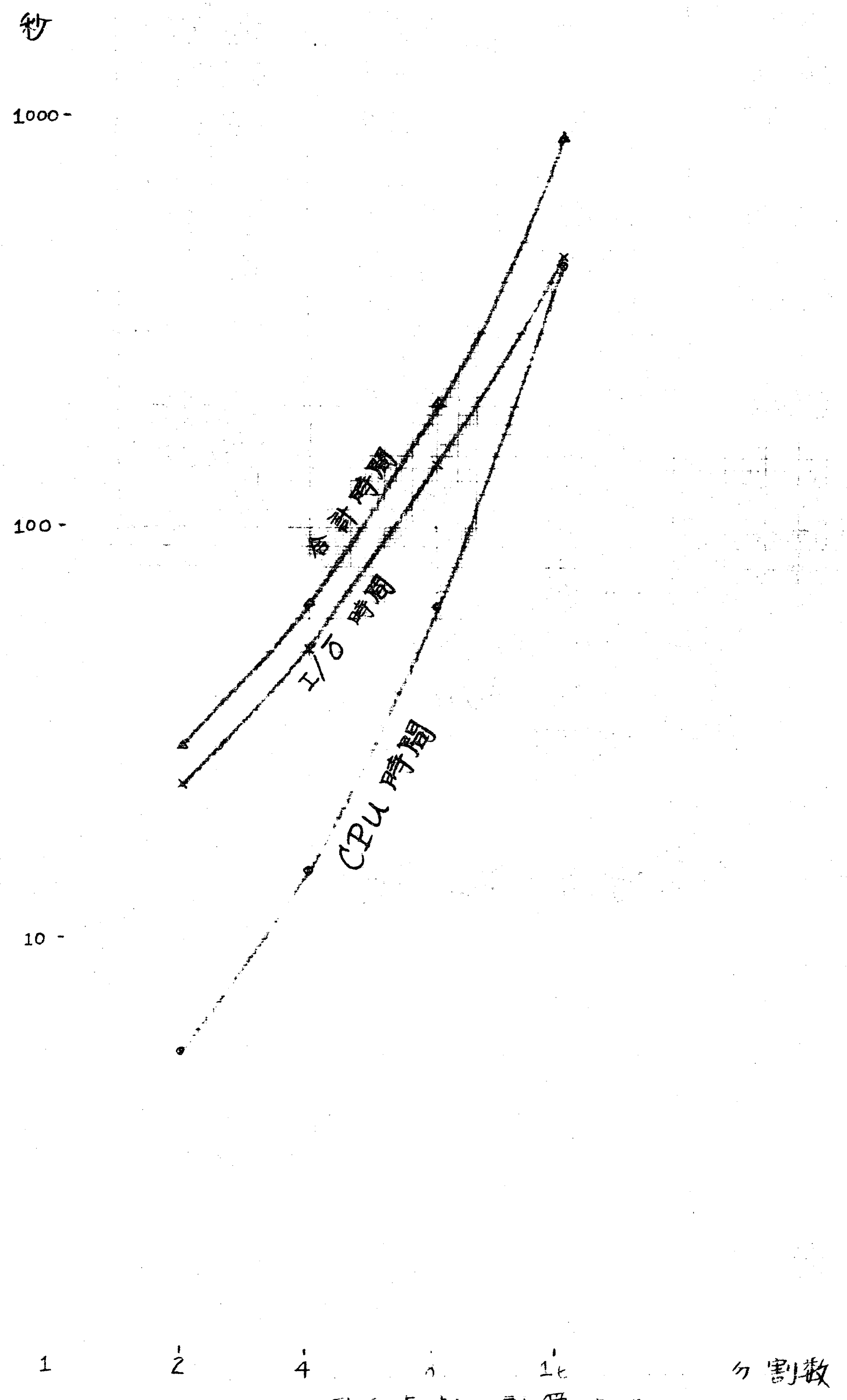


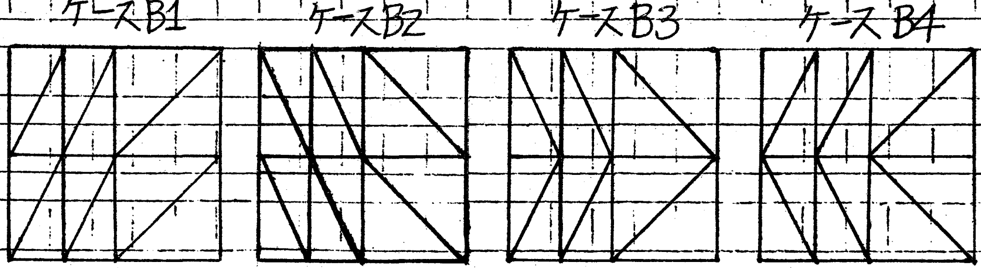
図 3 5 5　計算時間と分割数の関係

の時間）と，I／O時間（supervisor modeの時間，モニタの所要時間を含む）にわけ，4つのプログラムのブロック（図3.5.1の流れ図参照）のおのおのについて測定した。

さらにこの実験では，三角形要素を左下から右上への斜線で分割している。もともと対称な図形で非対称な結果が得られるのはそのためである。逆に右下から左への斜線で分割した結果は，あらためて計算しなくても，計算結果の左右を逆転し，uxの符号を逆転すればよい。その結果を①^s，②^s，…のように表現し，①と①^{s}の平均，②と②^{s}の平均，…をとると，より近似値が得られることが推察される。その計算結果も表3.5.1，図3.5.4に示す。結果を観察すると，誤差は非常に小さくなっており，2分割の場合の平均でも最大誤差の点で16分割に匹敵する精度が得られている。演算時間はかなり節約になる。

（B1）

例題の形状および条件は（A1）と同じである。



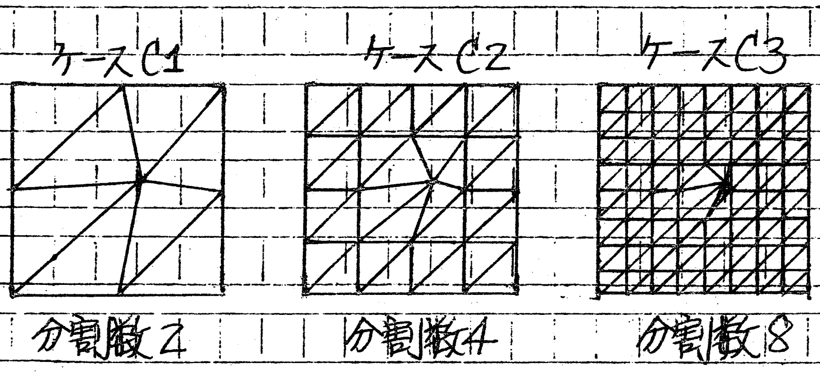
（図 3.5.6）

分割の仕方を非対称とした上で、三角形要素の分割法を変えて実験をおこなった。（表3.5.1参照）

（A）の場合、分割の向きを変えた計算の変位の値の平均値が非常に良い精度を示したが、分割が非対称な場合にも有効かも知れない。

（C）

例題の形状および条件は（A）と同じであり、分割の方法も（A）とほとんど同じであるが、座標（50,50）の点だけを（60,55）に移動したものである。



（図3.5.7）

（A）において誤差が$1/n^2$に比例したのは規則正しく三角形要素を分割したためで、任意に三角形を分割した場合には悪くなることが予想される。（辻尚史：有限要素法の誤差、大型の数値計算に関する諸問題研究会報告、1971年3月参照）

そこで、図3.5.7のように中央の座標（50,50）の点を座標（60,55）に移動して三角形要素の形にゆがみをもたせてみた。

結果は表3.5.1に示したが，(60,55)の点のUYの誤差の減少は1/n²で示されるものより小さいようである。しかし，この例だけから一般的にそうなると結論することはできないであろう。以上の例の他に実際的な規模の計算もいくつか実施した。たとえば分割数37，要素数1454の例題で計算時間はTOSBAC3400+41で約70分を要し，その半分がCPU時間であった。同じ例題をCDC6600で動かしたところCPU時間が約2分，ペリフェラル時間が約11分であった。TOSBAC3400+41は実数の仮数部が37ビット，CDC6600は48ビットであるが，計算結果は全く同じであった。したがって，計算機の有効桁数に関する誤差はないと考えられる。

おわりに

我々は有限要素法による構造解析のために，三角形要素の作成と，領域の分割を規則正しく自動的におこなうプログラムを開発した。それを用いて簡単な例で実験したところ，規則正しい分割に対して誤差が分割数の二乗に反比例するので2通りの分割数での計算から外挿公式で，良い精度の値を求めることができることを確かめた。また，長方形を三角形要素に分割するときに，分割の方法に2種類あるが，2つの分割の向きで計算を行ったのち，その平均を求めると，よい精

度の値が得られることがわかった。現在の結果は簡単な形状についての実験結果であるのでさらに複雑な形状の構造の計算に、これらの結論が有効であるかどうか確かめる必要がある。