数理解析研究所講究録
第133巻 1972年 1-14



# 無限複体のコホモロジー

大阪市大 理　吉村善一

## §0. 序

$h^*$ を基点を頂点にもつ CW複体 $X$ の上の一般簡約コホモロジー論とする。 $h^k(X)$ の減少 filtration を

$$F^n h^k(X) = \ker\{h^k(X) \longrightarrow h^k(X^{n-1})\}, \quad n \geq 0,$$

によって定義すると，この filtiation は $h^k(X)$ に $F^n h^k(X)$ を $\{0\}$ の近傍とする位相を与える。 $S^k(X)$ を $\{0\}$ の閉包，すなわち

$$S^k(X) = \cap_{n\geq 0} F^n h^k(X)$$

とすると

$$h^k(X) \text{ が Hausdorff 空間} \Leftrightarrow S^k(X) = \{0\}.$$

我々はこの note で

(I) $S^k(X)$ の characterization

(II) $S^k(X) = \{0\}$ の criteria

を求める。それらは次の結果である。

$h^*$ は additive cohomology theory of finite type

$X$ は based CW-complex with finite skeletons $X^n$

とする時,

定理(I). $x \in h^k(X)$ とする。 次の i) 〜 iv) は同値条件である。

i) $x \in S^k(X)$,

ii) $\forall n \neq 0$, $\exists y = y(n) \in h^k(X)$ s.t. $x = ny$,

iii) $\forall n \neq 0$, $\exists z = z(n) \in S^k(X)$ s.t. $x = nz$,

iv) $x \in \mathrm{Im}\{\varpi : h^{k-1}(X ; \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}) \longrightarrow h^k(X)\}$.

定理(II). ・次の i) 〜 ix) は同値条件である.

i) $S^k(X) = \{0\}$,

ii) $h^k(X)$ は Hausdorff 空間である,

iii) $h^k(X)$ は complete かつ Hausdorff 空間である,

iv) $\pi : h^k(X) \longrightarrow \varprojlim h^k(X^n)$ は同型写像である,

v) $\varprojlim{}^1 h^{k-1}(X^n) = \{0\}$,

vi) $\{h^{k-1}(X^n)\}_{n \geq 0}$ は Mittag-Leffler 条件をみたす,

vii) $\forall n$, $\exists r_0 = r_0(k, n)$ s.t. $E_{r_0}^{n, k-n-1} = E_r^{n, k-n-1}$ for $r_0 \leq r < \infty$ in Atiyah-Hirzebruch spectral sequence $\{E_r, d_r\}$,

viii) $\forall n$, $\exists r_0 = r_0(k, n)$ s.t. $E_{r_0}^{n, k-n-1} = E_\infty^{n, k-n-1}$,

ix) $0 \to \tilde{h}^k(X) \xrightarrow{\iota} \tilde{h}^k(X:\hat{Z}) \xrightarrow{\kappa} \tilde{h}^k(X:\hat{Z}/Z) \to 0$

は exact である。

§1. Direct limits of CW-complexes

この節で type $(\hat{Z}, 2)$ と type $(\hat{Z}/Z\ 2)$ の co-Moore spaces $\check{M}$ と $S_Q$ を作る。

$\{X_n, \varphi^n_{n+1}\}_{n \geq 1}$ を based CW-complexes と based cellular maps による正整数上の direct system とする。

$\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(X_n, \varphi^n_{n+1})$ を infinite mapping cylinder として定義する、すなわち

$$\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(X_n, \varphi^n_{n+1}) = \amalg X_n \times I/\sim ,$$

$\sim$ : $(x_n, 1) \sim (\varphi^n_{n+1} x_n, 0)$ , $(*_n, t) \sim *$ .

その時

(1, 1) $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, X_n$ は based CW-complex となる。

$X$ を trivial direct limit $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(X_n = X,\ \varphi^n_{n+1} = \mathrm{id})$ の subcomplex $X_1 \times \{0\}$ とみなし、

$\iota : X \to \underrightarrow{\lim}\, X$ と $p : \underrightarrow{\lim}\, X \to X$

を canonical inclusion と projection とすると

(1, 2) $p$ は deformation retraction である。

そしてヌ次の性質を得る。

(1, 3) i) $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}(Y_n \underset{T_n}{\cup} CX_n) = \underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, Y_n \underset{\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, T_n}{\cup} C(\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\, X_n)$

ここに $\{f_n\}:\{X_n\}\to\{Y_n\}$ は direct systems の morphism である。

ii) $\varinjlim(X_n\wedge Z)=\varinjlim X_n\wedge Z$　但し $X_n$, $Z$ は countable.

次の定理は $\varinjlim X_n$ のコホモロジー群の計算を可能にする。

定理 (Milnor). $h^*$ を additive cohomology theory, $\{X_n\}$ を direct system とすると,

$$0\to\varprojlim{}^1 h^{k-1}(X_n)\to h^k(\varinjlim X_n)\to\varprojlim h^k(X_n)\to 0$$

は exact である。　特に $X$ を based CW-complex とする時,

$$0\to\varprojlim{}^1 h^{k-1}(X^n)\to h^k(X)\xrightarrow[\pi]{}\varprojlim h^k(X^n)\to 0$$

は exact である.

次に $\{X_q,\varphi^q_{qr}\}$ を divisibility によって順序づけられた整数 $>1$ の集合 I の direct system とする。今 $l=\{p_n\}_{n\geq1}$ を全ての素数の集合とし,

$$l_n=p_1^n\cdots p_n^n$$

とおく時, $\{l_n\}_{n\geq1}$ は linearly ordered cofinal sequence になるので

$$\varinjlim(X_q,\varphi^q_{qr})=\varinjlim(X_{l_n},\varphi^{l_n}_{l_{n+1}})$$

とおく。

(注意) 任意の linearly ordered cofinal sequences $\{q_n\}$ と $\{r_n\}$ を選ぶ時, $\varinjlim(X_{q_n}, \varphi^{q_n}_{q_{n+1}})$ と $\varinjlim(X_{r_n}, \varphi^{r_n}_{r_{n+1}})$ は同じ homotopy type をもつ。

$M_q = S^1 \cup_q CS^1$ を type $(Z_q, 2)$ の co-Moore space とすると

$$T = r \cup C1 : M_q \longrightarrow M_{qr}$$

は cellular map になるので

(1.4) $\check{M} = \varinjlim(M_q, \varphi^q_{qr} = T)$, $S_e = \varinjlim(S^1, \varphi^q_{qr} = r)$

とおくことができる。

命題(1.5). $\check{M}$ と $S_e$ は type $(\hat{Z}, 2)$ と $(\hat{Z}/Z, 2)$ の co-Moore spaces である。

(証明) Milnor の定理により

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^1 H^{k-1}(M_q) \longrightarrow H^k(\check{M}) \longrightarrow \varprojlim H^k(M_q) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^1 (H^{k-1}(S^1), \psi^{qr}_q = r) \to H^k(S_e) \longrightarrow \varprojlim (H^k(S^1), \psi^{qr}_q = r) \to 0$$

は exact である。 $H^{k-1}(M_q)$ は有限群より, $\varprojlim{}^1 H^{k-1}(M_q) = \{0\}$ となる。この結果

$$H^2(\check{M}) = \varprojlim Z_q = \hat{Z} \quad \text{で} \quad H^k(\check{M}) = 0 \quad k \neq 2,$$

すなわち, $\check{M}$ は type $(\hat{Z}, 2)$ の co-Moore space である。

一方, inverse systems の exact 列

$$0 \to \{Z, \psi^{qr}_q = r\} \xrightarrow[\{q\}]{} \{Z, \psi^{qr}_q = id\} \xrightarrow[\{p_q\}]{} \{Z_q, \psi^{qr}_q = \rho^{qr}_q\} \to 0$$

を考える。 その時 exact 列

$$0 \to \varprojlim(\mathbb{Z}, \psi_q^{qr}=r) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \hat{\mathbb{Z}} \to \varprojlim{}^1(\mathbb{Z}, \psi_q^{qr}=r) \to 0$$

を得る。 $\iota$ は natural inclusion であるので、

$$H^2(S_\ell) = \varprojlim{}^1(\mathbb{Z}, \psi_q^{qr}=r) = \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}, \quad H^k(S_\ell)=0 \quad k\neq 2.$$

すなわち $S_\ell$ は type $(\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}, 2)$ の co-Moore space である。

(注意) $\check{M}$ と $S_\ell$ は type $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 1)$ と $(\mathbb{Q}, 1)$ の Moore space になる。

## §2. Cohomology theories $h^*(\ :\hat{\mathbb{Z}})$ and $h^*(\ :\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z})$

$h^*$ を additive cohomology theory of finite type

$X$ を based CW-complex with finite skeletons

とする。 co-Moore spaces $\check{M}$ と $S_\ell$ を用いて cohomology theories $h^*(\ :\hat{\mathbb{Z}})$ と $h^*(\ :\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z})$ を

(2.1) $$h^k(X:\hat{\mathbb{Z}}) = h^{k+2}(X\wedge \check{M})$$
$$h^k(X:\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}) = h^{k+2}(X\wedge S_\ell)$$

によって定義する。 その時 $h^*(\ :\hat{\mathbb{Z}})$ と $h^*(\ :\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z})$ は additive である。

direct systems の列

$$\{S^1, \varphi^q_{qr}=id\} \xrightarrow[\{q\}]{} \{S^1, \varphi^q_{qr}=r\} \xrightarrow[\{c_q\}]{} \{M_q, \varphi^q_{qr}=T\} \xrightarrow[\{\pi_q\}]{} \{S^2, \varphi^q_{qr}=id\}$$

を考え、

$$l = \varinjlim q\cdot\iota : S^1 \to \varinjlim S^1 \to S_\ell$$

$$\check{i} = \varinjlim i_q : S_\ell \longrightarrow \check{M}$$

$$\check{\pi} = p \cdot \varinjlim \pi_q : \check{M} \longrightarrow \varinjlim S^2 \longrightarrow S^2$$

とおくと、(1.2) と (1.3) i) より

$$\check{M} = S_\ell \underset{\varinjlim q}{\cup} C(\varinjlim S^1) \simeq S_\ell \underset{\ell}{\cup} CS^1$$

となるので

補題(2.2). $S^1 \xrightarrow{\ell} S_\ell \xrightarrow{\check{i}} \check{M} \xrightarrow{\check{\pi}} S^2$ は

cofibring sequence である。

今

$$\iota = (1 \wedge \check{\pi})^* \sigma^2 : h^k(X) \longrightarrow h^k(X : \hat{Z})$$

$$\kappa = (1 \wedge \check{i})^* : h^k(X : \hat{Z}) \longrightarrow h^k(X : \hat{Z}/Z)$$

$$\varpi = \sigma^{-1}(1 \wedge \ell)^* : h^k(X : \hat{Z}/Z) \longrightarrow h^{k+1}(X)$$

と定義する時. (2.2) より

$$(2.2') \xrightarrow{\varpi} h^k(X) \xrightarrow{\iota} h^k(X : \hat{Z}) \xrightarrow{\kappa} h^k(X : \hat{Z}/Z) \xrightarrow{\varpi}$$

は exact 列である。

補題(2.3). i) $h^k(X : \hat{Z})$ は Hausdorff, i.e.,

$$\hat{\pi} : h^k(X : \hat{Z}) \longrightarrow \varprojlim h^k(X^n : \hat{Z}) \text{ は同型である}$$

ii) $h^k(X : \hat{Z}) \longrightarrow \varprojlim h^k(X : Z_q)$ は同型である.

(証明) Milnor の定理によって

$$\varprojlim{}^1 h^{k-1}(X^n : \hat{Z}) = 0 \quad と \quad \varprojlim{}^1 h^{k-1}(X : Z_q) = 0$$

を示せば十分である。 再び Milnor の定理を用いると,

$$0 \longrightarrow \varprojlim_q{}^1 h^k(X^n \wedge M_q) \to h^{k+1}(X^n \wedge \check{M}) \longrightarrow \varprojlim_q h^{k+1}(X^n \wedge M_q) \to 0$$

は exact である。今 $H^{k+1}(X^n \wedge M_q)$ に discrete topology により位相群の構造を与えると $\varprojlim_q H^{k+1}(X^n \wedge M_q)$ は profinite になり，このことから

$$\varprojlim{}^1_n \left(\varprojlim_q H^{k+1}(X^n \wedge M_q)\right) = 0 ,$$

それ故 $\varprojlim{}^1_n H^{k+1}(X^n : \hat{Z}) = 0$ を得る。

同様にして $\varprojlim{}^1_q H^{k+1}(X : Z_q) = \varprojlim{}^1_q \left(\varprojlim_n H^{k+1}(X^n \wedge M_q)\right) = 0$.

補題(2.4) $X$ を finite complex とする。

$$H^k(X : \hat{Z}) = H^k(X) \otimes \hat{Z} , \quad H^k(X : \hat{Z}/Z) = H^k(X) \otimes \hat{Z}/Z .$$

(証明) exact 列

$$0 \to \varprojlim H^k(X) \otimes Z_q \to \varprojlim H^k(X : Z_q) \to \varprojlim \mathrm{Tor}(H^{k+1}(X), Z_q) \to 0$$

を考えると，

$$\varprojlim H^k(X) \otimes Z_q \cong H^k(X) \otimes \hat{Z} ,$$

$$\varprojlim \mathrm{Tor}(H^{k+1}(X), Z_q) \cong \mathrm{Tor}(H^{k+1}(X), \hat{Z}) = 0$$

を用いて，(2.3) より

$$H^k(X) \otimes \hat{Z} = H^k(X : \hat{Z}) .$$

次に可換な図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^k(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^k(X) \otimes \hat{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^k(X) \otimes \hat{Z}/Z \arrow[r] & 0 \\
\arrow[r] & H^k(X) \arrow[r, "\iota"'] & H^k(X : \hat{Z}) \arrow[r, "\kappa"'] & H^k(X : \hat{Z}/Z) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

を考えると $\iota$ は単射になるので第2の結論を得る。

命題(2.5)

$$H^{k-1}(X:\hat{Z}/Z) \xrightarrow{\varpi} H^k(X) \xrightarrow{\pi} \varprojlim H^k(X^n) \longrightarrow 0$$

は exact 列である。

証明) 次の可換な図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow H^{k-1}(X:\hat{Z}/Z) & \xrightarrow[\varpi]{} & H^k(X) & \xrightarrow[\iota]{} & H^k(X:\hat{Z}) & \longrightarrow \\
 & & \pi\downarrow & & \downarrow\hat{\pi} & \\
 & & \varprojlim H^k(X^n) & \xrightarrow{\varprojlim \iota} & \varprojlim H^k(X^n:\hat{Z}) &
\end{array}$$

において $\hat{\pi}$ は (2.3) より同型である。又 $X^n$ は finite なので (2.4) より $\iota: H^k(X^n) \longrightarrow H^k(X^n:\hat{Z})$ は単射，このことから $\varprojlim \iota$ も単射である。それ故 (2.2') より命題を得る。

系(2.6). $S^k(X) = \mathrm{Im}\{\varpi: H^{k-1}(X:\hat{Z}/Z) \longrightarrow H^k(X)\}$.

特に，$H^k(X)$ が Hausdorff である $\Longleftrightarrow$

$0 \longrightarrow H^k(X) \xrightarrow{\iota} H^k(X:\hat{Z}) \xrightarrow{\kappa} H^k(X:\hat{Z}/Z) \longrightarrow 0$ は exact.

## §3. 定理(I)の証明

$k_\ell = \varinjlim k: S_\ell \longrightarrow S_\ell$, $k \neq 0$, とおく.

補題(3.1). $(1_X \wedge k_\ell)^*: H^*(X:\hat{Z}/Z) \longrightarrow H^*(X:\hat{Z}/Z)$

は同型であって，$\varpi(1_X \wedge k_\ell)^* = k \cdot \varpi$.

(証明) $k_\ell$ が homotopy equivalence であることを示せば $(1_X \wedge k_\ell)^*$ は同型になる。

$S_\ell = \varinjlim (S_{\ell_n} = S^1,\ \varphi^{\ell_n}_{\ell_{n+1}} = \ell_{n+1}/\ell_n) = \varinjlim (S_q = S^1,\ \varphi^q_{qr} = r)$
とおく。

$k'_\ell = \varinjlim 1 : S_\ell = \varinjlim S_q \longrightarrow \varinjlim S_{|k|q} \cong S_\ell$
を考えるとき, $k/|k| \cdot k'_\ell$ は $k_\ell$ の homotopy inverse を与える。

$$\begin{tikzcd}
S_q \arrow[r, "k"] \arrow[d, "|k|"'] & S_q \arrow[d, "|k|"] \arrow[dl, "k/|k|"'] \\
S_{|k|q} \arrow[r, "k"'] & S_{|k|q}
\end{tikzcd}$$

(注意) $(1_X \wedge k_\ell)^* = k$ である。すなわち $h^k(X;\hat{Z}/Z)$ の任意の元は任意の整数$\neq 0$ によって divisible である。

定理(I) $x \in h^k(X)$ とする。次の i)〜iv) は同値

i) $x \in S^k(X)$

ii) $\forall n \neq 0$, $\exists y = y(n) \in h^k(X)$ s.t. $x = ny$,

iii) $\forall n \neq 0$ $\exists z = z(n) \in S^k(X)$ s.t. $x = nz$.

iv) $x \in \operatorname{Im}\{\partial : h^{k-1}(X;\hat{Z}/Z) \longrightarrow h^k(X)\}$

(証明) (2, 6) より i) ⇔ iv) であるので
iv) ⇒ iii) ⇒ ii) ⇒ i) の順序で示せばよい。

iv) ⇒ iii) (3, 1) より明らか.

iii) ⇒ ii) 自明

ii) ⇒ i) $x \in h^k(X)$ が任意の整数$\neq 0$ によって divisible とする。 $\Pi(x) = \{i_n^* x\} \in \varprojlim h^k(X^n)$

において $i_n^* x \in \widetilde{K}^k(X^n)$ は任意の整数 $\neq 0$ によって divisible であるが $\widetilde{K}^k(X^n)$ は finitely generated であるので $i_n^* x = 0$, すなわち $\pi(x) = 0$ である。これより $x \in S^k(X)$.

系(I, 1) $\widetilde{K}^k(X)$ が Hausdorff でないならば $S^k(X)$ は infinite 個の generators をもつ.

系(I, II) $\widetilde{K}^k(X)$ が Hausdorff で $Y$ は $X$ の finite subcomplex とする。その時 $\widetilde{K}^k(X/Y)$ は Hausdorff である.

(証明) exact 列

$$\longrightarrow \widetilde{K}^{k-1}(Y) \xrightarrow{\delta} \widetilde{K}^k(X/Y) \xrightarrow{j^*} \widetilde{K}^k(X) \longrightarrow$$

を考える時, $j^*(S^k(X/Y)) \subset S^k(X) = \{0\}$ であるので $S^k(X/Y) \subset \operatorname{Im}\delta$. しかし $\operatorname{Im}\delta$ は finitely generated であるので 系(I, 1) より $S^k(X/Y) = 0$ すなわち $\widetilde{K}^k(X/Y)$ は Hausdorff である。

## §4. 定理(II) の証明

Atiyah-Hirzebruch spectral sequence $\{E_r, d_r\}$ を思い出そう。

$$Z_r^{n, k-n} = \operatorname{Im}\{\widetilde{K}^k(X^{n+r-1}/X^{n-1}) \longrightarrow \widetilde{K}^k(X^n/X^{n-1})\}$$

$$B_r^{n, k-n} = \operatorname{Im}\{\widetilde{K}^{k-1}(X^{n-1}/X^{n-r}) \longrightarrow \widetilde{K}^k(X^n/X^{n-1})\}$$

$$E_r^{n,k-n} = Z_r^{n,k-n} / B_r^{n,k-n}$$

$1 \leqq r \leqq \infty$, とおく。 $B_{n+1}^{n,k-n} = B_{n+2}^{n,k-n} = \cdots = B_\infty^{n,k-n}$ より

$$E_{n+1}^{n,k-n} \supset E_{n+2}^{n,k-n} \supset \cdots \supset E_\infty^{n,k-n}$$

であり 又

$$E_\infty^{n,k-n} \xleftarrow{\cong} F^n H^k(X) / F^{n+1} H^k(X)$$

である。

補題(4,1) $\{H^k(X^n)\}_{n \geqq 0}$ が ML 条件を充たす, i.e.,

$\forall n$, $\exists n_0 = n_0(k,n)$ s.t.

$$\mathrm{Im}\{H^k(X^{n+n_0}) \to H^k(X^n)\} = \bigcap \mathrm{Im}\{H^k(X^{n+m}) \to H^k(X^n)\}$$

$\Leftrightarrow$ $\forall n$, $\exists r_0 = r_0(k,n)$ s.t. $E_{r_0}^{n,k-n} = E_r^{n,k-n}$ for $r_0 \leqq r < \infty$.

補題(4,2) $\forall n$, $\exists n_0 = n_0(k,n)$ s.t.

$$\mathrm{Im}\{H^k(X^{n+n_0}) \to H^k(X^n)\} = \mathrm{Im}\{H^k(X) \to H^k(X^n)\}$$

$\Leftrightarrow$ $\forall n$, $\exists r_0 = r_0(k,n)$ s.t. $E_{r_0}^{n,k-n} = E_\infty^{n,k-n}$.

命題(4,3) 次の i) ～ iii) は同値である。

i) $\{H^k(X^n)\}_{n \geqq 0}$ が ML 条件を充たす。

ii) $\forall n$, $\exists r_0 = r_0(k,n)$ s.t. $E_{r_0}^{n,k-n} = E_r^{n,k-n}$ for $r_0 \leqq r < \infty$,

iii) $\forall n$, $\exists r_0 = r_0(k,n)$ s.t. $E_{r_0}^{n,k-n} = E_\infty^{n,k-n}$

(証明) (4,1) より i) $\Leftrightarrow$ ii)

i) $\Leftrightarrow$ iii): $\{H^k(X^n)\}_{n \geqq 0}$ が ML 条件を充たす $\Leftrightarrow$

$\forall n,\ \exists n_0 = n_0(k,n)$ s.t.

$$\mathrm{Im}\{H^k(X^{n+n_0}) \to H^k(X^n)\} = \mathrm{Im}\{\varprojlim_i H^k(X^i) \to H^k(X^n)\}.$$

Milnor の定理 と (4.2) より i) $\Leftrightarrow$ iii) は明らか。

定理(IV) 次の i) 〜 ix) は同値である。

i) $S^k(X) = \bigcap \overline{F^n H^k(X)} = \{0\}$.

ii) $H^k(X)$ が Hausdorff である.

iii) $H^k(X)$ が complete かつ Hausdorff である.

iv) $\pi : H^k(X) \longrightarrow \varprojlim H^k(X^n)$ が同型である.

v) $\varprojlim{}^1 H^{k-1}(X^n) = 0$.

vi) $\{H^{k-1}(X^n)\}$ が ML 条件を充たす.

vii) $\forall n,\ \exists r_0 = r_0(k,n)$ s.t. $E_{r_0}^{n,k-n-1} = E_r^{n,k-n-1},\ r_0 \leq r$

viii) $\forall n\ \exists r_0 = r_0(k,n)$ s.t. $E_{r_0}^{n,k-n-1} = E_\infty^{n,k-n-1}$

ix) $0 \to H^k(X) \xrightarrow{i} H^k(X;\hat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{k} H^k(X;\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z})$ は exact.

(証明) i) $\Leftrightarrow$ ii) 自明

ii) $\Leftrightarrow$ iv), iv) $\Leftrightarrow$ v) Milnor の定理より自明

vi) $\Leftrightarrow$ vii) $\Leftrightarrow$ viii) (4.3) より

ii) $\Leftrightarrow$ ix) (2.6) より

v) $\Leftrightarrow$ vi) Gray の定理;

"$\{A_n\}$ を countable abelian groups の inverse system とする時 $\{A_n\}$ が ML 条件を充たす $\Leftrightarrow$ $\varprojlim{}^1 A_n = 0$"

を用いることが, $H^k(X^n)$ は今 finitely generated であるので

可能である。

ii) ⇔ iii) は Milnor の定理を用いて示すことができる。

[注意] Milnor の定理により

$$S^k(X) \cong \varprojlim{}^1 h^{k-1}(X^n)$$

であるので、$h^{k-1}(X^n)$ が finitely generated であることを用いると $\varprojlim{}^1 h^{k-1}(X^n)$ の任意の元は任意の整数 $\neq 0$ によって divisible であることを知るので、$S^k(X)$ も又そうである。　これより定理(I)において i), ii), iii) が同値であることは、我々の方法を用いるまでもなく簡単に証明することができる。

References


[1] Araki-Toda : Multiplicative structure in mod q cohomology theories I, Osaka J. Math 2 (1965)

[2] Buhštaber-Miščenko : K-theory on the category of infinite cell complexes, Math. USSR Izv 2 (1968)

[3] Gray : Spaces of the same n-type, for all n, Topology 5 (1966)

[4] Milnor : On axiomatic homology theory, Pacific J. Math 12 (1962)